

*Modos Internos en la Ecuación de seno  
de Gordon Perturbada*

*Br. Javier A. Rangel S.*

Tutor: Prof. Alberto J. Bellorín R.

Trabajo Especial de Grado



Caracas, 27 de octubre del año 2011

*Escuela de Física*





Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

# **MODOS INTERNOS EN LA ECUACIÓN DE SENO DE GORDON PERTURBADA**

Br. Javier A. Rangel S.

Prof. Alberto J. Bellorín R., Tutor

Caracas, 27 de octubre del año 2011

**Modos Internos en la Ecuación de seno de Gordon Perturbada**

Copyright © 2011

Universidad Central de Venezuela

*Javier A. Rangel S.*

MODOS INTERNOS EN LA ECUACIÓN DE SENO DE GORDON  
PERTURBADA

Br. Javier A. Rangel S.

*Trabajo Especial de Grado presentado  
ante la ilustre Universidad Central de Venezuela  
como requisito parcial para optar al título de*  
**Licenciado en Física.**

---

Quienes suscriben, miembros del Jurado que examinó el trabajo presentado por el Br. Javier A. Rangel S., titulado: “**Modos Internos en la Ecuación de seno de Gordon Perturbada**” para optar al título de Licenciado en Física, consideramos que dicho trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos APROBADO en nombre de la Universidad Central de Venezuela.

---

Prof. Alberto J. Bellorín R., Tutor

Fecha

---

Prof. Fermín Dalmagro

Fecha

---

Prof. Felix Marín

Fecha

Caracas, 27 de octubre del año 2011

*A la memoria de mis abuelos, Cándido Salas  
y Pablo Rangel*

# Agradecimientos

¿Como hacer para decir “muchas gracias”, cuando hay muchas personas a quien debo agradecerle? A mis padres y mi hermano, porque desde el primer día que inicie mis estudios de Física siempre estuvieron presentes apoyándome en todo, brindándome mucho ánimo y consejos. Gracias mamá, gracias papá.

A mi tutor el profesor Alberto Bellorín por brindarme la oportunidad de trabajar en solitones y por su colaboración para la culminación de este libro. Al profesor Ernesto Fuenmayor Di Prisco por su amable atención en momentos difíciles. Al profesor Luis Emilio Guerrero y al señor Claudio Mendoza por dedicarme un poco de su tiempo.

A muchos de mis profesores que a lo largo de la carrera, me impulsaron a culminar mis estudios, profesores como Abraham Lozada, de quien aprendí a ser un científico que siempre debe dominar los aspectos básicos pero sutiles de la Física. Igual se puede decir del profesor José Domingo Mujica, gran docente, capaz de dictar sus clases si las circunstancias no son favorables. Al profesor Pierre Embaid por esas maravillosas prácticas de laboratorio. Al profesor Salvatore de Vincenzo, por sus enseñanzas en Mecánica Cuántica. Todos estos profesores son un ejemplo para mí.

A mis amigos y compañeros José Garcia y Tomislav Monjak por sus valiosos consejos y la oportuna ayuda que me brindaron en los momentos difíciles.

Finalmente quiero agradecer a las señoras Eva Petaquero y Brigida Ramírez J., del Departamento de la Escuela de Física por tantas diligencias y ayudas que me facilitaron, sobre todo a la señora Eva quien me ayudó no solo en el Trabajo Especial de Grado sino también en los últimos semestres de mi carrera.

---

# ÍNDICE GENERAL

<b>Índice general</b>	<b>vii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Descubrimiento de las Ondas Solitarias . . . . .	1
1.2. Ondas Solitarias . . . . .	4
1.3. El Solitón [11] . . . . .	7
1.4. Ecuaciones de Klein Gordon[12] . . . . .	9
1.5. Sistemas Dinámicos[18, 19] . . . . .	15
1.6. Puntos de Equilibrio[20] . . . . .	18
1.7. Ecuación de Duffing[18] . . . . .	23
1.8. Bifurcaciones . . . . .	29
1.9. Atractores[18] . . . . .	32
1.10. Transición al Caos . . . . .	35
1.11. Secciones de Poincaré . . . . .	40

