UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Ecuaciones Integrales en Espacios de Funciones de Variación Acotada.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Br. Amarilis T. Parica R.** para optar al título de Licenciada en Matemática.
Tutor: Dr. Nelson Merentes

Caracas, Venezuela
Octubre, 2012

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Ecuaciones Integrales en Espacios de Funciones de Variación Acotada**", presentado por la **Br. Amarilis T. Parica R.**, titular de la Cédula de Identidad **14.645.191**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática**.

Dr. Nelson Merentes

Tutor

Msc. Sergio Rivas

Jurado

Dr. Manuel Maia

Jurado

A mi amada madre Reina, y a mi hija bella Osiris con mucho cariño.

Agradecimiento

Primero que todo, gracias a Dios por haberme dado salud y fuerzas para siempre salir adelante y luchar por mis sueños.

A mi madre, Reina por su confianza y apoyo en cada una de mis decisiones, a mi hija Osiris por brindarme tanto amor, comprensión y ser un gran motivo de lucha y perseverancia en todo momento de mi vida.

Gracias a mi tutor, el profesor Nelson Merentes por su gran colaboración, amistad y apoyo incondicional en la realización de este Trabajo Especial de Grado, y por brindarme la oportunidad de ser su tesista.

De igual modo, gracias al profesor José Luis Sánchez, por su colaboración y ayuda en este trabajo a pesar de sus diferentes obligaciones, y por compartir conmigo todos sus conocimientos, así como también, a el profesor Jesus Matute, por sus sugerencias y dedicar parte de su tiempo en la revisión de este trabajo, a el profesor Antonio Azocar por todas las sugerencias y toda su valiosa colaboración prestada, al profesor Sergio Rivas por sus sugerencias y dedicar tiempo a la revisión de este trabajo.

A mis compañeros María, Freider, Omar, Francys, y demás compañeros que fueron apoyo, motivación, gracias por su amistad y compañía durante la carrera, a Odalis y Zorely por su colaboración sin pedir nada a cambio y a Raúl por todo su apoyo, comprensión en todo momento.

En fin, a todas aquellas personas y seres queridos, que de alguna manera han compartido conmigo todo este tiempo, mil gracias!!.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este trabajo de grado es, por sugerencia del Dr. Nelson Merentes, estudiar algunas ecuaciones integrales no lineales con soluciones en el espacio de las funciones de variación acotada en sentido de Jordan. Las funciones de variación acotada aparecen con frecuencia como soluciones de muchas ecuaciones integrales no linales, las cuales describen fenómenos físicos concretos. Las ecuaciones integrales forman una parte importante y significante en el análisis matemático y sus aplicaciones a problemas del mundo real (Ver [1],[5],[6],[14],[15],[22],[32]). La idea de plantearnos el objetivo de esta tesis de grado la motivó la lectura del artículo de Dariusz Bugajeswski [11], en el que se demuestan teoremas de existencia y unicidad para soluciones de variación acotada continuas de las ecuaciones integrales de Hammerstein y Volterra-Hammerstein. La ecuación integral de Hammerstein aparece en los fenómenos físicos no lineales, tales como la dinámica de fluidos electro-magnéticos, en la reformulación de problemas de contorno con condición de contorno no lineales del tipo Hammerstein ([22],[28]).

En 1881, el matemático frances Camille Jordan (ver [23]) introduce la noción de función de variación acotada en un intervalo acotado $[a, b]$, demostrando que toda función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene variación acotada en $[a, b]$ si y sólo si, u es la diferencia de funciones monótonas, obteniendo el resultado de Dirichlet (ver [18]), para estas funciones. Es decir, que toda función de variación acotada en $[-\pi, \pi]$, tiene serie de Fourier convergente en todo punto de $[-\pi, \pi]$. Este resultado es conocido como el criterio de Dirichlet-Jordan sobre la convergencia de la serie de Fourier. La noción de variación acotada ha sido objeto de muchas generalizaciones por varios matemáticos en los últimos tiempos (Ver [30]).

En términos generales, una ecuación integral es aquella en donde la incógnita es una función que se encuentra en la parte integral de dicha ecuación. Algunos ejemplos son:

$$\int_0^1 K(x,y)\phi(y)\, dy = f(x) \tag{0.1}$$

y

$$\phi(x) + \int_0^1 K(x,y)\phi(y)dy = f(x). \tag{0.2}$$

En estas ecuaciones la función ϕ es la incógnita y a la función K se le denomina el núcleo, donde f es una función dada. A las ecuaciones (0.1) y (0.2) se les denominada ecuación integral de Fredholm de primera y segunda especie, respectivamente. Estas ecuaciones reciben su nombre en honor a el matemático sueco Erik Ivar Fredholm (1866-1927), quien hizo un estudio sistemático de este tipo de ecuaciones (ver [33]). Este tipo de ecuaciones encuentran aplicaciones en la electroestática y la teoría de potencial (ver [33]).

En el año 1673 el físico y matemático Cristian Huygens (ver [26]), publicó en su Tratado sobre la Teoría de Relojes de Péndulo, el siguiente descubrimiento: “El tiempo que tarda una partícula de masa m en deslizarse sobre un arco de cicloide entre dos puntos distintos, es independiente del punto en que inicie su movimiento”. Este descubrimiento se le conoce como la Propiedad Tautócrona de la cicloide o problema tautócrono. Los estudios de Huygens acerca de la construcción y propiedad de las curva cicloide, tractriz, logarítmica, etc., pronto fueron conocidos por los matemáticos de fines del siglo XVII, propiciando que algunos resultados se profundizaran o generalizaran, tal es el caso de Johann Bernoulli (ver [25]), quien planteó en 1696 un problema más general que la propiedad tautócrona, conocido como el problema de la Braquistócrona que esencialmente dice: *“Entre todas las curvas suaves en un plano vertical que unen dos puntos distintos A y B, construir aquella, a lo largo de la cual una partícula de masa m, que se desliza sin fricción, y bajo la acción de la gravedad, tarda el menor tiempo”.*

Huygens, Leibniz, Newton, Johann y Jacob Bernoulli entre otros, resolvieron de distinta formas el problema de la braquistócrona y en particular, el problema tautócrono, utilizando ingeniosos métodos heurísticos, mecánicos y geométricos. Esas soluciones generaron discusiones, polémicas, controversias y hasta desafíos entre éllos, propiciando notablemente el desarrollo de los métodos infinitesimales (ver [25], [33]). El trabajo de estos científicos, particularmente los de Johann Bernoulli, son señalados como el antecedente de una de las más importantes ramas de las matemáticas: el Cálculo Variacional.

Pasaron más de cien años y el problema tautócrono volvió a ser noticia científica, su solución, lograda por el matemático escandinavo Niels Henrik Abel (1802-1829), como una aplicación a las ecuaciones diferenciales e integrales y formó parte de sus primeros trabajos de investigación que publicó en 1823 (ver [25], [33]). Dicha solución es señalada como la primera aplicación que abrió la puerta al formidable desarrollo de las Ecuaciones Integrales.

Abel fue quien planteó el problema más general, que consiste en hallar una curva plana de tal forma que el tiempo de descenso desde una altura conocida, coincide con el valor $f(y)$ de una función dada. Usando el principio de conservación de la energía, Abel obtuvo la ecuación integral.

$$f(y) = \int_0^y \frac{\phi(y)}{\sqrt{y-\eta}}\, d\eta, \quad y > 0. \tag{0.3}$$

Un tipo importante de ecuación integral es la conocida como ecuación de Volterra, la cual fue presentada por el matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) a finales del siglo XIX. Estas ecuaciones integrales estan divididas en dos grupos (de primer y segundo tipo). Una ecuación de Volterra lineal de primer tipo es de la forma:

$$f(t) = \int_a^t K(t,s)x(s)\, ds, \tag{0.4}$$

y una ecuación de Volterra lineal de segundo tipo es de la forma:

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)x(s)\,ds. \tag{0.5}$$

En esta tesis consideraremos dos tipos de ecuaciones integrales no lineales: La ecuación integral no lineal de Hammerstein

$$x(t) = g(t) + \lambda \int_I K(t,s)f(x(s))ds \quad \text{para } t \in I,\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{0.6}$$

y la ecuación integral no lineal Volterra-Hammerstein

$$x(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s)f(x(s))ds \quad \text{para cada } t \in I, \tag{0.7}$$

La ecuación integral de Hammerstein [21] aparece en los fenómenos físicos no lineales, tales como la dinámica de fluidos electro-magnéticos, en la reformulación de problemas de contorno con condición de contorno no lineal que se reducen a ecuaciones integrales no lineales del tipo Hammerstein.

Esta tesis está dividida en tres capítulos, los cuales se han subdividido en diferentes secciones.

El Capítulo 1 es de carácter preliminar y en él recogemos toda la información que hemos estimado necesaria conocer para una lectura de la tesis que permita su comprensión y la valoración de los resultados aportados. Se da una breve introducción del origen de las ecuaciones integrales, incluyendo el concepto de ecuación integral (Ver [26]), algunos tipos de ecuaciones integrales [20] y la clasificación de cada una de ellas, dentro de las cuales se encuentran la ecuación integral lineal de Volterra de primer tipo y segundo tipo, y la ecuación integral no lineal de Hammerstein [21], además de referirnos a algunos problemas que motivaron el estudio de este tipo de ecuaciones, tales como el problema de Tautócrona y la ecuación de Abel (ver [25] y [33]), así como el problema de Cauchy [31].

En el Capítulo 2 exponemos la noción de función de variación acotada en un intervalo $[a, b]$, y varios resultados que caracterizan tales funciones, entre ellos el Teorema de Representación de Jordan y un resultado de Federer del año 1969 (ver [19]) que involucra la composición de una función Lipschitz (exterior) con una monótona (interior). El resultado de Federer nos motiva a exponer en la sección (1.3) la actuación en el caso autónomo del Operador de Composición en el espacio $BV[a, b]$ de variación acotada y desarrollamos explícitamente el teorema de Josephy del año 1981 (ver [24]) que establece condiciones necesarias y suficientes en $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de tal manera que el operador de composición F, asociado a f, actúe en $BV[a, b]$. Las soluciones de muchas de las ecuaciones integrales que describen fenómenos físicos son con frecuencia funciones de variación acotada.

En el Capítulo 3 se expone el resultado principal de este Trabajo de Grado que es el formular condiciones que garanticen existencia y unicidad de las ecuaciones integrales no lineales (0.6) y (0.7), estudiar las soluciones de las ecuaciones integrales no lineales (0.6) y (0.7) en espacio de funciones de Variación Acotada.

Para concluir esta introducción de este trabajo, consideramos necesario decir que esta tesis es de carácter expositorio. Para su realización estudiamos varios artículos de investigación escritos entre los años 1998 y el 2000, algunos de estos artículos escritos por: D. Bugajewska, D. Bugajewski, G. Lewicki, D. O´Regan, se pueden ver en ([9]- [12], [32]).

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES INTEGRALES

En este primer capítulo se narra una historia muy breve de las ecuaciones integrales, en el mismo se incluyen el concepto de ecuación integral, algunas ecuaciones integrales lineales y no lineales. También exponemos algunos ejemplo emblemáticos.

1.1 Ecuaciones Integrales

El término de Ecuación Integral fue utilizado por primera vez por Paul du Bois-Reymond en 1888 (Ver [26]). En términos generales, una ecuación integral es aquella donde, por supuesto aparece una integral, la incógnita es una función que se encuentra en la parte integral de dicha ecuación. Ejemplos típicos son:

$$\int_0^1 K(x,y)\phi(y)\,dy = f(x) \tag{1.1}$$

y

$$\phi(x) + \int_0^1 K(x,y)\phi(y)dy = f(x). \tag{1.2}$$

En estas ecuaciones la función f y K son conocidas y ϕ es la incógnita. La función K se le denomina el núcleo. A las ecuaciones (1.1) y (1.2) se les denomina ecuación integral de Fredholm de primera y segunda especie, respectivamente. Estas ecuaciones reciben su nombre en honor a el matemático sueco Erik Ivar Fredholm (1866-1927), quien hizo un estudio sistemático de este tipo de ecuaciones. La aplicación de este tipo de ecuación integral se puede encontrar en problemas de la electroestática y la teoría de potencial.

1.2 Algunos Ejemplos Emblemáticos

1.2.1 El Problema de la Tautócrona y la ecuación de Abel

Entre las primeras ecuaciones integrales en la historia de las matemáticas se encuentra la denominada **ecuación integral de Abel**, la cual se origina del problema de la tautócrona [25] y [33]. Este problema consiste en hallar una curva plana para la cual el tiempo utilizado por un objeto que se desliza sin fricción, bajo el efecto de la gravedad, desde su punto más alto hasta el más bajo, es independiente de su punto de partida. Aunque este problema fue resuelto por Huygens (ver [26]) en 1659, fue Abel en 1823 [25] y [33], quien planteó el problema más general, que consiste en hallar una curva plana de tal forma que el tiempo de descenso desde una altura conocida, coincide con el valor $f(y)$ de una función dada.

De manera más precisa: una partícula puntual se mueve bajo la acción de la fuerza de la gravedad y describe una curva suave en un plano vertical. Se pide determinar esta curva de modo que la partícula puntual que comienza su movimiento sin velocidad inicial en un punto de la curva cuya ordenada es x, luego alcance el eje ξ al cabo de un tiempo $t = f_1(x),$ donde $f_1(x)$ es una función dada.

La velocidad del punto en movimiento está dada por la ecuación:

$$v = \sqrt{2g(x-\eta)}\operatorname{sen}\beta$$

donde β es el ángulo de inclinación de la tangente respecto al eje ξ.

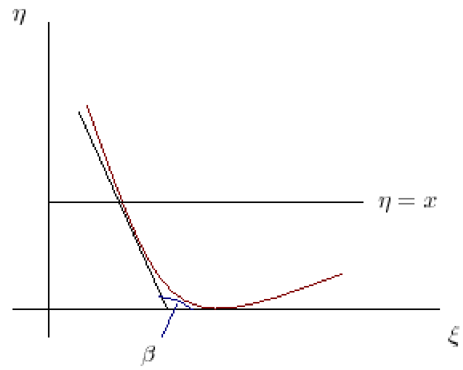

Figura 1.1: Curva de la Tautócrona.

Entonces tenemos

$$\frac{d\eta}{dt} = -\sqrt{2g(x-\eta)}\operatorname{sen}\beta.$$

Separando variable, resulta

$$-\sqrt{2g}dt = \frac{d\eta}{\sqrt{(x-\eta)}\operatorname{sen}\beta}.$$

Denotando por $\phi(\eta) = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}$ e integrando desde 0 hasta x se obtiene la ecuación de Abel

$$\int_0^x \frac{\phi(\eta)d\eta}{\sqrt{x-\eta}} = -\sqrt{2g}f_1(x).$$

Designando por $f(x) \equiv -\sqrt{2g}f_1(x)$, se obtiene definitivamente,

$$\int_0^x \frac{\phi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}}d\eta = f(x)$$

donde $\phi(x)$ es la función incógnita y $f(x)$ es una función dada. Hallando $\phi(\eta)$ se puede escribir la ecuación de la curva deseada. En efecto,

$$\phi(\eta) = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow \eta = \phi(\beta).$$

Se tiene que

$$d\xi = \frac{d\eta}{\tan\beta} = \frac{\Phi'(\beta)d\beta}{\tan\beta}$$

de donde

$$\xi = \int \frac{\Phi'(\beta)d\beta}{\tan\beta} = \Phi_1(\beta)$$

y por consiguiente, la curva buscada se determina por la ecuación paramétrica

$$\begin{cases} \xi = \Phi_1(\beta) \\ \eta = \Phi(\beta). \end{cases}$$

De este modo, el problema de Abel se reduce a la resolución de una ecuación integral del tipo (1.1), es decir

$$f(x) = \int_0^x K(x,t)\phi(t)\,dt.$$

1.2.2 El Problema de Cauchy

En ecuaciones diferenciales un problema de Cauchy (Ver[16])(también llamado problema de valor inicial o PVI) consiste en resolver una ecuación diferencial sujeta a unas ciertas condiciones iniciales sobre la solución cuando una de las variables que la definen (usualmente, la variable temporal), toma un determinado valor (usualmente, $t = 0$, para modelar las condiciones del sistema en el instante inicial). El problema de Cauchy, está referido al conjunto de datos iniciales que deben conocerse para determinar con unicidad la estructura de la solución de una ecuación diferencial ordinaria ó un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de cualquier orden que fueren. Para ecuaciones diferenciales lineales el problema de Cauchy está resuelto dado que se puede garantizar la existencia y unicidad de la solución si las funciones que definen el problema son diferenciables con continuidad.

Los problemas de Cauchy pueden formularse en términos de ecuaciones integrales equivalentes a las ecuaciones diferenciales. Esto puede tener ventajas suplementarias: las condiciones iniciales están automáticamente incorporadas a través de los límites de integración y para problemas lineales se maneja un operador integral acotado (de hecho, frecuentemente, un operador compacto), mientras que el operador diferencial del problema planteado en términos de ecuaciones diferenciales es en general no acotado. Esto último permite considerar varios resultados conocidos para operadores compactos para resolver un problema planteado en términos de ecuaciones integrales.

Una solución del **problema de Cauchy**

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u) \\ u'(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

es una función continuamente diferenciable $u : J \longrightarrow \Omega$, definida en un subintervalo J de (a,b) que contiene a t_0, que satisface

$$u'(t) = f(t,u(t)) \quad \text{para todo } t \in J \quad u(t_0) = x_0,$$

el punto (t_0, x_0) se llama la condición inicial del problema (1.3).

Se demuestra que el problema (1.3) es equivalente a una ecuación integral. Dada una función continua $f = (f_1, \cdots, f_n) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, denotamos por

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt, \cdots, \int_a^b f_n(t)\,dt \right) \in \mathbb{R}_n$$

al vector cuyas componentes son las integrales de las componentes de f.

Lema 1. *$u : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \longrightarrow \Omega$ es solución del problema de Cauchy (1.3) si y sólo si u es continua y satisface*

$$u(t) = \int_{t_0}^t f(s,u(s))\,ds + x_0 \quad \textit{para todo} \quad t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

Demostración:

Esta afirmación es consecuencia inmediata del teorema fundamental del Cálculo, aplicados a cada componente. En efecto, si $u = (u_1, \cdots, u_n)$ y $f = (f_1, \cdots, f_n)$, entonces u_i es continua y satisface

$$u_i(t) = \int_{t_0}^{t} f_i(s, u(s))\, ds + x_{0,i}$$

si y sólo si u_i es continuamente diferenciable y satisface

$$u_i'(t) = f_i(t, u(t)), \quad u_i(t_0) = x_{0,i}$$

para cada $i = 1, \cdots, n$.

1.2.3 Equilibrio de una cuerda cargada

Este ejemplo fue tomado de (Petrovskii, G [33]). Consideremos una cuerda, esto es, un hilo material de longitud l, que flexiona libremente, que ofrece una resistencia a la dilatación, proporcional a la magnitud de ésta; y manteniendo fijos los extremos de la cuerda en los puntos $x = 0$ y $x = l$.

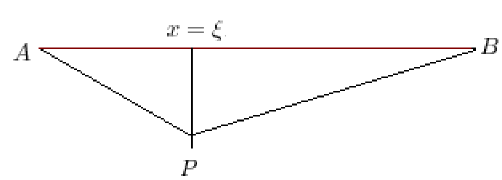

Figura 1.2: Equilibrio de una cuerda cargada.

Entonces en la posición de equilibrio, la cuerda coincide con el segmento $0 < x < l$ del eje x . Supongamos ahora, que en el punto $x = \xi$ se ha aplicado una fuerza vertical $P = P_\xi$. Bajo el efecto de esta fuerza la cuerda tomaría evidentemente la forma quebrada indicada en la figura 1.2. Busquemos la magnitud δ de la flecha de la cuerda (máxima elongación de resistencia de la cuerda) en el punto ξ de su posición de equilibrio bajo la acción de la fuerza P_ξ, aplicada en este punto. Si la magnitud de la fuerza P_ξ es pequeña en comparación con la tensión T_0 de la cuerda sin carga, podemos aceptar que la tensión de la cuerda cargada sigue siendo T_0. Entonces, de la condición de equilibrio de la cuerda encontramos la igualdad siguiente:

$$T_0\frac{\delta}{\xi} + T_0\frac{\delta}{l-\xi} = P_\xi \qquad \text{de donde,} \quad \delta = \frac{P_\xi(l-\xi)\xi}{T_0 l}.$$

Sea ahora $u(x)$ la flecha de la cuerda en el punto x bajo la acción de la fuerza P_ξ. Tenemos $u(x) = P_\xi G(x,\xi)$ donde

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{x(l-\xi)}{T_0 l} & 0 \le x \le \xi \\ \frac{(l-x)\xi}{T_0 l} & \xi \le x \le l. \end{cases}$$

En particular, de estas fórmulas se ve inmediatamente que $G(x,\xi) = G(\xi,x)$.

Supongamos ahora que sobre la cuerda actúa una fuerza distribuida continuamente a lo largo de la cuerda con densidad $P(\xi)$. Si esta fuerza es pequeña, la deformación otra vez dependerá linealmente de la fuerza, entre ξ y $\xi+\Delta\xi$ y es aproximadamente $P(\xi)\Delta(\xi)$ y la forma de la cuerda cargada de este modo, por el principio de superposición, sera descrita mediante la función

$$u(x) = \int_0^l G(x,\xi)P(\xi)\,d\xi. \tag{1.4}$$

Luego, si está dada la carga que actúa sobre la cuerda la fórmula (1.4) permite encontrar la forma que toma la cuerda bajo la acción de la carga.

Consideremos ahora el problema recíproco. Hallar la distribución de la carga P bajo la cual la cuerda toma la forma prefijada $u(x)$. Para encontrar la función P a partir de la función dada $u(x)$ obtenemos una ecuación que coincide, salvo notaciones, con la ecuación

$$\int_a^b K(x,t)\phi(t)\,dt + f(x) = 0$$

es decir, una ecuación de Fredholm de primera especie.

1.2.4 Oscilaciones libres y forzadas de una cuerda

Este ejemplo fue tomado de (Petrovskii, G [33]). Supongamos ahora que la cuerda no se encuentra en reposo y realiza ciertas oscilaciones. Sea $u(x,t)$ la posición en el momento t de aquel punto de la cuerda cuya abscisa es x y sea ρ la densidad lineal de la cuerda. Entonces, sobre un elemento de la cuerda de longitud dx actúa una fuerza de inercia igual a $-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\rho\, dx$, de donde

$$P(\xi) = -\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2}\rho.$$

Tomando (1.4) y sustituyendo $P(\xi)$ se recibe que

$$u(x,t) = -\int_0^l G(x,\xi)\rho\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2}\, d\xi. \tag{1.5}$$

Supongamos que la cuerda realiza oscilaciones armónicas de una frecuencia prefijada w y de una amplitud $u(x)$ que depende de x . En otras palabras, sea

$$u(x,t) = u(x)\operatorname{sen} wt.$$

Introduciendo esta expresión en (1.5) y dividiendo ambos miembros de la igualdad por $\operatorname{sen} wt$, obtenemos la siguente ecuación integral para u :

$$u(x) = \rho w^2 \int_0^l G(x,\xi)u(\xi)\, d\xi.$$

Si la cuerda no oscila libremente sino bajo la acción de la fuerza exterior, se realizan oscilaciones forzadas, se puede comprobar que la correspondiente ecuación de las oscilaciones armónicas de la cuerda es de la forma

$$u(x) = \rho w^2 \int_0^l G(x,\xi)u(\xi)\, d\xi + f(x),$$

es decir, se representa una ecuación no homogénea de Fredholm de segunda especie (Ver [25]).

1.3 Ecuaciones integrales de Volterra y Hammerstein

Un tipo importante de ecuación integral es la de Volterra, la cual fue presentada por el matemático italiano Vito Volterra (1860-1940)[35] y sus estudios de este tipo de ecuaciones publicadas a finales del siglo XIX. Estas ecuaciones integrales estan divididas en dos grupos de primer y segundo tipo. Una ecuación de Volterra lineal de primer tipo es:

$$f(t) = \int_a^t K(t,s)x(s)\,ds. \tag{1.6}$$

Una ecuación de Volterra lineal de segundo tipo es:

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)x(s)\,ds, \tag{1.7}$$

que satisfacen las siguientes condiciones:

- Cada coordenada de los puntos t y s toman valores desde a hasta cierto $t > 0$;
- $K(t,s) = 0$, si por lo menos una de las coordenadas del punto s es mayor que la correspondiente (es decir, la que tiene el mismo índice) del punto t.

Donde uno de los límites de integración de la integral es variable, las funciones $f(t)$ y $K(t,s)$ son funciones conocidas. $K(t,s)$ se conoce como el kernel o núcleo de la ecuación integral.

Las ecuaciones integrales de Volterra se encuentran en Demografía, el estudio de los materiales viscoelásticos, en problemas evolutivos en biología, propagación epidémica, la neurofisiología, la teoría de control, el estudio del comportamiento de reactores nucleares, en matemática de seguros a través de la ecuación de renovación, entre otros (Ver [5] y [20]). Observe que en las ecuaciones (1.6) y (1.7) el límite de integración superior es variable; en cambio en las ecuaciones integrales de Fredholm (1.1) y (1.2), dichos límites son constantes.

Muchos problemas que surgen de la física, ingeniería, biología, económia, la relación con el tráfico vehicular, la teoría del control óptimo, la computación moderna, entre otros., conduce a modelos matemáticos no lineales descritos por ecuaciones integrales. (Ver ([1], [14], [32]). Por ejemplo, la ecuación integral de Hammerstein [21] aparece en los fenómenos físicos no lineales, tales como la dinámica de fluidos electro-magnéticos, en la reformulación de problemas de contorno con condición de contorno no lineal que se reducen a ecuaciones integrales no lineales del tipo Hammerstein. La forma canónica de la ecuación de Hammerstein es:

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t)f(t,\phi(t))\,dt + \psi(x) \tag{1.8}$$

para todo $t \in I = [a,b]$, donde $K(x,t)$, $f(t,u)$ y $\psi(x)$ son funciones dadas; siendo $\phi(x)$ la función incógnita. Esta ecuación integral es del tipo Fredholm. Muchos métodos diferentes han sido usados para aproximar la solución de dichas ecuaciones integrales. En particular, nuestro trabajo consideramos las ecuaciones de Hammerstein

CAPÍTULO 2

EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA

En el presente capítulo se describe la noción de función de variación acotada en un intervalo $[a,b]$, introducida en el año 1881 por Camille Jordan (Ver [23]), así como también se presentan algunas de las propiedades de éstas funciones. Además se expone el espacio de las funciones Lipschitz y algunas propiedades y ejemplos del mismo.

2.1 Funciones de Variación Acotada

Definición 1 (Variación acotada). *Sean* $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función y* $\pi : a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ *una partición del intervalo* $[a,b]$*, definimos:*

$$V(u) = V(u; [a,b]) := \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})|,$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a,b]$*. Si* $V(u;[a,b]) < \infty$*, decimos que la función* u *tiene variación acotada o finita en el intervalo* $[a,b]$*. Denotamos a la clase de las funciones de variación acotada en el intervalo* $[a,b]$ *por* $BV[a,b]$*.*

A continuación se presentarán algunos ejemplos que ilustran la definición de $BV[a,b]$.

Ejemplo 1:

Consideremos $c \in \mathbb{R}$ y la función constante u, definida por

$$u(t) = c, \qquad \text{para todo } \ t \in [a, b].$$

Asi, dada $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$, tenemos que

$$\begin{aligned} V(u) = V(u; [a, b]) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |c - c| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $V(u; [a, b]) = 0$.

A continuación daremos un ejemplo de una función continua que no es de variación acotada.

Ejemplo 2:

Consideremos la función $u : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida mediante la siguiente expresión:

$$u(t) = \begin{cases} t\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{t}), & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$$

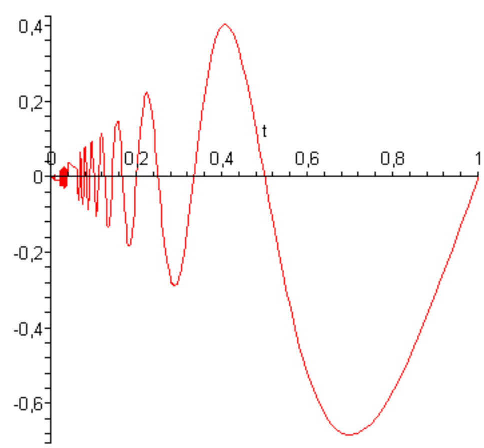

Figura 2.1: Función $u(t)$.

La función u es continua en $[0,1]$. Por otra parte, dada la partición

$$\pi = \left\{0, \frac{2}{2n+1}, \frac{2}{2n-1}, \cdots, \frac{2}{7}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, 1\right\}.$$

Por otra parte dada la partición del intervalo $[0,1]$. Se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| &= \left|u\left(\frac{2}{2n+1}\right) - u(0)\right| + \left|u\left(\frac{2}{2n-1}\right) - u\left(\frac{2}{2n+1}\right)\right| + \\
&\quad + \cdots + \left|u\left(\frac{2}{5}\right) - u\left(\frac{2}{7}\right)\right| + \left|u\left(\frac{2}{3}\right) - u\left(\frac{2}{5}\right)\right| + \left|u(1) - u\left(\frac{2}{3}\right)\right| \\
&= \frac{2}{2n+1} + \left(\frac{2}{2n-1} + \frac{2}{2n+1}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) \\
&= 2\left(\frac{2}{2n+1}\right) + 2\left(\frac{2}{2n-1}\right) + \cdots + 2\left(\frac{2}{5}\right) + 2\left(\frac{2}{7}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) \\
&= 4\left(\left(\frac{1}{2n+1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\right).
\end{aligned}$$

Luego como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ es divergente, la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1},$$

no está acotada y además $V(u,[0,1]) \geq S_n$. Considerando n suficientemente grande obtenemos que u no es de variación acotada.

Ahora exponemos otro ejemplo de una función que no es continua y no tiene variación acotada.

Ejemplo 3:

Consideremos $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad t \; es \; racional, \quad t \in [a,b] \\ 0 & \text{si} \quad t \; es \; irracional, \quad t \in [a,b]. \end{cases}$$

La función u es acotada y no es de variación acotada. En efecto, sean $n > 0 \in \mathbb{N}$ y $[a,b]$ un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$. Vamos a construir una partición $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_{n+2}\}$ de $[a,b]$ tal que $V(u,[a,b]) \geq \sum_{i=1}^{n+2} |u(t_i) - u(t_{i-1})| > n$, de la manera siguiente:

Definamos $t_0 = a$. Como entre dos cualesquiera números reales existe un número racional y uno irracional, escojamos t_1 como un número irracional entre a y b, t_2 como un número racional entre t_1 y b. Elegimos t_{2i} como un número racional entre t_{2i-1} y b y finalmente $t_{n+2} = b$.

Así hemos construido una partición que comienza con a, luego se alterna números racionales e irracionales hasta que finalmente termina b. De esta manera,

$$\begin{aligned} V(u;[a,b]) &\geq \sum_{i=1}^{n+2} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \\ &\geq \sum_{i=1}^{n+1} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \\ &= |u(t_2) - u(t_1)| + \cdots + |u(t_{n+1}) - u(t_n)| \\ &= |1-0| + |0-1| + \cdots + |1-0| \\ &= 1 + \cdots + 1 = n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $V(u;[a,b])$ es arbitrariamente grande, por lo tanto $V(u;[a,b]) = \infty$. Es decir u no es de variación acotada.

A continuación enunciaremos y probaremos alguna propiedades conocidas e importantes de la clase de funciones que tienen variación acotada en el intervalo $[a,b]$.