<b>2. Modos Internos de la ecuación seno de Gordon</b>	<b>42</b>
2.1. Fuerza inhomogénea espacial . . . . .	43
2.2. El problema de Cauchy: Experimentos Numéricos . . . . .	53
2.3. Potencial de doble pozo para el kink-soliton . . . . .	57
<b>Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>74</b>
<b>A. Detalles de la Solución</b>	<b>77</b>
A.1. Autovalores . . . . .	77
A.2. Autovectores . . . . .	81
<b>B. Discretización</b>	<b>83</b>
B.1 Implementación Numérica de la ecuación seno de Gordon . . . . .	84

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. Descubrimiento de las Ondas Solitarias

En agosto de 1834 se realizó la primera observación de ondas solitarias hecha por el ingeniero naval escocés John Scott Russell (1808-1882) en el Union Canal de Escocia [1]. Allí mientras observaba a un bote detenerse sobre un canal de agua superficial, observó como la onda que empujaba su proa “se desplazaba hacia adelante con gran velocidad, asumiendo la forma de una gran elevación solitaria; un montículo redondeado, suave y bien definido, el cual continuó su curso a través del canal sin cambiar de forma o disminuir su velocidad”.

Luego del sorprendente hallazgo, Russell efectuó muchos experimentos en ambientes naturales, sobre canales, ríos y lagos, así como en su laboratorio (un pequeño reservorio en su jardín) [2]. La información que obtiene de dichos experimentos le permite publicar en 1844 su trabajo *Report on Waves* donde describe la existencia de

ondas solitarias con forma permanente. La obra paso prácticamente inadvertida en todo el continente. En su trabajo Russell llegó a las siguientes conclusiones:

1. Una onda solitaria tiene velocidad constante y no cambia su forma.
2. La dependencia de la velocidad  $v$  sobre la profundidad del canal  $h$  y la altura de la onda  $a$ , está dado por la relación:

$$v = \sqrt{g(h + a)}, \quad (1.1)$$

donde  $g$  es la aceleración debido a la gravedad.

3. Una elevación inicial de agua puede, dependiendo de la relación entre su altura y largo, desarrollarse en una onda solitaria pura, una onda solitaria más un tren de ondas residuales o dos o más ondas solitarias con o sin tren de ondas residuales.
4. Ondas solitarias de depresiones no son conocidas.

A pesar de que el mejor experto en ondas William Hamilton le perdió interés al campo de las ondas, el trabajo de Russell fue leído por dos grandes científicos, Airy y Stokes, las críticas comenzaron a relucir. En 1845 el matemático y astrónomo inglés Sir George B. Airy (1801-1892) critica severamente a Russell [3] afirmando que no existen ondas grandes que preserven su forma en un canal, desmintiendo por completo el calificativo de onda “grande” o “primaria” el cual “contradice la teoría de Airy para ondas grandes en aguas superficiales”.

Luego en 1847 el físico y matemático irlandés Sir George G. Stokes (1819-1903) publica su trabajo [4] donde afirma que las ondas de Russell no son permanentes ya que estas sólo pueden existir en aguas profundas. Con estas y otras observaciones severas, el estudio de las ondas solitarias no logró captar el interés de otros investigadores

durante mucho tiempo [5]. Para muchos científicos de la época las ondas solitarias eran simplemente especulaciones extraordinarias e infundadas, hasta Sir John Herschel llegó a comentarle a Russell; “Es meramente una mitad de una onda común que ha sido cortada”.

Entre 1844 y 1965 fueron publicados menos de dos docenas de trabajos vinculados a este tema. Afortunadamente Russell vivió lo suficiente para ver a la onda solitaria “absuelta”. En 1871 el físico y matemático francés Joseph V. Boussinesq (1842-1929) publicó un trabajo [6] donde sentó las primeras bases para la existencia de las ondas solitarias.

Luego en 1876, el físico inglés y alumno de Stokes, John W. Strutt “Lord Rayleigh” (1842-1919) publicó su trabajo [7] donde confirma de forma independiente los cálculos hechos por Boussinesq y realiza experimentos con pistón donde reproduce ondas solitarias. Las conclusiones de este estudio fueron confirmadas por Saint-Venant (1885). Estos tres científicos establecieron una base matemática firme para las ondas solitarias, las cuales ya parecían despertar el interés de muchos científicos.

En 1895 los matemáticos alemanes Diederik J. Korteweg (1848-1941) y Gustav de Vries (1866-1934) publican su trabajo [8] donde descubren la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) la cual representa un buen modelo matemático para ondas en aguas superficiales poco profundas. Con este trabajo se le da un mayor impulso al estudio de las ondas solitarias ya que ahora existe una teoría que afirma su existencia.

Frenkel y Kontorova predijeron en 1939 los solitones topológicos [9]. De hecho, encontraron un tipo especial de defecto conocido como una “dislocación”, que se encuentra en la estructura cristalina de sólidos. Las dislocaciones no son estáticas, pueden

moverse dentro del cristal. La evolución de dichas dislocaciones junto con otros solitones topológicos son descritas por la ecuación *seno de Gordon*.

Un hecho importante ocurre en 1953. En ese año Fermi, Pasta y Ulam llevan a cabo la primera simulación por computadora de un modelo físico, donde se evidencia la existencia de solitones[10], debido a incongruencias en la equipartición de la energía. La finalidad era modelar una cadena de péndulos no lineales y observar como la energía inicial del sistema pasaba de un modo a otro. Se pensaba que a medida que transcurría el tiempo, la energía se repartiría de forma equitativa en los modos de vibración de la cadena de péndulos, sin embargo, lo que encontraron fue que dicha energía regresaba íntegra al modo más bajo. No había explicación al respecto.

Kruskal y Zabusky realizaron un experimento computarizado en 1965 similar al FPU, donde concluyeron que las pequeñas amplitudes y vibraciones del modelo FPU son descritas correctamente por la ecuación (KdV) [8]. Al estudiar las ondas en plasmas, que satisface la ecuación KdV ellos acuñaron el término **solitón** ya que descubren el sorprendente hecho de las colisiones elásticas entre solitones tal y como ocurre con las partículas.

## 1.2. Ondas Solitarias

En base a las observaciones hechas por Russell sobre en las ondas solitarias podemos compararlas con las ondas que llamaremos “clásicas” para distinguirlas de las ondas de Russell. Las ondas clásicas obedecen a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (1.2)$$

cuya solución general es:

$$\phi(x, t) = f(x - ct). \quad (1.3)$$

Esta solución posee las siguientes características:

- La forma y velocidad son independientes de su amplitud
- La suma de dos ondas lineales es también una onda lineal
- Las ondas de pequeña amplitud son lineales de lo contrario serán no lineales

Un solitón puede interpretarse como un pulso (onda lineal) que se propaga sin perder su forma. Para una onda lineal con dispersión, por ejemplo<sup>1</sup>:

$$\phi_t + \phi_x + \phi_{xxx} = 0, \quad (1.4)$$

la solución de onda viajera  $\phi = f(x, t)$  está dada por:

$$\phi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}, \quad (1.5)$$

tomando la parte real o imaginaria su relación de dispersión es:

$$\omega = k - k^3, \quad (1.6)$$

esto significa que la velocidad de fase no es constante:

$$c_f = c(k) = 1 - k^2, \quad (1.7)$$

---

<sup>1</sup> donde hemos usado una notación abreviada para las derivadas  $\phi_x \equiv \partial\phi/\partial x$   $\phi_{xx} \equiv \partial^2\phi/\partial x^2$

dando como resultado diferentes velocidades para diferentes números de onda. Como las componentes de Fourier de una onda poseen distintos  $k$ 's, cada una de ellas se moverán con velocidades diferentes causando la “dispersión” de la onda como tal:

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}. \quad (1.8)$$

En esencia  $A(k)$  es la transformada de Fourier para  $\phi(x, 0)$ . Así, un pulso construido como una superposición lineal de  $\phi$  (ver Fig. 1.1) realmente se dispersará a medida de que se propaga.