2.1.1 Propiedades de las Funciones de variación acotada

A continuación se enuncian y demuestran algunas propiedades de las funciones de variación acotada, las cuales serán de gran utilidad en el próximo capítulo.

Teorema 1 (Ver [8] o [7]). *Para $u \in BV[a,b]$ se cumple las siguientes propiedades:*

a) $V(u;[a,b]) \geq 0$.

b) $V(u;[a,b]) = 0$ *si y solo si,* $u = ctte$.

c) $V(u;[a,b]) = V(-u;[a,b])$.

d) $|u(a) - u(b)| \leq V(u;[a,b])$.

e) u *es acotada y* $||u||_\infty \leq |u(a)| + V(u;[a,b])$, *donde* $||u||_\infty = \sup(u(t))$, *con* $t \in [a,b]$.

f) $V(u+v;[a,b]) \leq V(u;[a,b]) + V(v;[a,b])$.

Demostración:

Propiedad a)

Dado que $|u(t_j) - u(t_{j-1})| \geq 0$ para cualquier $j = 0, 1, \cdots, n$ con $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$V(u,[a,b]) = \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \geq 0,$$

donde el supremo es considerado sobre todas las particiones $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$.

Propiedad b)

Supongamos que $V(u,[a,b]) = 0$ y consideremos $x, y \in [a,b]$, entonces

$$|u(x) - u(y)| \leq V(u,[a,b]) = 0.$$

Luego $u(x) = u(y)$, para todo $x, y \in [a,b]$. Por lo tanto u es constante en el intervalo $[a,b]$.

Si la función u es constante en el intervalo $[a,b]$, de la definición de $V(u,[a,b])$ resulta que $V(u,[a,b]) = 0$.

Propiedad c)

Consideremos $u \in BV[a,b]$. Entonces,

$$\begin{aligned} V(-u;[a,b]) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |(-u(t_j)) - (-u(t_{j-1}))| \\ &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |-u(t_j) + u(t_{j-1})| \\ &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &= V(u,[a,b]). \end{aligned}$$

Propiedad d)

Consideremos la partición $\pi_{a,b}$ definida por $\pi_{a,b} : a = t_0 \leq t_1 = b$ del intervalo $[a,b]$ y de la definición de variación, se tiene que

$$|u(b) - u(a)| \leq V(u;[a,b]).$$

Propiedad e)

Sea $t \in [a,b]$. Como la función u tiene variación acotada en el intervalo $[a,b]$, tenemos que:

$$|u(t) - u(a)| + |u(b) - u(t)| \leq V(u;[a,b]), \quad t \in [a,b].$$

Por lo tanto:

$$|u(t) - u(a)| \leq V(u;[a,b]), \quad t \in [a,b].$$

Es decir:

$$|u(t)| \leq |u(a)| + V(u;[a,b]), \quad t \in [a,b], \tag{2.1}$$

luego la función u es acotada en el intervalo $[a,b]$.

Observación: En lo que sigue, si una función $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada denotaremos por $||u||_\infty$ el supremo de $|u(t)|$ con $t \in [a,b]$. Usando esta notación la desigualdad (2.1) de la propiedad anterior, se transforma en

$$||u||_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |u(t)| \leq |u(a)| + V(u;[a,b]).$$

Propiedad f)

La variación es subaditiva, es decir,

$$V(u+v;[a,b]) \leq V(u;[a,b]) + V(v;[a,b]), \quad \forall u,v \in BV[a,b]$$

para $u,v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

En efecto, para $u,v \in BV[a,b]$ se considera

$$\begin{aligned}
V(u+v;[a,b]) &= \sup_\pi \sum_{j=1}^{n} |(u+v)(t_j) - (u+v)(t_{j-1})| \\
&= \sup_\pi \sum_{j=1}^{n} |(u(t_j) + v(t_j) - u(t_{j-1}) - v(t_{j-1})| \\
&= \sup_\pi \sum_{j=1}^{n} |(u(t_j) - u(t_{j-1})) + (v(t_j) - v(t_{j-1}))| \\
&\leq \sup_\pi \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| + \sup_\pi \sum_{j=1}^{n} |v(t_j) - v(t_{j-1})| \\
&= V(u,[a,b]) + V(v,[a,b]).
\end{aligned}$$

■

En lo que sigue mostraremos otra propiedad de las funciones de variación acotada:

Proposición 1. *Dada una función $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, monótona entonces:*

$$V(u;[a,b]) \;=\; |u(b) - u(a)|.$$

Demostración:

Dada $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = 0$ una partición del intervalo $[a,b]$, si la función es monótona creciente, entonces:

$$\begin{aligned}
V(u;[a,b]) &= \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\
&= \sum_{j=1}^{n} (u(t_j) - u(t_{j-1})) \\
&= u(b) - u(a).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$V(u) = u(b) - u(a) = |u(b) - u(a)|.$$

Ahora, si la función $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona decreciente, usando el mismo argumento anterior obtenemos que la variación es:

$$V(u) = u(a) - u(b) = |u(a) - u(b)| = |u(b) - u(a)|.$$

■

A continuación ilustraremos esta propiedad en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4:

Consideremos $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que

$$u(t) = t^n, \qquad t \in [a, b], \quad a \geq 0 \quad , n \in \mathbb{N},$$

donde t^n es una función monótona creciente para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Luego, en virtud de la Proposición anterior, tenemos que $V(u; [a, b]) = |b^n - a^n|$.

La siguiente proposición nos señala que para determinar si una función tiene variación acotada en un intervalo $[a, b]$, basta verificar que ella tiene variación acotada en una cantidad finita de subintervalos cuya reunión es $[a, b]$.

Proposición 2. *(Ver [7]) Sea u una función de variación acotada en $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$, entonces*

$$V(u, [a, b]) = V(u, [a, c]) + V(u, [c, b]).$$

Demostración:

Sea $u \in BV[a, b]$, si existe $c \in (a, b)$, tal que $u \in BV[a, c]$ y $u \in BV[c, b]$. Consideremos $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ una partición de $[a, b]$, entonces existe $j = 1, 2, \cdots, n$, tal que $t_{j-1} < x \leq t_j$. Luego:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \;&\leq\; \sum_{i=1}^{j-1} |u(t_i) - u(t_{i-1})| + |u(c) - u(t_{j-1})| + |u(t_j) - u(c)| \\ &+\; \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \leq V(u, [a, c]) + V(u, [c, b]).\end{aligned}$$

Aplicando supremo en el miembro izquierdo de la desigualdad anterior obtenemos:

$$V(u,[a,b]) \quad \leq \quad V(u,[a,c]) + V(u,[c,b]). \tag{2.2}$$

En consecuencia u tiene variación acotada en el intervalo $[a,b]$ y se verifica la desigualdad (2.2).

Demostraremos ahora que:

$$V(u,[a,b]) \geq V(u,[a,c]) + V(u,[c,b]).$$

Puesto que $V(u,[a,c]) < \infty$ y $V(u,[c,b]) < \infty$, entonces dado $\epsilon > 0$, existen particiones $\pi_1 : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = c$, y $\pi_2 : c = t_k < t_{k+1} < \cdots < t_n = b$ de los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$, respectivamente, tales que:

$$\begin{aligned} V(u,[a,c]) - \frac{\epsilon}{2} &< \sum_{i=1}^{k} |u(t_i) - u(t_{i-1})|, \\ V(u,[c,b]) - \frac{\epsilon}{2} &< \sum_{i=k+1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})|. \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro las desigualdades anteriores, resulta:

$$V(u,[a,c]) + V(u,[c,b]) - \epsilon < \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| < V(u,[a,b]).$$

Por lo tanto:

$V(u,[a,c]) + V(u,[c,b]) - \epsilon < V(u,[a,b])$ para todo $\epsilon > 0$ y así resulta que:

$$V(u,[a,c]) \quad + \quad V(u,[c,b]) \leq V(u,[a,b]). \tag{2.3}$$

De las desigualdades (2.2) y (2.3), obtenemos:

$$V(u,[a,b]) = V(u,[a,c]) + V(u,[c,b]).$$

■

A continuación demostramos que la clase de las funciones que tienen variación acotada posee estructura de espacio vectorial.

Proposición 3 (Ver [7]). *$BV[a,b]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración:

Sean $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de variación acotada en el intervalo $[a,b]$ y consideremos una partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$, entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |(u+v)(t_j) - (u+v)(t_{j-1})| &= \sum_{j=1}^{n} |(u(t_j) - u(t_{j-1})) + (v(t_j) - v(t_{j-1}))| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| + \sum_{j=1}^{n} |v(t_j) - v(t_{j-1})| \\
&\leq V(u) + V(v).
\end{aligned}$$

Considerando el supremo en ambos miembros de la desigualdad anterior resulta que:

$$V(u+v;[a,b]) \leq V(u;[a,b]) + V(v;[a,b]).$$

Por lo tanto, la función $u + v$ tiene variación acotada en el intervalo $[a,b]$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |(\lambda u)(t_j) - (\lambda u)(t_{j-1})| &= \sum_{j=1}^{n} |\lambda\,(u(t_j) - u(t_{j-1}))| \\
&= |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})|.
\end{aligned}$$

Considerando el supremo en ambos miembros de la igualdad anterior, resulta que:

$$V(\lambda u;[a,b]) = |\lambda| V(u;[a,b]).$$

Por lo tanto, la función λu tiene variación acotada en el intervalo $[a,b]$.

■

De lo anterior demostramos que el conjunto de funciones que tienen variación acotada en el intervalo $[a,b]$ es un espacio vectorial. Además el mismo posee una estructura de álgebra y de espacio normado con la norma:

$$||u||_{BV} = |u(a)| + V(u), \qquad u \in BV[a,b].$$

Más aún, el espacio $BV[a,b]$ es un espacio de Banach.

En el siguiente teorema demostraremos que la función $||.||_{BV}$ es una norma sobre el espacio de las funciones de variación acotada. Más aún este espacio normado es un espacio de Banach.

Teorema 2 (Ver [7]). *El espacio* $(BV[a,b], ||.||_{BV})$ *es un espacio de Banach.*

Demostración:

En primer lugar veamos que $(BV[a,b], ||.||_{BV})$ es un espacio normado. Sean $u, v \in BV[a,b]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

i) De la definición de $||.||_{BV}$ se tiene que $||u||_{BV} \geq 0$.

ii) Supongamos que $||u||_{BV} = 0$, entonces

$$|u(a)| + V(u, [a,b]) = 0,$$

lo cual es equivalente a $|u(a)| = 0$, $V(u, [a,b]) = 0$. Usando la propiedad b), resulta que la función u es constante en el intervalo $[a,b]$ y como $u(a) = 0$ se tiene que $u = 0$. Si $u \equiv 0$, en el intervalo $[a,b]$, entonces es claro que $||u||_{BV} = 0$.

iii) De la definición de $||.||_{BV}$ y la Proposición 2, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|\lambda u\|_{BV} &= |\lambda u(a)| + V(\lambda u; [a,b]) \\
&= |\lambda|\,|u(a)| + |\lambda| V(u; [a,b]) \\
&= |\lambda|\,(|u(a)| + V(u; [a,b])) \\
&= |\lambda|\,\|u\|_{BV}.
\end{aligned}$$

iv) De las propiedades de la función $|\cdot|$ y la Proposición 2, resulta que:

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{BV} &= |u(a) + v(a)| + V(u+v; [a,b]) \\
&\leq |u(a)| + V(u; [a,b]) + |v(a)| + V(v; [a,b]) \\
&= |\lambda|\,(|u(a)| + V(u; [a,b])) \\
&= \|u\|_{BV} + \|v\|_{BV}.
\end{aligned}$$

De i), ii), iii) y iv) se tiene que $(BV[a,b], ||.||_{BV})$ es un espacio normado. Demostraremos ahora que el espacio $(BV[a,b], ||.||_{BV})$ es completo.

Sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(BV[a,b], ||.||_{BV})$ y demostraremos que la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge en la norma $||.||_{BV}$ a una función $u \in BV[a,b]$.

En primer lugar veamos que:

$$\sup_n V(u_n; [a,b]) < \infty. \tag{2.4}$$

Sea $\epsilon > 0$, como $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $(BV[a,b], ||.||_{BV})$ existe $N > 0$, tal que si $n, m \geq N$ entonces $||u_n - u_m||_{BV} < \epsilon$, luego:

$$|u_n(a) - u_m(a)| + V(u_n - u_m; [a,b]) < \epsilon, \quad n, m \geq N.$$

En particular tenemos que:

$$V(u_n - u_N; [a,b]) < \epsilon, \quad n \geq N.$$

Por lo tanto, para toda partición $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$ resulta que:

$$\sum_{k=1}^{h} |(u_n - u_m)(t_k) - (u_n - u_N)(t_{k-1})| < \epsilon, \quad n \geq N,$$

$$\sum_{k=1}^{h} |u_n(t_k) - u_m(t_{k-1}) - (u_n(t_k) - u_N(t_{k-1}))| < \epsilon, \quad n \geq N.$$

Entonces:

$$\sum_{k=1}^{h} |u_n(t_k) - u_m(t_{k-1})| - \sum_{k=1}^{h} |u_N(t_k) - u_N(t_{k-1})| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{h} |u_n(t_k) - u_m(t_{k-1}) - (u_N(t_k) - u_N(t_{k-1}))| < \epsilon.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{h} |u_n(t_k) - u_m(t_{k-1})| &< \epsilon + \sum_{k=1}^{h} (u_N(t_k) - u_N(t_{k-1}))|, \quad n \geq N \\
&\leq \epsilon + V(u_N; [a,b]), \quad n \geq N.
\end{aligned}$$

Aplicando supremo en el miembro izquierdo de la desigualdad anterior resulta que:

$$V(u_n; [a,b]) \ \leq \epsilon + V(u_N; [a,b]) \quad n \geq N,$$

entonces:

$$V(u_n; [a,b]) \ \leq \text{máx}\{V(u_1), \cdots, V(u_N)\}, \quad n \geq 1.$$

En consecuencia $\sup_n V(u_n; [a,b]) \ < \infty$. Demostremos ahora que la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$, es una sucesión de Cauchy uniformemente en el intervalo $[a,b]$.

Como la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$, es una sucesión de Cauchy en $(BV[a,b], ||.||_{BV})$ tenemos que para todo $\epsilon > 0$, existe $N > 0$, tal que si $n, m \geq N$, entonces:

$$\|u_n - u_m\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Es decir,

$$|u_n(a) - u_m(a)| + V(u_n - u_m; [a,b]) < \frac{\epsilon}{2} \quad n, m \geq N.$$

Por lo tanto:

$$|u_n(a) - u_m(a)| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad V(u_n - u_m; [a,b]) < \frac{\epsilon}{2} \quad n, m \geq N.$$

Como $V(u_n - u_m; [a,b]) < \frac{\epsilon}{2} \quad n, m \geq N$, es decir:

$$\sum_{k=1}^{h} |(u_n - u_m)(t_k) - (u_n - u_m)(t_{k-1})| < \frac{\epsilon}{2} \quad n, m \geq N,$$

para toda partición $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$. En particular resulta que:

$$|u_n(t) - u_m(t) - (u_n(a) - u_m(a))| < \frac{\epsilon}{2}, \quad t \in [a,b], \quad n, m \geq N,$$

Por lo tanto se tiene que:

$$|u_n(t) - u_m(t)| < \frac{\epsilon}{2} + |(u_n(a) - u_m(a))|, \quad t \in [a,b], \quad n, m \geq N.$$

Como $|u_n(a) - u_m(a)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n, m \geq N$, resulta que:

$$|u_n(t) - u_m(t)| < \epsilon, \quad t \in [a,b], \quad n, m \geq N.$$

De esta última desigualdad deducimos que la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy en el intervalo $[a, b]$.

Puesto que para cada $t \in [a, b]$, $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy de números reales, existe una función $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t).$$

Demostremos ahora que la función $u \in BV[a, b]$. Sea $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$ y tomemos $\epsilon = \frac{1}{2}h$.

Como la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente en el intervalo $[a, b]$ a la función u, existe $N > 0$ tal que:

$$|u_n(t) - u(t)| < \frac{1}{2}h, \quad t \in [a, b],\ n \geq N. \tag{2.5}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{h} |u(t_k) - u(t_{k-1})| &\leq \sum_{k=1}^{h} |(ut_k) - u_n(t_k))| \\ &+ \sum_{k=1}^{h} |u_n(t_k) - u_n(t_{k-1})| + |u_n(t_{k-1}) - u(t_{k-1})|, \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

Considerando $n \geq N$ y usando la desigualdad (2.5), resulta que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{h} |u(t_k) - u(t_{k-1})| &\leq 1 + \sum_{k=1}^{h} |u_n(t_k) - u_n(t_{k-1})| \\ &\leq 1 + V(u_n; [a, b]) \\ &\leq 1 + \sup_n V(u_n; [a, b]).\end{aligned}$$

Aplicando el supremo en el miembro izquierdo de la desigualdad anterior, sobre el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$, resulta que:

$$V(u; [a, b]) \leq 1 + \sup_n V(u_n; [a, b]).$$

Por lo tanto $u \in BV[a, b]$.

Demostremos que la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge a la función u en la norma $||.||_{BV}$. Sea $\epsilon > 0$, debemos demostrar que existe $N > 0$, tal que si $n \geq N$ entonces $\|u_n - u\| < \epsilon$. Puesto que $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $(BV[a,b], \|\cdot\|)$ existe N tal que si $n, m \geq N$, entonces:

$$\|u_n - u_m\| < \epsilon.$$

Sea $n, m \geq N$, entonces

$$\|u_n - u\| = \|u_n - \lim_{m\to\infty} u_m\| = \lim_{m\to\infty} \|u_n - u_m\| < \epsilon.$$

En conclusion, la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge a la función u en la norma $||.||_{BV}$.

■

En este espacio de funciones, L. Maligranda y W. Orlicz [29], establecen un resultado referente a la estructura de álgebra de Banach de este espacio respecto a ciertas normas equivalentes a la norma $||\cdot||_{BV}$. Sin embargo, debemos agregar que P. S. Bullen [13] demostraron que el espacio $BV^*[a,b]$ de las funciones $u \in BV[a,b]$ que se anulan en a, es un álgebra de Banach con la norma $||\cdot||_{BV}$ como se muestra en los siguientes teoremas

Teorema 3 (Ver [7])**.** *El espacio $(BV^*[a,b], ||\cdot||_{BV})$ es un espacio de Banach.*

Demostración:

Sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(BV^*[a,b], ||\cdot||_{BV}), (u_n(a) = 0, \quad n \geq 1)$. Como $BV^*[a,b] \subset BV[a,b]$, entonces $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $BV[a,b]$, por lo tanto existe una función $u \in BV[a,b]$, tal que $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge a u en la norma $||\cdot||_{BV}$. Para verificar que $u \in BV^*[a,b]$, se debe demostrar que $u(a) = 0$.

En efecto; como $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge a la función u en la norma $||\cdot||_{BV}$, se tiene que para todo $\epsilon > 0$, existe $N > 0$, tal que si $n \geq N$, entonces,

$$||u_n - u|| < \epsilon, \;\; n \geq N.$$

Lo cual es equivalente a

$$|u_n(a) - u(a)| + V(u_n - u; [a,b]) < \epsilon, \;\; n \geq N.$$

Puesto que $u_n(a) = 0, \;\; n \geq 1$, se tiene que $u(a) = 0$. De este resultado y del Teorema 2 se concluye que $(BV^*[a,b], ||\cdot||_{BV})$ es un espacio de Banach.

$\blacksquare$

Teorema 4. *(Ver [13], [7]) $(BV^*[a,b], ||\cdot||_{BV})$ es un álgebra de Banach.*

Demostración:

Sean $u, v \in BV^*[a,b]$, entonces como $u(a) = v(a) = 0$, resulta que la descomposición canónica de las funciones u y v viene dada por

$$u(t) = p_u(t) - n_u(t) \;\text{ y }\; v(t) = p_v(t) - n_v(t), \;\; t \in [a,b],$$

donde

$$p_u(t) := \frac{1}{2}(V_u(t) + u(t) - u(a)), \quad n_u(t) := \frac{1}{2}(V_u(t) - u(t) + u(a)), \;\; t \in [a,b]$$

y

$$p_v(t) := \frac{1}{2}(V_v(t) + v(t) - v(a)), \quad n_v(t) := \frac{1}{2}(V_v(t) - v(t) + v(a)), \;\; t \in [a,b],$$

así se tiene que $p_u(a) = n_u(a) = p_v(a) = n_v(a) = 0$.

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} uv &= (p_u - n_u)(p_v - n_v) \\ &= p_u p_v - p_u n_v - n_u p_v + n_u n_v \\ &= (p_u p_v + n_u n_v) - (p_u n_v + p_v n_u). \end{aligned}$$

Demostraremos ahora que las funciones $(p_u p_v + n_u n_v)$ y $(p_u n_v + p_v n_u)$ son positivas y crecientes en el intervalo $[a,b]$. Como $p_u(a) = n_u(a) = p_v(a) = n_v(a) = 0$ y las funciones p_u, n_u, p_v, n_v son crecientes, entonces

$$p_u(t) \geq 0, \;\; n_u(t) \geq 0, \;\; p_v(t) \geq 0, \;\; n_v(t) \geq 0, \;\; \text{para todo } \; t \in [a,b].$$

En consecuencia las funciones $p_u p_v + n_u n_v$ y $p_u n_v + p_v n_u$ son positivas en el intervalo $[a,b]$. Además las funciones $p_u p_v + n_u n_v$ y $p_u n_v + p_v n_u$ son crecientes en el intervalo $[a,b]$.

En efecto, sean $x, y \in [a, b]$ tales que $a \leq x \leq y \leq b$, entonces como la función p_u es creciente, resulta que

$$p_u(x) \leq p_u(y), \quad x, y \in [a, b].$$

Como la función p_v es positiva y creciente se tiene que $p_v \geq 0$ y $p_v(x) \leq p_v(y)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} p_u(x)p_v &\leq p_u(y)p_v(x) \\ &\leq p_u(y)p_v(y). \end{aligned}$$

En consecuencia, la función $p_u p_v$ es creciente en el intervalo $[a, b]$.

De forma similar se demuestra que las funciones $n_u n_v,\ p_u n_v,\ p_v n_u$ son crecientes en el intervalo $[a, b]$. Luego resulta que las funciones $p_u p_v + n_u n_v$ y $p_u n_v + p_v n_u$ son positivas y crecientes en el intervalo $[a, b]$. En conclusión hemos demostrado que

$$uv = (p_u p_v n_u n_v) - (p_u n_v p_v n_u)$$

es una descomposición de la función uv como diferencia de funciones crecientes. Así

$$\begin{aligned} V(uv; [a, b]) &\leq [p_u(b)p_v(b) + n_u(b)n_v(b) + p_u(b)n_v(b) + p_v(b)n_u(b)] \\ &= (p_u(b) + n_u(b))(p_v(b) + n_v(b)) \\ &= v(u; [a, b])V(v; [a, b]). \end{aligned}$$

Por tanto, hemos demostrado que $(BV^*[a, b], ||\cdot||_{BV})$ es un álgebra de Banach, puesto que

$$\begin{aligned} ||uv|| &= v(uv; [a, b]) \\ &\leq V(u; [a, b])V(v; [a, b]) \\ &= ||u||||v||. \end{aligned}$$

■

El resultado más importante dado por Jordan cuando introduce el concepto de variación acotada en [23] se refiere a que una función $u \in BV[a, b]$ si y sólo si se puede escribir como diferencia de funciones monótonas, en particular de funciones crecientes. En la prueba exhibida por Jordan [23] las funciones monótonas consideradas son

$$u_1(\cdot) := V(u, [a, \cdot]), \quad u_2 := u_1 - u.$$

La relevancia de este resultado estriba en que un gran número de propiedades de las funciones monótonas se pueden transferir a las funciones que tienen variación acotada, como por ejemplo la existencia de límites laterales, conjunto de discontinuidades numerable y las mismas son de salto, Riemann-integrabilidad y existencia de derivada c.s. en $[a, b]$.

A continuación presentamos uno de los teoremas de Representación para las funciones de variación acotada, dada por Jordan en el año 1881.

Teorema 5 (Teorema de Representación de Jordan [23])**.** *Una función $u \in BV[a, b]$ si y sólo si existen funciones u_1, u_2 monótonas en $[a, b]$ tales que $u = u_1 - u_2$.*

Demostración:

Si u_1, u_2 son monótonas, entonces por Ejemplo 2 se tiene que $u = u_1 - u_2 \in BV[a, b]$.

Por otra parte, supongamos que $u \in BV[a, b]$ y definamos las funciones $p_u, n_u : [a, b] \to \mathbb{R}$, por:

$$p_u(t) := \frac{1}{2}(V_u(t) + u(t) - u(a)), \quad t \in [a, b],$$
$$n_u(t) := \frac{1}{2}(V_u(t) - u(t) + u(a)), \quad t \in [a, b],$$

donde $V_u(t) := V(u; [a, t)), \quad t \in [a, b]$.

Sean $x, y \in [a, b],\ x \leq y$, entonces por el Teorema 1 parte d) y f) se tiene que

$$\begin{aligned} p_u(y) - p_u(x) &= \frac{1}{2}(V_u(y) - V_u(x) + u(y) - u(x)) \\ &= \frac{1}{2}(V(u; [x, y]) + u(y) - u(x)) \geq 0. \end{aligned}$$

Luego p_u es una función creciente y como $p_u(a) = 0$, resulta que $p_u \geq 0,\ t \in [a, b]$. De manera similar,

$$\begin{aligned} n_u(y) - n_u(x) &= \frac{1}{2}(V_u(y) - V_u(x) + u(x) - u(y)) \\ &= \frac{1}{2}(V(u; [x, y]) + u(x) - u(y)) \geq 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene que n_u es creciente y como $n_u(a) = 0$, tenemos que n_u es no negativa. Ahora de las definiciones de p_u y n_u resulta que

$$u = p_u - (n_u - u(a)).$$

Además

$$V_u(t) = p_u(t) + n_u(t).$$

■

A continuación exponemos la noción de función Lipschitz y veremos algunas propiedades de esta clase de funciones y su relación con las funciones de variación acotada.

2.2 Función Lipschitz

Definición 2. *Se dice que una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisface la condición Lipschitz (o es Lipschitz) en el intervalo $[a, b]$ si y sólo si existe una constante $L > 0$ tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in [a, b]. \tag{2.6}$$

La constante L se denomina constante de Lipschitzidad.

Denotaremos a la clase de las funciones Lipschitz en $[a, b]$ por $Lip[a, b]$.

A continuación daremos algunos ejemplos de funciones Lipschitz.

Ejemplo 1.

Consideremos $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

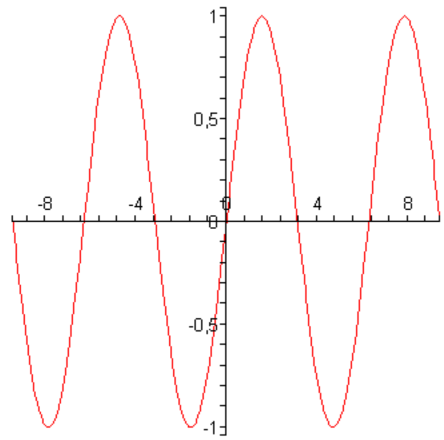

Figura 2.2: Función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

Veamos que cumple la condición de Lipschitz, es decir, f satisface una desigualdad del tipo $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ para alguna constante $L > 0$.

Consideremos $L = 1$. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $x < y$. Aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ se sigue que existe $c \in (x, y)$ tal que:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c).$$

Como $f'(c) = \cos(c)$ y $|\cos(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Entonces considerando el valor absoluto en ambos lados y sustituyendo

$$f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad f(y) = \operatorname{sen}(y)$$

tenemos que

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = |\cos(c)|.$$

Como $|\cos(c)| \leq 1$, entonces

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq 1$$

por lo tanto

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

ya que el valor absoluto no es negativo y por ello no afecta el sentido de la desigualdad. De donde $f(x) = \text{sen}(x)$ cumple la condición de Lipschitz.

Ejemplo 2.

Consideremos $f(x) = mx + b$. Veamos que f satisface una desigualdad del tipo

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{para alguna constante } L > 0.$$

Considerando que $f(x) - f(y) = (x - y)m$ donde m es continua, y aplicando la definición tenemos

$$\|f(x) - f(y)\| = \|(x - y)m\| \leq |m|\,\|x - y\| \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Luego considerando $L = |m|$ se tiene que $f(x)$ cumple la condición Lipschitz.

Definición 3. *Una función* $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es localmente Lipschitz, si dado cualquier número real* $r > 0$*, donde existe una constante* $L_r := L(r)$ *tal que si* $t, \tau \in [-r, r]$*, entonces* $\mid u(t) - u(\tau) \mid < L_r \mid t - \tau \mid$.

A continuación daremos un ejemplo de una función localmente Lipschitz.

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$

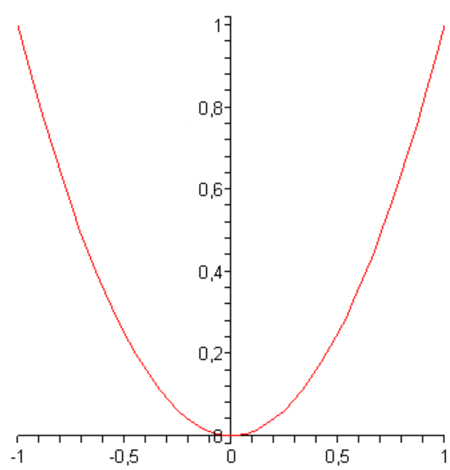

Figura 2.3: Función $f(x) = x^2$.

Veamos que f satiface la condición de localmente Lipschitz en el intervalo $[a, b]$.

Si, x_1, x_2 están en un intervalo $[a, b]$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x_1^2 - x_2^2| \\ &= |x_1 - x_2||x_1 + x_2| \\ &\leq 2|b|\,|x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Resulta que $|f(x) - f(y)| \leq 2|b|\,|x_1 - x_2|$ por lo tanto, $f(x) = x^2$ es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$.

Proposición 4. *Toda función globalmente Lipschitz es localmente Lipschitz.*

Demostración:

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donde existe una constante L tal que $|f(t) - f(\tau)| < L|t - \tau|$ para cada par de números reales t y τ. Si ahora tenemos un número real $r > 0$, y la constante $L := L(r)$ tal que $t, \tau \in [-r, r]$, entonces $|f(t) - f(\tau)| < L|t - \tau|$ de donde f es localmente Lipschitz.

■

Proposición 5. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 entonces f es localmente Lipschitz.*

Demostración:

Sean $x, y \in [a, b]$ tales que $a \leq x < y \leq b$, como la función u es continua en $[x, y]$ y diferenciable en (x, y), por el teorema del valor medio, existe $\xi \in (x, y)$, tal que:

$$|u(x) - u(y)| = |u'(\xi)||x - y|.$$

Puesto que u' es acotada en (a, b), existe un $M > 0$, tal que:

$$|u(x) - u(y)| \leq M|x - y|,$$

es decir, la función u es Lipschitz en el intervalo $[a, b]$.

■

Proposición 6. *Si* $u \in Lip[a,b]$ *entonces* u *es continua en* $[a,b]$*, es decir,* $Lip[a,b] \subset C[a,b]$.

Demostración:

Sea $L > 0$ tal que $|u(x) - u(y)| \leq L|x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{L} > 0$. Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $|x - y| < \delta$, entonces:

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y| < L\delta = \epsilon.$$

Luego u es uniformemente continua y por tanto es continua.