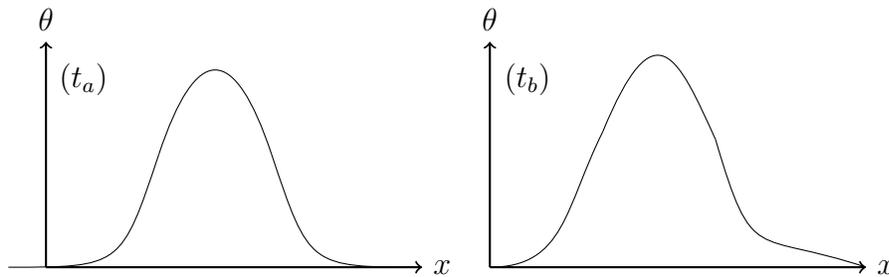


Figura 1.1: Evolución en el tiempo ( $t_a < t_b$ ), de una onda lineal con un término disipativo

Por otro lado, para una ecuación no-lineal sin dispersión tal como:

$$\phi_t + (1 + \phi)\phi_x = 0, \quad (1.9)$$

cuya solución tiene la siguiente forma:

$$\phi(x, t) = f(x - [1 + \phi]t), \quad (1.10)$$

donde  $f$  es una función arbitraria. Simplemente hemos sustituido en ec.(1.4)  $c = 1 + \phi$ , sin embargo debemos tener mucho cuidado con su solución. Si asumimos que  $f > 0$  para algún  $x$  la ec.(1.10) producirá una solución mono-valuada para  $\phi$  hasta un cierto tiempo finito, después de eso la solución será multi-valuada. Este comportamiento de *no-unicidad* se nos presenta como una onda la cual se está *rompiendo* (ver Fig. 1.2), lo cual indica que necesariamente la onda debe cambiar su forma a medida de que se propaga.

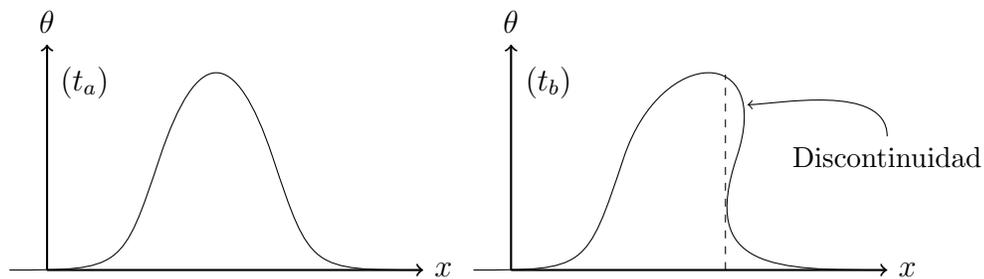


Figura 1.2: Evolución en el tiempo de una onda no lineal ( $t_a < t_b$ ). La no linealidad se observa como un salto o montículo

### 1.3. El Solitón [11]

Los solitones son soluciones no-singulares de algunas ecuaciones diferenciales parciales no lineales que poseen las siguientes características:

- Son espacialmente localizados
- Un solitón es una onda viajera cuya forma es permanente
- Ellos son estables
- Cuando un solitón colisiona con otro, ambos retienen sus identidades después de la colisión (como el choque elástico entre dos partículas)

Cuando los solitones cumplen con la última propiedad se dice que pertenecen a un sistema integrable, de lo contrario los matemáticos lo llaman un pseudo-solitón y se dice que pertenecen a un sistema no integrable.

Matemáticamente un solitón es una onda viajera que no cambia de forma y velocidad cuando interactúa con otro solitón. Así, si una solución  $f(x, t)$  estuvo compuesta solamente de ondas solitarias en tiempo pasado remoto:

$$f(x, t) = \sum_{j=1}^{N-1} f(x - ct_j) \quad t \rightarrow -\infty, \quad (1.11)$$

entonces se le considera un *solitón* si después de la interacción las ondas solitarias emergen con solamente una diferencia de fase:

$$f(x, t) = \sum_{j=1}^{N-1} f(x - c_j t + \theta), \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.12)$$

Los sistemas integrables<sup>2</sup> tienen este comportamiento, sin embargo cuando introducimos al sistema fuerzas externas inhomogéneas, amortiguamiento entre otros, el sistema deja de ser integrable. A pesar de ello, estos sistemas no-integrables poseen soluciones solitónicas que tienen tiempos de vida muy largos (en la práctica se pueden considerar como infinito). En este trabajo y por simplicidad los llamaremos *solitones*.