A continuación ilustraremos un ejemplo de una función continua y de variación acotada en un intervalo $[a,b]$, que no es Lipschitz.

Ejemplo

Sea $u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$u(t) = \sqrt{t}.$$

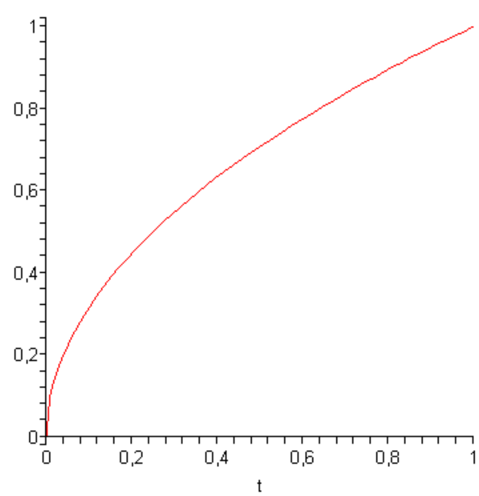

Figura 2.4: Función $u(t) = \sqrt{t}$.

La función u es continua en el intervalo $[0,1]$ y como u es creciente, tenemos que la función u tiene variación acotada en $[0,1]$.

Pero $u \notin Lip[0,1]$, ya que:

$$\left|\frac{u(t)-u(0)}{t-0}\right| = \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

por tanto no es acotada en ningún entorno de cero.

A continuación, presentamos la caracterización de funciones de variación acotada debida a H. Federer en 1969 [19], como composición de una función monótona con una función Lipschitz.

Proposición 7. *Una función u pertenece a $BV[a,b]$ si y sólo si, se puede representar como la composición $u = g \circ \tau$, donde $\tau : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ es creciente y $g \in Lip[c,d]$ con constante de Lipschitz $L \leq 1$.*

Demostración:

Supongamos que $u = g \circ \tau$, donde g y τ tienen las propiedades mencionadas. Dada cualquier partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ del intervalo $[a,b]$, obtenemos

$$V(u,\pi) = \sum_{j=1}^{m} |g(\tau(t_j)) - g(\tau(t_{j-1}))| \leq \sum_{j=1}^{m} |\tau(t_j) - \tau(t_{j-1})| = |\tau(b) - \tau(a)|,$$

por lo tanto, $u \in BV[a,b]$. Por el contrario, sean $u \in BV[a,b]$ y $\tau(t) := V_u(u;[a,b])$ la función de variación (creciente) de u. Además τ es una aplicación de $[a,b]$ en $[c,d]$, donde $c = 0$ y $d = V(u;[a,b])$, pero no es necesariamente sobreyectiva.

Si definimos la función g sobre el rango $\tau([a,b]) \subseteq [c,d]$ considerando $g(\tau(x)) := u(x)$, entonces la descomposición $u = g \circ \tau$ está bien definida. Dado que

$$|g(\tau(s)) - g(\tau(t))| = |u(s) - u(t)| \leq V(u;[s,t]) = |\tau(s) - \tau(t)|$$

para $a \leq s < t \leq b$, la función g es Lipschitz continua con constante Lipschitz igual a 1 sobre $\tau([a,b])$. Podemos extender g de $\tau([a,b])$ a una aplicación Lipschitz $\bar{g}$ sobre $[c,d]$

(incluso en toda la recta real $\mathbb{R}$) considerando

$$\bar{g}(y) := \begin{cases} (1-\lambda)g(x^-) + \lambda g(x) & \text{si} \quad y = (1-\lambda)\tau(x-) + \lambda\tau(x), \\ (1-\lambda)g(x) + \lambda g(x^+) & \text{si} \quad y = (1-\lambda)\tau(x) + \lambda\tau(x^+) \end{cases}$$

con $0 \leq \lambda \leq 1$). Por la construcción de $\bar{g}$, la forma convexa de $\bar{g}$ tiene la misma constante Lipschitz que g lo cual culmina la demostración.

■

2.2.1 El Operador de Composición en el espacio $BV[a,b]$

En esta sección se presenta el resultado dado por Michael Josephy [24], en el año 1981 referente a la actuación del operador de composición en el espacio $BV[a,b]$. Éste resultado nos permite obtener condiciones necesarias y suficientes en $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de tal manera que el operador de composición F, asociado a f, actúe en el espacio $BV[a,b]$.

Definición 4. *Consideremos $\mathcal{F}$ el espacio vectorial de las funciones $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera. El operador de composición F, asociado a la función f, es definido del espacio $\mathcal{F}$ al espacio $\mathcal{F}$ por la expresión*

$$F_u(t) := f(t, u(t)), \qquad t \in [a,b], \quad u \in \mathcal{F}.$$

En el caso particular, cuando la función f no dependa de una sola variable; es decir, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, el operador F asociado a f viene definido por:

$$F_u(t) := f(u(t)), \qquad t \in [a,b], \quad u \in \mathcal{F}.$$

Esto último se conoce como caso autónomo mientras que el caso general, cuando $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se denomina caso no-autónomo.

Lema 2. *(Invarianza) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. El operador de composición F, asociado a f, aplica el espacio $BV[a,b]$ si y sólo si, aplica el espacio $BV[c,d]$. Es decir, la actuación del operador F no depende del intervalo donde están definidas las funciones.*

Demostración:

Supongamos que el operador de composición definido por $F_u = f \circ u$ aplica el espacio $BV([a,b])$ en sí mismo. La función $l : [c,d] \to [a,b]$ definida por

$$l(t) := \frac{b-a}{d-c}(t-c) + a \ \ (c \leq t \leq d)$$

es un homeomorfismo estrictamente creciente entre $[c,d]$ y $[a,b]$ con inversa

$$l^{-1}(s) = \frac{d-c}{b-a}(s-a) + c \ \ (a \leq s \leq b)$$

el cual satisface que $l(c) = a$ y $l(d) = b$. Así $l : \pi([c,d]) \to \pi([a,b])$ con

$$l(\{t_0, t_1, ..., t_{m-1}, t_m\}) = \{l(t_0), l(t_1), ..., l(t_{m-1}), l(t_m)\}$$

define una correspondencia uno a uno entre todas las particiones de $[c,d]$ y todas las particiones de $[a,b]$.

Dada $v \in BV[a,b]$, la función $u := v \circ l^{-1}$ pertenece a $BV([a,b])$ y así $F_u = f \circ v \circ l^{-1}$ pertenece a $BV([a,b])$ por hipótesis. Sin embargo para $P \in \pi([c,d])$ y $l(P) \in \pi([a,b])$ como anteriormente tenemos que

$$\begin{aligned}
V(f \circ u, l(P); [a,b]) &= V(f \circ v \circ l^{-1}, P; [a,b]) \\
&= \sum_{j=1}^{m} |f(u(l(t_j))) - f(u(l(t_{j-1})))| \\
&= \sum_{j=1}^{m} |f(v(t_j)) - f(v(t_{j-1}))| \\
&= V(f \circ v, P; [c,d]).
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $V(f \circ v; [c,d]) = V(f \circ u; [a,b])$ y asi $||F_u||_{BV} = ||F_v||_{BV}$. Por lo tanto $f(u(a)) = f(v(l^{-1}(a))) = f(v(c))$.

■

Teorema 6. *(Josephy [24]) Consideremos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea F el operador de composición asociado a la función f. El operador F actúa en el espacio $BV[a,b]$ si y sólo si, f es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$. Además, el operador F es siempre acotado sobre conjuntos acotados de $BV[a,b]$.*

Demostración:

Por el Corolario 2 puede suponerse que el intervalo $[a, b]$ es el intervalo $[0, 1]$. Supongamos que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$ y veamos que el operador F actúa en $BV[0, 1]$. Consideremos $u \in BV[0, 1]$ y

$$\pi : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$$

una partición cualquiera del intervalo $[0, 1]$. Además, tenemos la siguiente estimación

$$\sum_{j=1}^{m} |f(u(t_j)) - f(u(t_{j-1}))| \leq \sum_{j=1}^{m} k(||u||_\infty)|u(t_j) - u(t_{j-1})|$$

donde $k(||u||_\infty)$ es la constante de Lipschitzidad de f en el intervalo $[-||u||_\infty, ||u||_\infty]$.

En consecuencia,

$$V(F_u, [0, 1]) \leq k(||u||_\infty)V(u; [0, 1]) < \infty,$$

y así hemos demostrado que F actúa en el espacio $BV[0, 1]$.

Supongamos, ahora que el operador F de composición, asociado a $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, actúa en el espacio $BV[0, 1]$, sin embargo, la función f no es Lipschitz local en $\mathbb{R}$, en este caso podemos suponer que f no es Lipschitz en el intervalo [0,1].

Como la función f no es Lipschitz en $[0, 1]$ tenemos que dada la sucesión $k_n := (n^2+n)$ existen sucesiones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el intervalo $[0, 1]$ tales que

$$|f(u_n) - f(v_n)| \geq (n^2 + n)|u_n - v_n|. \tag{2.7}$$

Como el operador F actúa en el espacio $BV[0, 1]$ y la función identidad $u(s) = s, \quad (s \in [0, 1])$ pertenece al espacio $BV[0, 1]$, se obtiene que $f \in BV[0, 1]$ y así f es acotada. Ahora, sin pérdida de generalidad podemos suponer en la demostración, que $|f(t)| \leq \frac{1}{2}, \quad t \in [0, 1]$.

En consecuencia, de la desigualdad (2.7), se deduce la siguiente estimación

$$1 \geq |f(u_n) - f(v_n)| \geq (n^2 + n)|u_n - v_n|.$$

De esta desigualdad deducimos, pasando a subsucesiones en el caso de ser necesario, lo siguiente:

i) Las sucesiones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ converga a un punto $u^* \in [0,1]$.

ii) $|u_n - u^*| < \dfrac{1}{(n+1)^2}$ para $n = 1, 2 \ldots$

Definamos la función $u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por medio de la expresión:

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t = 0, \\[2ex] u_n & \text{si} \quad t = \dfrac{1}{n+1} + k|u_n - v_n| \quad (k \in \mathbb{N}), \\[2ex] v_n & \text{si} \quad t \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right), \\[2ex] v_1 & \text{si} \quad t = 1. \end{cases}$$

Demostremos que $u \in BV[0,1]$, pero $F_u \notin BV[0,1]$.

Consideremos el número

$$m_n : \left[\frac{u_n - v_n}{n^2 + n}\right],$$

(donde [.] indica la parte entera de un número) y sea Π_n la partición del intervalo $\left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+1}\right]$ definida por:

$$\Pi_n : \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}|u_n - v_n| < \frac{1}{n+1} + |u_n - v_n| < \cdots <$$

$$\cdots < \frac{1}{n+1} + \frac{2m_n - 1}{2}|u_n - v_n| + \frac{1}{n+1} + m_n|u_n - v_n| < \frac{1}{n}.$$

La variación de la función u en el intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ se puede estimar de la manera siguiente:

$$V\left(u, \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) \leq 2m_n|u_n - v_n| + |u_{n1} - u*| + |u* - u_n| +$$

$$+|u_n - v_n| \leq \frac{2}{n^2+n} + \frac{1}{n_2}\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n_2+n} \leq \frac{3}{n^2}.$$

En consecuencia,

$$V(u, [0,1]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} < \infty.$$

Por otro lado, se obtiene la siguiente estimación de la variación de la función F_u

$$V\left(F_u; \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) \geq 2m_n|f(u_n) - f(v_n)| \geq 2m_n(n^2+n)|u_n - v_n| \geq 2.$$

En consecuencia,

$$V(Fu, [0,1]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2 < +\infty.$$

□

Para ver más detalles sobre el operador de composición remitimos al lector a [30].

CAPÍTULO 3

SOLUCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA DE ALGUNAS ECUACIONES INTEGRALES NO LINEALES

Las soluciones de muchas ecuaciones integrales tales como: Hammerstein y Volterra-Hammerstein que describen fenómenos físicos son con frecuencia funciones de variación acotada. Como se afirmó en la introducción, en este capítulo del Trabajo Especial de Grado, nos dedicaremos a resolver las ecuaciones integrales mencionadas anteriormente para tal fin se hará uso de las propiedades de las funciones de variación acotada, así como del Principio de Contracción de Banach.

Sean la ecuación integral no lineal de Hammerstein (Ver [21]) y la ecuación integral no lineal de Volterra-Hammerstein:

$$x(t) = g(t) + \lambda \int_I K(t,s) f(x(s)) ds \quad \text{para} \quad t \in I \quad y \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

$$x(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s) f(x(s))\, ds \quad \text{para cada} \quad t \in I. \tag{3.2}$$

respectivamente, donde $g(t)$, $K(t,s)$ y f son funciones dadas; la función $K(t,s)$ se conoce como el kernel o núcleo de la ecuación integral, mientras que $x(t)$ es la función incógnita.

A continuación se presentan algunas definiciones que serán de utilidad para las demostraciones posteriores.

Definición 5. *Sean $T : X \longrightarrow X$ una aplicación de un conjunto arbitrario no vacío en si mismo. Se dice que $x \in X$ es un punto fijo de la aplicación T si $Tx = x$.*

Definición 6. *Sea (X, d) un espacio métrico y $T : X \longrightarrow X$ una aplicación arbitraria. Se dice que T es una contracción si existe $M \in \mathbb{R}$, $0 < M < 1$ tal que para todo $x, y \in X$,*

$$d(Tx, Ty) \leq M d(x, y). \tag{3.3}$$

Observación

Geométricamente esto quiere decir que al aplicar T a dos puntos del espacio X se obtienen dos puntos que están más cerca entre si que los puntos originales y el factor de acercamiento es igual para todos los pares. Además una función de contracción es una función uniformemente continua.

Definición 7. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Decimos que $\{x_n\}$ es una sucesión contracción, si para algún $0 < \alpha < 1$, se tiene que*

$$d(x_{n+1}, x_n) < \alpha d(x_n, x_{n-1}),$$

para cualquier índice natural $n \geq 2$.

Proposición 8. *(Propiedad de las contracciones)*

Si $\{x_n\}$ es una sucesión contracción de constante α, se cumple las siguientes desigualdades:

(i) Comparando dos términos consecutivos con los dos primeros términos

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{n-1} d(x_2, x_1), \quad \forall\, n \geq 2.$$

(ii) Dos términos cualesquiera con los dos primeros términos

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1), \quad \textit{para cada} \quad m > n.$$

Demostración

(i) La relación es cierta para $n = 2$, se refiere a la condición de la contracción para $n = 2$. Es decir, se cumple,

$$d(x_3, x_2) \leq \alpha d(x_2, x_1).$$

Supongamos que la relación es cierta para $n > 2$. Demostraremos la validez de la relación para el sucesor $n + 1$, es decir debemos demostrar la validez de la relación,

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_2, x_1).$$

De la hipótesis contractiva y de la hipótesis inductiva para n se cumple

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = \alpha\, d(x_{n+1}, x_n) < \alpha^{n-1} d(x_2, x_1) = \alpha^n d(x_2, x_1).$$

(ii) Para $m > n$, se tiene

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + < d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

Luego, usando (i) se tiene

$$d(x_m, x_n) \leq (\alpha^{m-2} + \alpha^{m-3} + \cdots + \alpha^{n-1}) d(x_2, x_1),$$

sacando factor común α^{n-1} se tiene:

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha^{n-1}(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n-1}) d(x_2, x_1).$$

Luego, por serie telescópica se obtiene que

$$d(x_m, x_n) \leq \left(\frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \right) d(x_2, x_1),$$

donde $1-\alpha^{m-n}<1$. En efecto, sean $\alpha^n,\ \alpha^m>0$, puesto que $0<\alpha<1$. Entonces, $\alpha^n-\alpha^m<\alpha^n$ y por lo tanto

$$\frac{\alpha^n-\alpha^m}{\alpha^n}<1,$$

si y sólo si,

$$1-\frac{\alpha^m}{\alpha^n}<1,$$

si y sólo si,

$$1-\alpha^{m-n}<1.$$

Así,

$$d(x_m,x_n)\leq\left(\frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha}\right)d(x_2,x_1)\leq\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha}d(x_2,x_1).$$

■

La siguiente proposición relaciona una sucesión de contracción con la sucesión de Cauchy, para detalles de la demostración referimos al lector interesado a [3].