Los solitones se forman gracias al balance entre la dispersión y la no linealidad; se necesitan ambas para su existencia (ver Fig. 1.3).

---

<sup>2</sup>Un sistema con N grados de libertad es *integrable* si existen N diferentes funciones que son constantes de movimiento

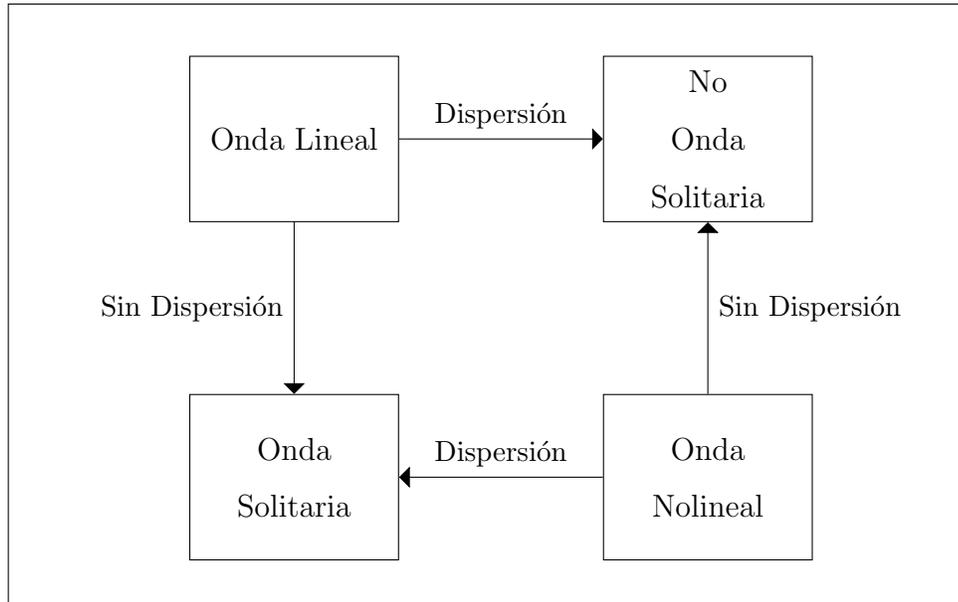


Figura 1.3: Diagrama que muestra las condiciones para producir una onda solitaria

## 1.4. Ecuaciones de Klein Gordon[12]

La ecuación Klein-Gordon es considerada como uno de los modelos matemáticos más importantes en la teoría cuántica de campos. La ecuación aparece en relatividad[13] y es usada para describir fenómenos ondulatorios dispersivos. También aparece en óptica no lineal[14] y en física del estado sólido[15]. Su forma es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = m^2 \phi, \quad (1.13)$$

la cual se obtiene de la siguiente densidad Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right\} + \frac{m^2}{2} \phi^2. \quad (1.14)$$

Cuando sustituimos en ec.(1.14)  $\phi^2$  por  $1 - \cos \phi$ , entonces la ecuación de campo (1.13) se convierte en :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = m^2 \sin \phi, \quad (1.15)$$

conocida como la ecuación seno de Gordon, que también puede escribirse así:

$$\phi_{tt} - c_0^2 \phi_{xx} + \omega_0^2 \sin \phi = 0, \quad (1.16)$$

donde  $c_0$  es la velocidad de fase máxima de la onda y  $\omega_0$  su frecuencia.

La ecuación seno de Gordon describe la evolución de dislocaciones en sólidos [9, 16] (usando como modelo físico una cadena de péndulos) y también sirve para describir un modelo simple de partículas elementales. Otra ecuación no lineal de Klein Gordon conocida como  $\lambda\phi^4$  es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = m^2(\phi - \phi^3), \quad (1.17)$$

con su correspondiente densidad Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right\} + \frac{m^2}{2} \left( \phi^2 - \frac{\phi^4}{2} \right). \quad (1.18)$$

Si usamos [17] las siguientes variables adimensionales;

$$t = \omega_0 t', \quad x = \frac{x'}{d}, \quad v_0 = \frac{v}{c_0}, \quad (1.19)$$

con el siguiente parámetro de discretitud:

$$d = \frac{c_0}{\omega_0}, \quad (1.20)$$

la forma canónica de (1.16) será la siguiente:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \text{sen } \phi = 0. \quad (1.21)$$

Investiguemos la solución de onda estacionaria ,  $\phi(\xi) = \phi(x - v_0 t)$ :

$$\phi_{tt} = \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} v_0^2, \quad \phi_{xx} = \frac{d^2 \phi}{d\xi^2}, \quad (1.22)$$

sustituyendo las ecs. (1.22) en (1.16) y multiplicándolo por  $\phi_\xi$  tenemos:

$$v_0^2 \phi_{\xi\xi} \phi_\xi - \phi_{\xi\xi} \phi_\xi + \text{sen } \phi \phi_\xi = 0, \quad (1.23)$$

$$(v_0^2 - 1) \int \phi_\xi d\phi_\xi + \int \text{sen } \phi d\phi = 0, \quad (1.24)$$

$$\frac{1}{2}(v_0^2 - 1)\phi_\xi^2 - \cos \phi = C, \quad (1.25)$$

$$\frac{1}{2}(v_0^2 - 1)\phi_\xi^2 + 1 - \cos \phi = H. \quad (1.26)$$

La figura 1.4 muestra el mapa de fase para un sistema descrito por la ecuación (1.26).

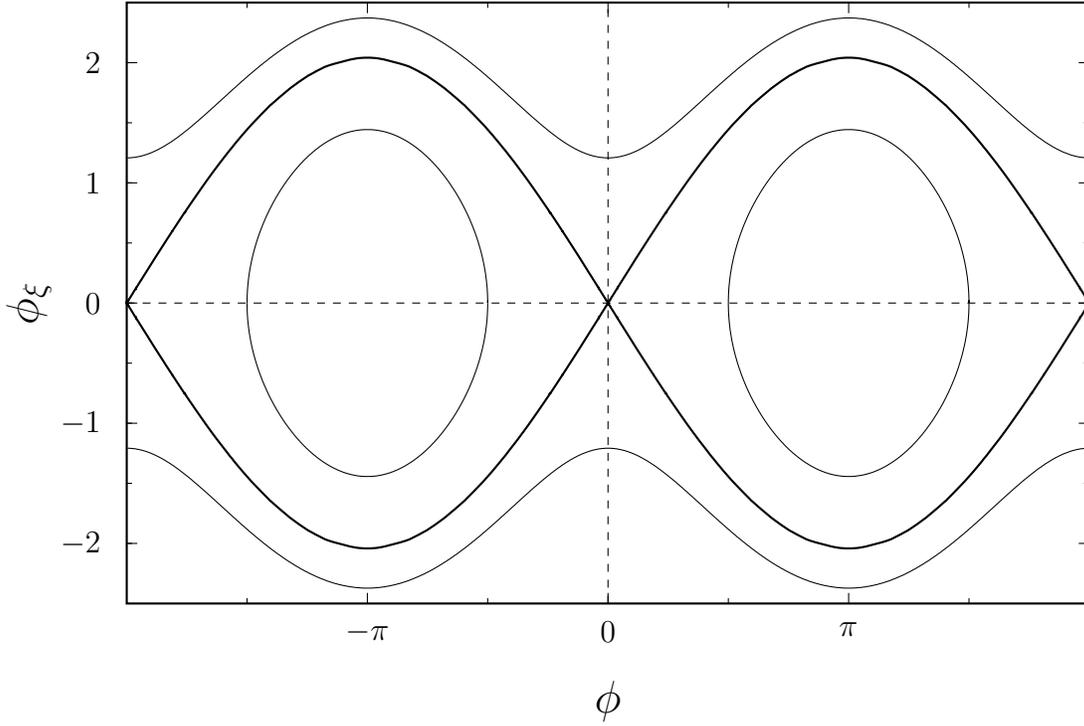


Figura 1.4: Diagrama de fase para la ec. (1.26) cuando  $v_0^2 - 1 < 0$  si  $H = 0$ , representa al kink y antikink, si  $H < 0$  se observan las vueltas que efectúa el solitón, si  $H > 0$  tenemos trayectorias cerradas

Las regiones para valores diferentes de  $H$  corresponden a diferentes tipos de movimientos ondulatorios:  $H = 0$  corresponde a solitones (kinks) que describen una vuelta completa de  $2\pi$  y  $H \neq 0$  se refiere a ondas periódicas no lineales y espirales.