Proposición 9 (Ver [3]). *Toda sucesión que es contracción es una sucesión de Cauchy.*

Los llamados Teoremas de Punto fijos son aquellos que garantizan, bajo ciertas hipótesis, la existencia de algún punto fijo de una función. Hay varios de estos teoremas, y muy diferentes entre si, uno de ellos es el Principio de Contracción de Banach, cuyas aplicaciones son notables en la mayoría de los Teoremas de Existencia y Unicidad, tales como los de la función inversa y la función implícita, soluciones de ecuaciones diferenciales e integrales de diversas especies. A continuación enunciaremos y demostraremos ese principio.

Teorema 7. *(Principio de Contracción de Banach)*

Consideremos un espacio métrico (X,d). Supongamos que X es completo. Sea $T: X\longrightarrow X$ una contracción en X, entonces T tiene un punto fijo.

Demostración

Sea $M>0$, tal que

$$d(Tx,Ty)\leq Md(x,y).$$

Construiremos una sucesión $\{x_n\}$ y demostraremos que es de Cauchy y por lo tanto que es convergente en X por ser X completo y además veremos que el límite x es un punto fijo de T y es único. Esta es la idea de la prueba.

Sea $x_0 \in X$, calculemos la secuencia $x_1, x_2, \ldots$, de una relación de la forma:

$$x_{n+1} = Tx_n.$$

A partir de $x_0 \in X$ determinamos sucesivamente

$$x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1, \ldots$$

Tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión contracción. En efecto,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq Md(x_n, x_{n-1}).$$

Luego, por la Proposición 9, se obtiene que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, de donde existe $x \in X$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

A continuación se demostrara que x es un punto fijo de la aplicación T. En efecto,

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \qquad \text{para cualquier } m \\ &\leq d(x, x_m) + d(Tx_{m-1}, Tx) \\ &\leq d(x, x_m) + d(x_{m-1}, x) \end{aligned}$$

considerando el límite cuando $m \to \infty$, se concluye que

$$d(x, Tx) = 0,$$

por lo tanto, $Tx = x$. De esta manera queda demostrado que x es punto fijo de T.

Veamos que x es el único punto fijo de T.

Supongamos que existe $y \in X$, $x \neq y$ tal que $Ty = y$

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq Md(x, y), \quad \text{para } 0 < M < 1,$$

entonces,

$$d(x,y) - Md(x,y) \leq 0$$

$$(1-M)d(x,y) \leq 0,$$

de donde $d(x,y) = 0$, por lo tanto $x = y$ contradicción de suponer que $x \neq y$.

De esta manera queda demostrada la unicidad del punto fijo x.

■

El teorema anterior no sólo afirma la existencia de un único punto fijo. También nos dice cómo encontrarlo, o cómo encontrar una buena aproximación de él. Simplemente hay que aplicar iteradamente de la función T a partir de cualquier punto x_0. Los siguientes ejemplos muestran que las condiciones del teorema de punto fijo de Banach son necesarias.

Ejemplo 1. *La función* $T : (0,1) \longrightarrow (0,1)$ *dada por*

$$T(x) = \frac{1}{2}x,$$

es una contracción, en efecto, sean $x,\ y \in (0,1)$ *tales que*

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &= \left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right| \\ &= \frac{1}{2}|x-y|, \end{aligned}$$

es de resaltar, $Tx = x$, *si y sólo si,* $x = 0$ *y* $0 \notin (0,1)$, *por lo tanto,* T *no tiene ningún punto fijo en* $(0,1)$.

Ejemplo 2. *La función* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$T(t) = t + 1,$$

satisface

$$|T(t) - T(s)| = |t - s| \quad \textit{para todo} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Sin embargo, no tiene ningún punto fijo, dado que $T(t) > t$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, del teorema del valor intermedio se sigue que cualquier función continua $T : [a, b] \longrightarrow [a, b]$, sea o no contracción, tiene al menos un punto fijo. Pero éste puede no ser único y no se obtiene necesariamente por el método de aproximaciones sucesivas.

3.1 Ecuación Integral de Hammerstein

En esta sección desarrollamos la demostración del Teorema 3.1 del artículo de Bugajewska (Ver [11]). En lo que sigue I denotará un intervalo de la forma $I = [0, a]$.

Se considera la ecuación integral Hammerstein

$$x(t) = g(t) + \lambda \int_I K(t,s)f(x(s))ds \quad \text{para } t \in I,\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

donde $g(t)$, $K(t, s)$ y f son funciones dadas y $x(t)$ es la función incógnita.

Teorema 8. *Considere la ecuación (3.4), donde*

(i) $g : I \to \mathbb{R}$ *una función de variación acotada.*

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función localmente Lipschitz.*

(iii) $K : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$, *es una función tal que* $V(K(\cdot, s), I) \leq M(s)$, *con I=[0,a], casi siempre para* $s \in I$, *donde* $M : I \to \mathbb{R}_+$ *y* $K(t, \cdot)$ *son integrable Lebesgue para todo* $t \in I$.

Si existe $\rho > 0$ *tal que para cada* λ *satisfaciendo* $|\lambda| < \rho$, *la ecuación (3.4) tiene solución única a una función de variación acotada, en* I.

Demostración:

Fijemos un número real $r > 0$, tal que $\|g\|_{BV} < r$. En el espacio de Banach $BV[a, b]$, consideramos $\bar{B}_r := \{x \in BV(I) : \|x\|_{BV} \leq r\}$, y denotemos por L_r la constante de Lipschitz de f que corresponde al intervalo $[-r, r]$, es decir,

$$|f(t) - f(\tau)| \leq L_r|t - \tau|, \qquad t, \tau \in [-r, r].$$

Ahora elegimos un número $\rho > 0$ de tal forma que:

$$\|g\|_{BV} + \rho \left(\sup_{t\in[-r,r]} |f(t)| \right) \left[\int_I (M(s) + |\, K(0,s) \,|\,)\, ds \right] < r,$$

y simultáneamente cumple con:

$$\rho L_r \int_I (|\, K(0,s) \,| + M(s))\, ds < 1.$$

A continuación fijemos un número real λ tal que $|\lambda| < \rho$.

Definamos la función $G : \bar{B}_r \longrightarrow \mathcal{F}$; donde $\mathcal{F}$ es el conjunto de todas las funciones reales definidas sobre $I = [0,a]$, se tiene que:

$$G(x)(t) = g(t) + \lambda F(x)(t),$$

donde

$$F(x)(t) = \int_I K(t,s) f(x(s))\, ds, \quad x \in \bar{B}_r,\ t \in I.$$

Considerando $F : \bar{B}_r \longrightarrow \mathbb{R}$. Verifiquemos que la función G está bien definida. Para demostrar esto es suficiente con demostrar que:

$$F(x) : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R},$$

existe

$$F(x)(t) = \int_I K(t,s) f(x(s))\, ds.$$

En efecto, notemos que

$$(f \circ x) \in BV(I), \quad \text{para cada } x \in BV(I),$$

donde

$$(f \circ x)(t) : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$$

y

$$K(t,\cdot):[0,a]\longrightarrow\mathbb{R}.$$

Por hipótesis, $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es localmente Lipschitz, esto es

$$|f(x(t))-f(x(\tau))|\leq L_r|x(t)-x(\tau)|,\quad \text{para } t,\tau\in[0,a].$$

Luego, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|f(x(t_i))-f(x(t_{i-1}))| &\leq \sum_{i=1}^{n}L_r|x(t_i)-x(t_{i-1})|\\ &= L_r\sum_{i=1}^{n}|x(t_i)-x(t_{i-1})|\\ &\leq L_rV(x)\\ &= L_r\|x\|_{BV}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f\circ x)$ es de variación acotada y así por el Teorema 1 parte e.) se tiene que $(f\circ x)$ es acotada, entonces

$$\int(f\circ x)(t)dt<\infty,$$

de donde $(f\circ x)$ es integrable Lebesgue. Esto significa que $K(t,s)f(x(s))$ es una función medible. En vista de $K(t,s)f(x(s))$ está acotada y $K(t,\cdot)$ es medible según Lebesgue, se obtiene que la función

$$s\longmapsto K(t,s)f(x(s))$$

es Lebesgue integrable para cada t fijo que pertenece al intervalo $I=[0,a]$.

Para una partición π de la forma $\pi:0=t_0<\cdots<t_n=a$. A continuación comprobaremos que $G(\bar{B}_r)\subseteq\bar{B}_r$; es decir, para cada $x\in\bar{B}_r$, se cumple $G(x)\in\bar{B}_r$. Para

esto, notemos que:

$$\begin{aligned}
V(F(x),[0,a]) &= \sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}|F(x)(t_i)-F(x)(t_{i-1})| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}\left|\int_I K(t_i,s)f(x(s))\,ds-\int_I K(t_{i-1},s)f(x(s))\,ds\right| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}\left|\int_I [K(t_i,s)-K(t_{i-1},s)]f(x(s))\,ds\right| \\
&\leq \sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_I |K(t_i,s)-K(t_{i-1},s)|\,|f(x(s))|\;ds \\
&\leq \sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_I |K(t_i,s)-K(t_{i-1},s)|\sup_{s\in I}|f(x(s))|\;ds \\
&\leq \sup_{s\in I}|f(x(s))|\sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_I |K(t_i,s)-K(t_{i-1},s)|\,ds \\
&= \sup_{s\in I}|f(x(s))|\sup_{\pi}\int_I\sum_{i=1}^{n} |K(t_i,s)-K(t_{i-1},s)|\,ds \\
&\leq \sup_{s\in I}|f(x(s))|\int_I V(K(\cdot,s))\,ds \\
&\leq \sup_{s\in I}|f(x(s))|\int_I M(s)\,ds<\infty,
\end{aligned}$$

así, se ha demostrado que $V(F(x),[0,a])<\infty$, y además tenemos que:

$$V(F(x),[0,a])\leq \sup_{s\in I}|f(x(s))|\int_I M(s)\,ds$$

luego $G(x)\in BV(I)$.

Ahora observemos que:

$$\begin{aligned}
||G(x)||_{BV} &= \|g+\lambda F(x)\|_{BV} \\
&\leq ||g||_{BV}+||\lambda F(x)||_{BV} \\
&= ||g||_{BV}+|\lambda|||F(x)||_{BV} \\
&\leq ||g||_{BV}+\rho||F(x)||_{BV} \\
&= ||g||_{BV}+\rho(|F(x)(0)|+V(F(x),[0,a])),
\end{aligned}$$

por lo tanto, al sustituir $F(x)(0)$, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
||G(x)||_{BV} &= ||g||_{BV} + \rho\left(\left|\int_I K(0,s)f(x(s))\,ds\right| + V(F(x),[0,a])\right)\\
&\leq ||g||_{BV} + \rho\left(\int_I |K(0,s)||f(x(s))|\,ds + V(F(x),[0,a])\right)\\
&\leq ||g||_{BV} + \rho\left(\sup_{s\in I}|f(x(s))|\int_I |K(0,s)|\,ds + \sup_{s\in I}|f(x(s))|\int_I M(s)\,ds\right)\\
&= ||g||_{BV} + \rho\sup_{s\in I}|f(x(s))|\left(\int_I |K(0,s)|\,ds + \int_I M(s)\,ds\right)\\
&= ||g||_{BV} + \rho\sup_{s\in I}|f(x(s))|\int_I (|K(0,s)| + M(s))\,ds\\
&\leq r.
\end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que $G(\bar{B}_r) \subseteq \bar{B}_r$.

Ahora, comprobemos que $G_\lambda : \bar{B}_r \longrightarrow \bar{B}_r$ es una contracción. Para esto observemos que para cualquier par $x, y \in \bar{B}_r$, se obtiene lo siguiente, al hacer uso de las propiedades y las notaciones que involucran las funciones dadas:

$$\begin{aligned}
||G_\lambda(x) - G_\lambda(y)||_{BV} &= ||(g + \lambda F(x)) - (g + \lambda F(y))||_{BV}\\
&= |\lambda|\,\|F(x) - F(y)\|_{BV}\\
&= |\lambda|\,[|(F(x) - F(y))(0)| + V(F(x) - F(y),[0,a])]\\
&= |\lambda|[|(F(x)(0) - F(y)(0))| + V(F(x) - F(y),[0,a])]\\
&= |\lambda|\,\left[\left|\int_I K(0,s)f(x(s))ds - \int_I K(0,s)f(y(s))ds\right|\right.\\
&\quad \left. + V(F(x) - F(y),[0,a])\right]\\
&= |\lambda|\,\left[\left|\int_I K(0,s)[f(x(s)) - f(y(s))]ds\right| + V(F(x) - F(y),[0,a])\right]\\
&\leq |\lambda|\left[\int_I |K(0,s)||f(x(s)) - f(y(s))|\,ds + V(F(x) - F(y),[0,a])\right]\\
&\leq |\lambda|\left[\int_I |K(0,s)|L_r|(x(s)) - (y(s))|\,ds + V(F(x) - F(y),[0,a])\right]\\
&\leq |\lambda|\left[\int_I |K(0,s)|L_r\|x - y\|_{BV}\,ds + V(F(x) - F(y),[0,a])\right],
\end{aligned}$$

por lo tanto, $||G_\lambda(x) - G_\lambda(y)||_{BV}$ puede acotarse inferiormente por

$$\begin{aligned}
&= |\lambda| \left[L_r\|x-y\|_{BV} \int_I |K(0,s)|\, ds + \sup_\pi \sum_{i=1}^n |\,(F(x)-F(y))(t_i) - (F(x)-F(y))(t_{i-1})| \right] \\
&= |\lambda| \left[L_r\|x-y\|_{BV} \int_I |K(0,s)|\, ds + \sup_\pi \sum_{i=1}^n \left| \int_I K(t_i,s) f(x(s))\, ds - \int_I K(t_i,s) f(y(s)) ds \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \int_I K(t_{i-1},s) f(x(s)) ds + \int_I K(t_{i-1},s) f(y(s))\, ds \right| \right] \\
&= |\lambda| \left[L_r\|x-y\|_{BV} \int_I |K(0,s)|\, ds + \sup_\pi \sum_{i=1}^n \left| \int_I [K(t_i,s) - K(t_{i-1},s)] f(x(s))\, ds \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \int_I [K(t_i,s) - K(t_{i-1},s)] f(y(s))\, ds \right| \right] \\
&= |\lambda| \left[L_r\|x-y\|_{BV} \int_I |K(0,s)|\, ds \right. \\
&\quad \left. + \sup_\pi \sum_{i=1}^n \left| \int_I [K(t_i,s) - K(t_{i-1})][f(x(s)) - f(y(s))]\, ds \right| \right] \\
&\leq |\lambda| \left[L_r\|x-y\|_{BV} \int_I |K(0,s)|\, ds \right. \\
&\quad \left. + \sup_\pi \sum_{i=1}^n \int_I |K(t_i,s) - K(t_{i-1})|\, |f(x(s)) - f(y(s))|\, ds \right],
\end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned}
||G_\lambda(x) - G_\lambda(y)||_{BV} &\leq |\lambda| \left[L_r\|x-y\|_{BV} \int_I |K(0,s)|\, ds \right. \\
&\quad \left. + \sup_\pi \sum_{i=1}^n \int_I |K(t_i,s) - K(t_{i-1})|\, L_r\|x-y\|_{BV}\, ds \right] \\
&= |\lambda| \left[L_r\|x-y\|_{BV} \int_I |K(0,s)|\, ds \right. \\
&\quad \left. + L_r\|x-y\|_{BV} \sup_\pi \sum_{i=1}^n \int_I |K(t_i,s) - K(t_{i-1})|\, ds \right] \\
&= |\lambda| \left[L_r\|x-y\|_{BV} \int_I |K(0,s)|\, ds \right. \\
&\quad \left. + L_r\|x-y\|_{BV} \sup_\pi \int_I \sum_{i=1}^n |K(t_i,s) - K(t_{i-1})|\, ds \right],
\end{aligned}$$

finalmente,

$$\begin{aligned} ||G_\lambda(x) - G_\lambda(y)||_{BV} &\leq |\lambda| \left[L_r \|x-y\|_{BV} \int_I |K(0,s)|\, ds \right. \\ &\quad \left. + L_r \|x-y\|_{BV} \int_I M(s)\, ds \right] \\ &= |\lambda|\, L_r \|x-y\|_{BV} \int_I [|K(0,s)| + M(s)]\, ds. \end{aligned}$$

Así hemos verificado que

$$||G_\lambda(x) - G_\lambda(y)||_{BV} \leq \left(|\lambda|\, L_r \int_I [K(0,s) + M(s)]\, ds \right) \|x-y\|_{BV},$$

al considerar $\rho > 0$ de tal manera que

$$\rho L_r \int_I [\ K(0,s)\ + M(s)]\, ds < 1,$$

se tiene que $G_\lambda : \bar{B}_r \longrightarrow \bar{B}_r$ es una contracción.

En virtud del teorema del punto fijo de Banach, existe un único elemento $x \in \bar{B}_r$, de tal forma.

$$G_\lambda(x) = x,$$

es decir,

$$\begin{aligned} x(t) &= g(t) + \lambda F(x)(t) \\ &= g(t) + \lambda \int_I K(t,s) f(x(s))\, ds \quad \text{para cada } t \in [0,a]. \end{aligned}$$

■

Ahora ilustraremos un ejemplo referente al teorema anterior de la siguiente manera

Ejemplo 3. *Sea $K : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$K(t,s) = K_1(t) K_2(s),$$

tal que $K(t,\cdot)$ *es integrable Lebesgue para cada elemento fijo* $t \in [0,a]$. *En efecto, por hipótesis* K_2 *es integrable Lebesgue, tenemos que:*

$$\int_I K(t,s)\,ds = \int_I K_1(t)K_2(s)\,ds = K_1(t)\int_I K_2(s)\,ds.$$

Ahora observemos que:

$$\begin{aligned} V(K(\cdot,s),[0,a]) &= V(K_1(t)K_2(s)) \\ &= K_2(s)V(K_1,[0,a]). \end{aligned}$$

Además, se tiene la función $s \longmapsto K_2(s)V(K_1,[0,a])$ *es integrable Lebesgue. Esto es así, ya que:*

$$\int_I K_2(s)V(K_1,[0,a])\,ds = V(K_1,[0,a])\int_I K_2(s)\,ds,$$

como hemos asumido que K_2 *es integrable Lebesgue.*

Si definimos $M(s) = K_2(s)V(K_1,[0,a])$, *podemos concluir que* K *satisface la hipótesis (iii).*

3.2 Ecuación Integral Volterra-Hammerstein

En esta sección desarrollamos la demostración del Teorema 4.1 del artículo de Bugajewska (Ver [11]). En lo que sigue I denotará un intervalo de la forma $I = [0,a]$.

Se considera la ecuación integral Volterra-Hammerstein

$$x(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s)f(x(s))ds \quad \text{para cada } t \in I, \tag{3.5}$$

donde $g(t)$, $K(t,s)$ y f son funciones dadas y $x(t)$ es la función incógnita.

Ahora probaremos el teorema de existencia de la ecuación (3.5).

Teorema 9. *Considere la ecuación (3.5), donde* *(i)* $g : I \to \mathbb{R}$ *una función de variación acotada.*

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función localmente Lipschitz.*

(iii) $T = \{(t, s) : 0 \leq t \leq a, 0 \leq s \leq t\}$ *y* $K : T \to \mathbb{R}$ *es una función tal que* $|K(s, s)| + V(K(\cdot, s), [s, a]) \leq m(s)$ *casi siempre para* $s \in I$*, donde* $m : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *es integrable Lebesgue y* $K(t, \cdot)$ *es integrable Lebesgue en* $[0, t]$ *para cada* $t \in I$*.*

Entonces existe un intervalo $J \subset I$*, tal que la ecuación (3.5) tiene solución única de variación acotada, definida en* J*.*

Demostración:

Fijemos un número real $r > 0$, tal que $\|g\|_{BV} < r$. En el espacio de Banach $BV[a, b]$, consideramos $\bar{B}_r := \{x \in BV(J) : \|x\|_{BV} \leq r\}$, y denotemos por L_r la constante de Lipschitz de f que corresponde al intervalo $[r, r]$, es decir,

$$|f(t) - f(\tau)| \leq L_r|t - \tau|, \qquad t, \tau \in [-r, r].$$

Ahora elegimos un número $d > 0$ de tal forma que

$$\|g\|_{BV} + \sup_{t\in[-r,r]} |f(t)| \int_0^d m(s)\, ds < r$$

y simultáneamente ocurre que

$$L_r \int_0^d m(s))\, ds < 1.$$

De donde, $d > 0$, ya que:

$$\lim_{d\to 0^+} \int_0^d m(s)\, ds = 0.$$

A continuación, definimos $\tilde{K} : [0, a] \times [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\tilde{K}(t, s) := \begin{cases} K(t, s), & 0 \leq s \leq t, \\ 0, & t < s < a. \end{cases}$$

Definimos el intervalo $J = [0, d]$ y $G(x) : [0, d] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$G(x)(t) = g(t) + \lambda F(x)(t),$$

donde

$$F(x)(t) = \int_0^t K(t, s) f(x(s))\, ds, \quad x \in \bar{B}_r,\ t \in J,$$

en el espacio BV(J).

Considerando $F : \bar{B}_r \longrightarrow \mathbb{R}$. Tenemos que

$$(f \circ x)(t) : [0, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

y

$$K(t, \cdot) : [0, d] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Por hipótesis, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz, esto es

$$|f(x(t)) - f(x(\tau))| \leq L_r |x(t) - x(\tau)|, \quad \text{para } t, \tau \in [0, d].$$

Luego, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |f(x(t_i)) - f(x(t_{i-1}))| &\leq \sum_{i=1}^{n} L_r |x(t_i) - x(t_{i-1})| \\ &= L_r \sum_{i=1}^{n} |x(t_i) - x(t_{i-1})| \\ &\leq L_r V(x) \\ &= L_r \|x\|_{BV}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(f \circ x)$ es de variación acotada y así por el Teorema 1 parte e.) se tiene que $(f \circ x)$ es acotada, entonces

$$\int (f \circ x)(t) dt < \infty,$$

de donde $(f \circ x)$ es integrable Lebesgue. Así las aplicaciones F y G están bien definidas.

Para una partición π de la forma $\pi : 0 = t_0 < \cdots < t_n = a$, deseamos comprobar que $G(x) \in \bar{B}_r$ para cada $x \in \bar{B}_r$. Para esto, notemos que:

$$\begin{aligned}
||G(x)||_{BV} &= ||g + F(x)||_{BV} \leq ||g||_{BV} + ||F(x)||_{BV} \\
&= ||g||_{BV} + |F(x)(0)| + V(F(x), [0, d]) \\
&= ||g||_{BV} + V(F(x), [0, d]) \\
&= ||g||_{BV} + \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} |F(x)(t_i) - F(x)(t_{i-1})| \\
&= ||g||_{BV} + \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_0^{t_i} K(t_i, s) f(x(s))\, ds - \int_0^{t_{i-1}} K(t_{i-1}, s) f(x(s))\, ds \right| \\
&= ||g||_{BV} + \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_0^{d} \tilde{K}(t_i, s) f(x(s))\, ds - \int_0^{d} \tilde{K}(t_{i-1}, s) f(x(s))\, ds \right|,
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
||G(x)||_{BV} &= ||g||_{BV} + \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_0^{d} [\tilde{K}(t_i, s) \tilde{K}(t_{i-1}, s)] f(x(s))\, ds \right| \\
&\leq ||g||_{BV} + \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{d} \left| [\tilde{K}(t_i, s) \tilde{K}(t_{i-1}, s)] f(x(s))\, ds \right| \\
&\leq ||g||_{BV} + \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{d} \left| \tilde{K}(t_i, s) \tilde{K}(t_{i-1}, s) \right| |f(x(s))|\, ds \\
&\leq ||g||_{BV} + \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{d} \left| \tilde{K}(t_i, s) \tilde{K}(t_{i-1}, s) \right| \sup_{t \in [-r, r]} |f(t)|\, ds \\
&\leq ||g||_{BV} + \sup_{t \in [-r, r]} |f(t)| \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{d} \left| (\tilde{K}(t_i, s) \tilde{K}(t_{i-1}, s)) \right|\, ds \\
&= ||g||_{BV} + \sup_{t \in [-r, r]} |f(t)| \sup_{\pi} \int_0^{d} \sum_{i=1}^{n} \left| (\tilde{K}(t_i, s) \tilde{K}(t_{i-1}, s)) \right|\, ds \\
&\leq ||g||_{BV} + \sup_{t \in [-r, r]} |f(t)| \int_0^{d} m(s)\, ds \\
&< r.
\end{aligned}$$

De lo anterior, para $x \in \bar{B}_r$, se tiene que $G(\bar{B}_r) \subset \bar{B}_r$. Además, para cualquier $x, y \in \bar{B}_r$ obtenemos

$$\begin{aligned}
||G(x)-G(y)||_{BV} &= ||(g+\lambda F(x))-(g+\lambda F(y))||_{BV} \\
&= |\lambda|\,\|F(x)-F(y)\|_{BV} \\
&= |\lambda|\,[|(F(x)-F(y))(0)|+V(F(x)-F(y),[0,a])] \\
&= |\lambda|[|(F(x)(0)-F(y)(0))|+V(F(x)-F(y),[0,a])] \\
&= |\lambda|\,\left[\left|\int_J K(0,s)f(x(s))ds-\int_J K(0,s)f(y(s))ds\right|\right. \\
&\quad \left. +V(F(x)-F(y),[0,a])\right] \\
&= |\lambda|\,\left[\left|\int_J K(0,s)[f(x(s))-f(y(s))]ds\right|+V(F(x)-F(y),[0,a])\right] \\
&\leq |\lambda|\left[\int_J |K(0,s)||f(x(s))-f(y(s))|\,ds+V(F(x)-F(y),[0,a])\right] \\
&\leq |\lambda|\left[\int_J |K(0,s)|L_r|(x(s))-(y(s))|\,ds+V(F(x)-F(y),[0,a])\right],
\end{aligned}$$

por lo tanto, continuando con los diferentes pasos para calcular $||G(x)-G(y)||_{BV}$, se sigue que:

$$\begin{aligned}
||G(x)-G(y)||_{BV} &\leq |\lambda|\left[\int_J |K(0,s)|L_r\|x-y\|_{BV}\,ds+V(F(x)-F(y),[0,a])\right] \\
&= |\lambda|\left[L_r\|x-y\|_{BV}\int_J |K(0,s)|\,ds\right. \\
&\quad \left. +\sup_\pi \sum_{i=1}^n |\,(F(x)-F(y))(t_i)-(F(x)-F(y))(t_{i-1})|\right] \\
&\leq |\lambda|\left[L_r\|x-y\|_{BV}\int_J |K(0,s)|\,ds+\sup_\pi\sum_{i=1}^n\left|\int_0^{t_i} K(t_i,s)f(x(s))\,ds\right.\right. \\
&\quad -\int_0^{t_i} K(t_i,s)f(y(s))ds-\int_0^{t_{i-1}} K(t_{i-1},s)f(x(s))ds \\
&\quad \left.\left. +\int_0^{t_{i-1}} K(t_{i-1},s)f(y(s))\,ds\right|\right]
\end{aligned}$$

así,

$$
\begin{aligned}
||G(x)-G(y)||_{BV} &\leq |\lambda| \left[L_r \|x-y\|_{BV} \int_J |K(0,s)|\, ds \right. \\
&\quad + \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_J [\tilde{K}(t_i,s)-\tilde{K}(t_{i-1})] f(x(s))\, ds \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_J [\tilde{K}(t_i,s)-\tilde{K}(t_{i-1},s)] f(y(s))\, ds \right| \right] \\
&\leq |\lambda| \left[L_r \|x-y\|_{BV} \int_I |K(0,s)|\, ds \right. \\
&\quad \left. + \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_J [\tilde{K}(t_i,s)-\tilde{K}(t_{i-1})][f(x(s))-f(y(s))]\, ds \right| \right] \\
&\leq |\lambda| \left[L_r \|x-y\|_{BV} \int_J |K(0,s)|\, ds \right. \\
&\quad \left. + \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_J |\tilde{K}(t_i,s)-\tilde{K}(t_{i-1})|\, |f(x(s))-f(y(s))|\, ds \right] \\
&\leq |\lambda| \left[L_r \|x-y\|_{BV} \int_J |K(0,s)|\, ds \right. \\
&\quad \left. + \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_I |\tilde{K}(t_i,s)-\tilde{K}(t_{i-1})|\, L_r \|x-y\|_{BV}\, ds \right], \\
&= |\lambda| \left[L_r \|x-y\|_{BV} \int_J |K(0,s)|\, ds \right. \\
&\quad \left. + L_r \|x-y\|_{BV} \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_J |\tilde{K}(t_i,s)-\tilde{K}(t_{i-1})|\, ds \right] \\
&= |\lambda| \left[L_r \|x-y\|_{BV} \int_J |K(0,s)|\, ds \right. \\
&\quad \left. + L_r \|x-y\|_{BV} \sup_{\pi} \int_J \sum_{i=1}^{n} |\tilde{K}(t_i,s)-\tilde{K}(t_{i-1})|\, ds \right] \\
&\leq |\lambda| \left[L_r \|x-y\|_{BV} \int_J |K(0,s)|\, ds + L_r \|x-y\|_{BV} \int_J V(\tilde{K}(\cdot,s),[0,d])\, ds \right] \\
&= |\lambda|\, L_r \|x-y\|_{BV} \int_J [|K(0,s)| + V(\tilde{K}(\cdot,s),[0,d])]\, ds \\
&\leq |\lambda|\, L_r \|x-y\|_{BV} \int_J m(s)\, ds,
\end{aligned}
$$

donde, $L_r \displaystyle\int_0^d m(s))ds < 1$, en vista del Principio de Contracción de Banach, la aplicación

G tiene un único punto fijo en $\bar{B}_r$ y por lo tanto es una solución de $BV(J)$ de (3.5) definida sobre J. Con esto se concluye la demostración.

■

Se puede ilustrar el resultado anterior con un ejemplo similar como en la sección previa.

Ejemplo 4. *Definimos $K : J \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ como:*

$$K(t,s) = K_1(t)K_2(s),$$

tal que

$$\tilde{K}(t,s) := \begin{cases} K(t,s), & 0 \leq s \leq t, \\ 0, & t < s < a, \end{cases}$$

donde, $K(t,\cdot)$ es integrable Lebesgue, para cada elemento fijo $t \in [0,d]$. En efecto, por hipótesis K_2 es integrable Lebesgue, entonces obtenemos que:

$$\int_J \tilde{K}(t,s)\,ds = \int_J K(t,s)\,ds = \int_J K_1(t)K_2(s)\,ds = K_1(t)\int_J K_2(s)\,ds.$$

Ahora observe que:

$$\begin{aligned} V(K(\cdot,s),[0,d]) &= V(K_1(t)K_2(s)) \\ &= K_2(s)V(K_1,[0,d]). \end{aligned}$$

Además, se tiene la función $s \mapsto K_2(s)V(K_1,[0,d])$ es integrable Lebesgue. Esto es así, ya que:

$$\int_J K_2(s)V(K_1,[0,d])\,ds = V(K_1,[0,d])\int_J K_2(s)\,ds,$$

como hemos asumido que K_2 es Lebesgue-integrable.

Si definimos $m(s) = K_2(s)V(K_1,[0,d])$, podemos concluir que $\tilde{K}$ satisface la hipótesis (iii).