Para el caso en el que  $v_0^2 - 1 < 0$  y  $H = 0$  tenemos de (1.26):

$$\pm \sqrt{\frac{v_0^2 - 1}{2}} \frac{d\phi}{d\xi} \pm \sqrt{1 - \cos \phi} = \frac{d\phi}{d\xi} \pm \frac{2 \operatorname{sen}(\phi/2)}{\sqrt{v_0^2 - 1}} = 0, \quad (1.27)$$

separando las variables obtenemos lo siguiente:

$$\int_{\phi_0/2}^{\phi/2} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi} = \pm \frac{\xi}{\sqrt{1-v_0^2}}, \quad (1.28)$$

cuyo resultado es el siguiente, usando las variables con sus dimensiones:

$$\phi = 4 \arctan \left\{ \exp \left[ \pm \frac{\omega_0}{c_0} \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \right] \right\}. \quad (1.29)$$

El signo (+) pertenece al solitón (kink) y el signo (-) al antisolitón (antikink) como se puede ver en la Fig. 1.5.

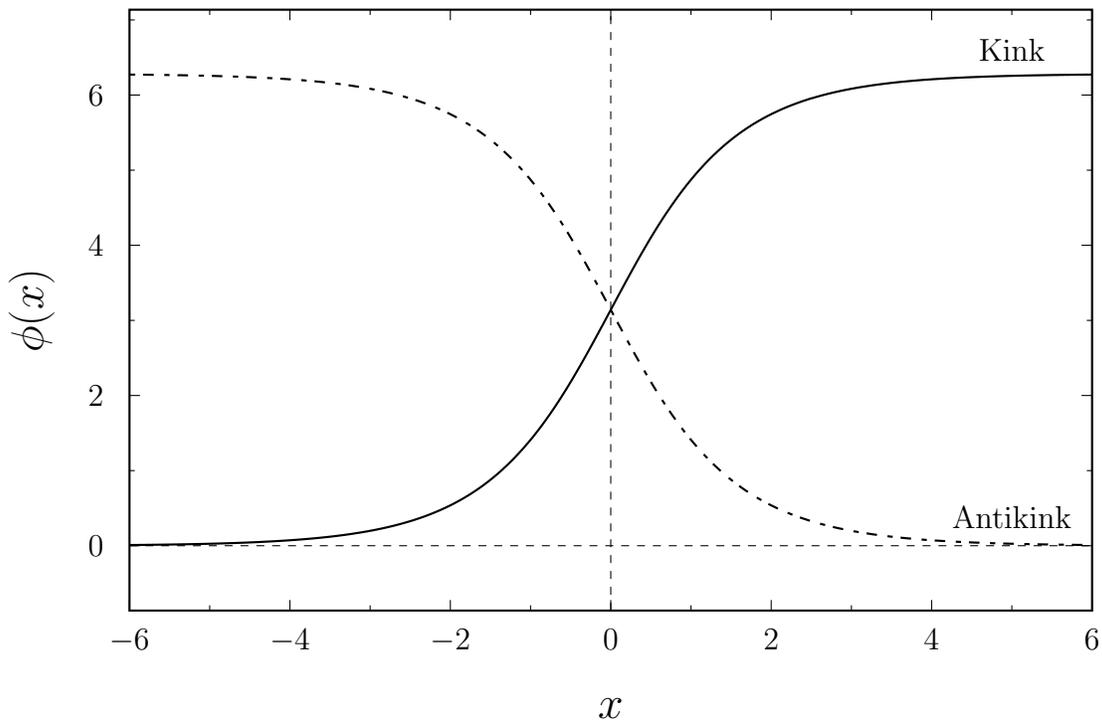


Figura 1.5: Perfiles de los solitones kink y antikink pertenientes al ec. seno de Gordon

Estos solitones son extremadamente estables. Bajo la influencia de la fricción, ellos reducen su velocidad y eventualmente se detienen; en el reposo pueden vivir “eternamente”.