3.3 Soluciones Continuas de Variación Acotada

En esta sección desarrollamos las demostraciones de los Teoremas 5.1 y 5.2 del artículo de Bugajewska (Ver [11]).

Se considera la ecuación integral Hammerstein

$$x(t) = g(t) + \lambda \int_I K(t,s) f(x(s)) ds \quad \text{para } t \in I, \ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

donde $g(t)$, $K(t,s)$ y f son funciones dadas y $x(t)$ es la función incógnita.

Teorema 10. *Considere la ecuación (3.6), donde*

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función localmente Lipschitz.*

(ii) $K : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$*, es una función tal que* $V(K(\cdot, s), I) \leq M(s)$*, con I=[0,a], casi siempre para* $s \in I$*, donde* $M : I \to \mathbb{R}_+$ *y* $K(t, \cdot)$ *son integrable Lebesgue para todo* $t \in I$*.*

(iii) $g : I \to \mathbb{R}$ *una función continua de variación acotada.*

(iv) Para cada $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $t, \tau, s \in I$ *:*

$$|\tau - t| < \delta \Longrightarrow |K(\tau, s) - K(t, s)| < \epsilon.$$

Si existe $\rho > 0$ *tal que para cada* λ *satisfaciendo* $|\lambda| < \rho$*, la ecuación (3.6) tiene solución única de variación acotada, definida en el intervalo* I*.*

Demostración:

Consideremos el espacio $BV_C(I) = BV(I) \cap C(I)$ con la norma $\| \cdot \|_{BV}$.

Fijemos un número real $r > 0$, tal que $\|g\|_{BV} < r$. En el espacio de Banach $BV[a, b]$, consideramos $\bar{B}_r := \{x \in BV(I) : \|x\|_{BV} \leq r\}$, y denotemos por L_r la constante de Lipschitz que corresponde al intervalo $[-r, r]$, es decir,

$$|f(t) - f(\tau)| \leq L_r |t - \tau|, \qquad t, \tau \in [-r, r].$$

Fijemos un número real λ tal que $|\lambda| < \rho$ y definamos $G : \bar{B_r} \longrightarrow \mathcal{F}$; donde $\mathcal{F}$ es el conjunto de todas las funciones reales definidas sobre $[0,a]$ se tiene que:

$$G(x)(t) = g(t) + \lambda F(x)(t),$$

donde,

$$F(x)(t) = \int_I K(t,s)f(x(s))\,ds, \quad x \in \bar{B_r},\ t \in I.$$

Considerando $F : \bar{B_r} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Sea $I : [0,a]$, tenemos que

$$(f \circ x)(t) : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$$

y

$$K(t,\cdot) : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Por hipótesis, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz, esto es

$$|f(x(t)) - f(x(\tau))| \leq L_r|x(t) - x(\tau)|, \quad \text{para } t,\tau \in [0,a]$$

Sea $M = \sup\limits_{s\in I}|f(x(s))|$, dado $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon}{2M\rho|I|} > 0$; $\quad t,\tau \in J$ se tiene:

$$\begin{aligned}
|G(x)(t) - G(x)(\tau)| &= |g(t) + \lambda F(x)(t) - g(\tau) - \lambda F(x)(\tau)| \\
&= |(g(t) - g(\tau)) + \lambda(F(x)(t) - F(x)(\tau))| \\
&\leq |g(t) - g(\tau)| + |\lambda||F(x)(t) - F(x)(\tau)| \\
&= |(g(t) - g(\tau))| + |\lambda| \left| \int_I K(t,s)f(x(s))\,ds - \int_I K(\tau,s)f(x(s))\,ds \right| \\
&\leq |(g(t) - g(\tau))| + |\lambda| \int_I |(K(t,s) - K(\tau,s))f(x(s))\,ds| \\
&= |(g(t) - g(\tau))| + |\lambda| \int_I |(K(t,s) - K(\tau,s))|\,|f(x(s))|\,ds \\
&\leq |(g(t) - g(\tau))| + |\lambda| \int_I |(K(t,s) - K(\tau,s))| \sup_{s\in I} |f(x(s))|\,ds,
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
|G(x)(t)-G(x)(\tau)| &\leq |(g(t)-g(\tau))| + \sup_{s\in I}|f(x(s))|\,|\lambda|\int_I |(K(t,s)-K(\tau,s))|\,ds \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \sup_{s\in I}|f(x(s))|\,|\lambda|\int_I |(K(t,s)-K(\tau,s))|\,ds, \text{ por(iii) } g \text{ es continua} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + |\lambda|\,M\,\epsilon_1\int_I ds, \quad \text{por(iv) siempre que } |t-\tau|<\delta \\
&= \frac{\epsilon}{2} + |\lambda|\,M\,\epsilon_1|I| < \frac{\epsilon}{2} + \rho\,M\,\epsilon_1|I| \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \rho\,M\,\frac{\epsilon}{2M\rho|I|}\,|I| \\
&= 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

y así dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|t-\tau| < \delta$ implica que

$$|G(x)(t)-G(x)(\tau)| < \epsilon$$

por lo tanto $G(x)$ es una función continua.

■

Se considera la ecuación integral Volterra-Hammerstein

$$x(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s)f(x(s))ds \quad \text{para cada } t \in I, \tag{3.7}$$

donde $g(t)$, $K(t,s)$ y f son funciones dadas y $x(t)$ es la función incógnita.

Teorema 11. *Considere la ecuación (3.7). Sean*

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función localmente Lipschitz.*

(ii) $T = \{(t,s) : 0 \leq t \leq a,\ 0 \leq s \leq t\}$ *y* $K : T \to \mathbb{R}$ *es una función tal que* $|K(s,s)| + V(K(\cdot,s),[s,a]) \leq m(s)$ *casi siempre para* $s \in I$*, donde* $m : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *es integrable Lebesgue y* $K(t,\cdot)$ *es integrable Lebesgue en* $[0,t]$ *para cada* $t \in I$*.*

(iii) $g : I \to \mathbb{R}$ *una función continua de variación acotada.*

(iv) para cada $t \in I$ *y para cada* $\epsilon > 0$ *donde existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $\tau \in I$ *y* $s \in [0,t]\bigcap[0,\tau]$*:*

$$|\tau - t| < \delta \Longrightarrow |K(\tau,s)-K(t,s)| < \epsilon$$

Consideramos el espacio $BV_c = BV(I) \cap C(I)$, con la norma $\|\cdot\|_{BV}$, existe un intervalo $J \subset I$ tal que la ecuación (3.7) tiene una única solución continua de variación acotada, definida en J.

Demostración:

Hemos verificado que si $x \in \bar{B}_r$ entonces $||G(x)||_{BV} < r$. Falta comprobar que $G(x)$ es continua. Veamos porque G es continua. Para ello note que es suficiente con verificar que $F(x)$ es continua, teniendo en cuenta que solo para t_0 fijo con $t_0 \in J$ y $\tau > t_0$, $\tau \in J$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
|F(x)(\tau) - F(x)(t_0)| &= \left| \int_0^{\tau} K(\tau, s) f(x(s))\, ds - \int_0^{t_0} K(t_0, s) f(x(s))\, ds \right| \\
&= \left| \int_0^{t_0} K(\tau, s) f(x(s))\, ds + \int_{t_0}^{\tau} K(\tau, s) f(x(s))\, ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t_0} K(t_0, s) f(x(s))\, ds \right| \\
&= \left| \int_0^{t_0} [K(\tau, s) - K(t_0, s)] f(x(s))\, ds + \int_{t_0}^{\tau} K(\tau, s) f(x(s))\, ds \right| \\
&\leq \left| \int_0^{t_0} [K(\tau, s) - K(t_0, s)] f(x(s))\, ds \right| + \left| \int_{t_0}^{\tau} K(\tau, s) f(x(s))\, ds \right| \\
&\leq \int_0^{t_0} |K(\tau, s) - K(t_0, s)||f(x(s))|\, ds + \int_{t_0}^{\tau} |K(\tau, s)||f(x(s))|\, ds \\
&\leq \sup_{s \in J} |f(x(s))| \left(\int_0^{t_0} \epsilon\, ds + \int_{t_0}^{\tau} (|K(\tau, s) - K(s, s)| + |K(s, s)|)\, ds \right) \\
&\leq \sup_{s \in J} |f(x(s))| \left(\epsilon \int_0^{t_0} ds + \int_{t_0}^{\tau} \epsilon\, ds + \int_{t_0}^{\tau} |K(s, s)|\, ds \right) \\
&\leq \sup_{s \in J} |f(x(s))| \left(\epsilon \int_0^{t_0} ds + \epsilon \int_{t_0}^{\tau} ds + \int_{t_0}^{\tau} m(s)\, ds \right) \\
&\leq \sup_{s \in J} |f(x(s))| \left(t_0\, \epsilon + \epsilon\, (\tau - t_0) + \int_{t_0}^{\tau} m(s)\, ds \right).
\end{aligned}
$$

Como $x \in \bar{B}_r$, y de *(ii)*,*(iii)*,*(iv)* tenemos que $G(x)$ es una función continua.

■

CONCLUSIONES

En el presente Trabajo Especial de Grado, se ha presentado una breve introducción a las ecuaciones integrales, entre las que se encuentran las ecuaciones integrales no lineales de Volterra, las ecuaciones integrales no lineales de Hammerstein, así como algunos ejemplos emblemáticos. Además se expone explícitamente la noción de variación acotada dada por Camille Jordan, y algunos resultados relevantes del espacio de funciones con variación acotada, como lo son: las caracterizaciones dadas por C. Jordan, y H. Federer, así como también, acerca de la actuación del Operador de Composición de este espacio.

Pero el objetivo principal de esta tesis es estudiar la existencia y unicidad de soluciones en el espacio de funciones de variación acotada $BV([a,b])$ de las ecuaciones integrales no lineal de Hammerstein y Volterra-Hammerstein. Se formularon condiciones que garantizan existencia y unicidad de la ecuación integral no lineal de Hammerstein y la ecuación integral no lineal de Volterra-Hammerstein.

En esta investigación concurren varias ramas de la matemática: Topología, Teoría de la medida, Análisis funcional, Ecuaciones diferenciales.

Hay varias motivaciones para empezar a trabajar un tema como el desarrollo de este trabajo de grado. Primero, los artículos expuestos en el capítulo III son de data reciente; obtienen condiciones necesarias para hallar soluciones y unicidad de las ecuaciones integrales del tipo Hammertein y Volterra-Hammerstein en el espacio de variación acotada. Segundo, como el espacio de variación acotada ha sido extendido a lo que hoy se conoce como espacio de variación acotada generalizada unidimensional, bidimensional o n-dimensional podemos buscar condiciones necesarias para hallar soluciones y unicidad en estos espacios. De hecho los mismos matemáticos D. Bugajewski y D. Bugajewska con otros colaboradores han resuelto el problema para el espacio de variación acotada en el sentido de Wiener-Young (Ver [9]). Tercero, recientemente H. Leiva, J. Matute, N. Merentes y J. L. Sánchez han conectado el tema expuesto con los resultados de los matemáticos D. Bugajewski y D. Bugajewska con la teoría de control (Ver [27]).

BIBLIOGRAFÍA

[1] Agarwal, R., O´Regan, D. and Wong, P., *Positive Solutions of Differential, Difference and Integral Equations*, Kluwer Academic, Dordrecht,1999.

[2] Aguilar, G., *El problema mecánico de Abel*, Miscelanea Matemática, 24 (1996), 1-14.

[3] Angulo, H., *Una generalización del principio de contracción de Banach*, Tesis, U.L.A. 2008.

[4] Appell, J., Zabrejko, P., *Nonlinear superposition operators*, Cambridge University press, 1990.

[5] Argyros, I., *Quadractic equations and applications to Chandrasekhar's and related equations*, Bull. Austral. Math. Soc., 32 (1985), 275-292.

[6] Atkinson, K., *The numerical solution of integral equations of the second kind*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[7] Avila, L., *Funciones de p-variación acotada en el sentido de Wiener y Riesz*, Trabajo de Pasantía, Universidad Nacional Abierta, Pto. Fijo, Venezuela, 1994.

[8] Barrantes, T., *Funciones de variación acotada Generalizada y un Teorema de Representación Canónica de Chistyakov*, Tesis, U.C.V. 2010.

[9] Bugajewska, D., Bugajewski, D. and Lewicki, G., *On nolinear integral equations in the space of functions of bounded generalized φ-variation*, IMUJ, Polan, 07 (2006).

[10] Bugajewska, D., and O´Regan, D., *On Nonlinear Integral Equations and Λ-Bounded Variation*, Acta Math, Hungar, 4 (2005), 295-306.

[11] Bugajewska, D., *On BV-Solutions of Some Nonlinear Integral Equations*. Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland, 46 (2003), 387-398.

[12] Bugajewski, D., *On the Volterra integral equation and Axiomatic Measures of Weak Noncompactness*, Mathematica Bohemica, 126 (1998), 183-190.

[13] Bullen, P., *An inequality for variations*, Amer. Math. Monthly, 90 (1983), 561.

[14] Burton, A., *Volterra Integral and Differential Equations*, Academic Press, New York, 1983.

[15] Caballero, J. and Sadarangani, K., *Solvability of a Volterra integral equation of convolution type in the class of monotonic functions*, Intern. Math. Journal, 4 (2001), 69-77.

[16] Coddington, A. and Levinson, N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, Book Company, Inc., New York-Toronto-Londo, 1955.

[17] Collins, P., *Differential and Integral Equations*, Oxford University Press, 2006.

[18] Dirichlet, P., *Sur la convergence des séries trigonémetriques que servent á représenter une fonction arbitraire entre des limites donnés*, Journal für die Reine und Angewandte Mathemait, 4, (1829), 157-159.

[19] Federer, H., *Geometric Measure theory*, Heidelberg. Springer-Verlag, (1969).

[20] Gripenberg, G., Londen, S. and Staffans, O., *Volterra Integral and Functional Equations*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1990.

[21] Hammerstein, A., *Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen*, Acta Math., 54 (1930), 117-176.

[22] Khavanin S. Hu. M. and Zhuang, W., *Integral equations arising in the kinetic theory of gases*, Appl. Anal, 34 (1989), 261-266.

[23] Jordan, C., *Sur la série de fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris, 2 (1881), 228-230.

[24] Josephy, M., *Composing functions of bounded variation*, Proc. Amer. Math. Soc. 83 (1981), 354-356.

[25] Krasnov, M., Kiseliov y Makarenko, G., *Ecuaciones Integrales*, Editorial Mir, Moscú, 1970.

[26] Kress, R., *Linear Integral Equations*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York, (1997).

[27] Leiva, H., Matute, J. and Merentes N., *On the Hammerstein-Volterra equations in the Space of the absolutely continuous Functions*, Aceptado en International Journal of Mathematical Analysis.

[28] Maleknejad, K. and Torabi, P., *Application of fixed point method for solving non-linear Volterra-Hammerstein Integral Equation*, U.P.B. Sci. Bull., Series A, Vol. 74, Iss. 1, 2012.

[29] Maligranda, L. y Orlicz, W., *On some properties of functions of generalized variation*, Mh. Math., 104,(1987), 53-65.

[30] Merentes, N. y Rivas, S., *El Operador de Composición en Espacios con algún tipo de variación acotada*, Escuela Venezolana de Matemáticas, Asociación Matemática Venezolana, Centro de estudios Avanzados- Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, 18. 1996.

[31] Mikhlin S., Linear Partial Differential Equations, Editorial Vischaya Schkola, 1977.

[32] O´Regan, D. and Meehan, M., *Existence theory for nonlinear integral and integro-diferential equations*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1998.

[33] Petrovskii, I., *Lectures on the Theory of Integral Equations*, Graylock Press Rochester, New York, 1957.

[34] Polyanin, A. and Manzhirov, A., Handbook of Integral Equations, CRC Press. London New York, 1998.

[35] Volterra, V., *Theory of functionals and of integral and Integro-differential equations*, Dover Publications, Inc. New York, (1959).