En la ecuación (1.29) uno puede ver que un solitón no puede viajar más rápido que  $c_0$  el cual representa la velocidad de ondas lineales (en sólidos, es la velocidad longitudinal del sonido). Cuando la velocidad del solitón  $v$  se aproxima a  $c_0$ , el solitón permanece estable pero su ancho se hace más estrecho debido a la contracción de Lorentz en su perfil. Así, los solitones topológicos se comportan como partículas relativistas.

## 1.5. Sistemas Dinámicos[18, 19]

Un sistema dinámico es un modelo aproximado de un fenómeno natural, el cual está caracterizado por ciertas variables que cambian en el tiempo. La relación que existen entre estas variables que caracterizan el modelo queda establecido a través de una ecuación matemática, la cual es conocida como “ecuación de movimiento”. En el campo de la física las ecuaciones de movimiento son ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones diferenciales parciales.

Cuando la variable independiente no aparece explícitamente en la ecuación, se dice que es una ecuación “autónoma” [19]. Su forma es la siguiente:

$$\frac{dy}{dt} = f(y). \quad (1.30)$$

Toda ecuación diferencial ordinaria puede descomponerse en un sistema de ecuaciones autónomas. Sobre todo para una ecuación diferencial no lineal, el tratamiento consiste en conocer gráficamente sus soluciones, ya que nos vemos imposibilitados de resolverla analíticamente. El objetivo es obtener una información cualitativa acerca de sus soluciones sin resolver realmente la ecuación, es decir, determinar la estabilidad de las aproximaciones cerca de sus puntos de equilibrio.

Dada un sistema autónomo:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = g(x, y), \\ \frac{dx}{dt} = f(x, y); \end{cases} \quad (1.31)$$

los diferenciales exactos para  $f$  y  $g$  son:

$$dg(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy, \quad df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy; \quad (1.32)$$

denotemos a los incrementos de  $x$  y  $y$  como:

$$\eta = \frac{dx}{dt}, \quad \xi = \frac{dy}{dt}; \quad (1.33)$$

tal que las ecs.(1.32) para una derivada con respecto a  $t$  se convierten en:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x} \eta + \frac{\partial g}{\partial y} \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \eta + \frac{\partial f}{\partial y} \xi; \quad (1.34)$$

este resultado puede escribirse en una notación matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

o en forma compacta:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (1.36)$$

Como nuestras incógnitas son  $\eta$  y  $\xi$ , la ec.(1.36) nos plantea un problema de autovalores y autovectores para la matriz  $\mathbf{A}$ . Para hallar sus autovalores buscaremos soluciones que tengan la siguiente forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}e^{rt}, \quad (1.37)$$

por lo que imponemos la siguiente condición:

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{C} = 0, \quad (1.38)$$

siendo  $r$  un autovalor y  $\mathbf{C}$  un autovector. Existen diferentes casos para cada autovalor los cuales se conocen como *puntos de equilibrio* del sistema;

- Nudo.
- Punto de Ensilladura.
- Punto Espiral
- Centro

Nuestro objetivo es caracterizar la ecuación diferencial de acuerdo al patrón geométrico formado por las trayectorias. Cada caso será discutido con su respectivo diagrama de fase.

## 1.6. Puntos de Equilibrio[20]

- Nodo, autovalores reales distintos con igual signo:

La solución viene dada por la ecuación:

$$\mathbf{x} = d_1 C^1 e^{r_1 t} + d_2 C^2 e^{r_2 t}. \quad (1.39)$$

Como lo indica la ec.(1.39) si  $r_1 < r_2 < 0$ , a medida de que  $t \rightarrow \infty$   $x \rightarrow 0$ . Una gráfica típica para este caso se aprecia en Fig. 1.6. Podemos ver que para cualquier valor inicial el sistema se moverá hacia una región definida por los autovalores.

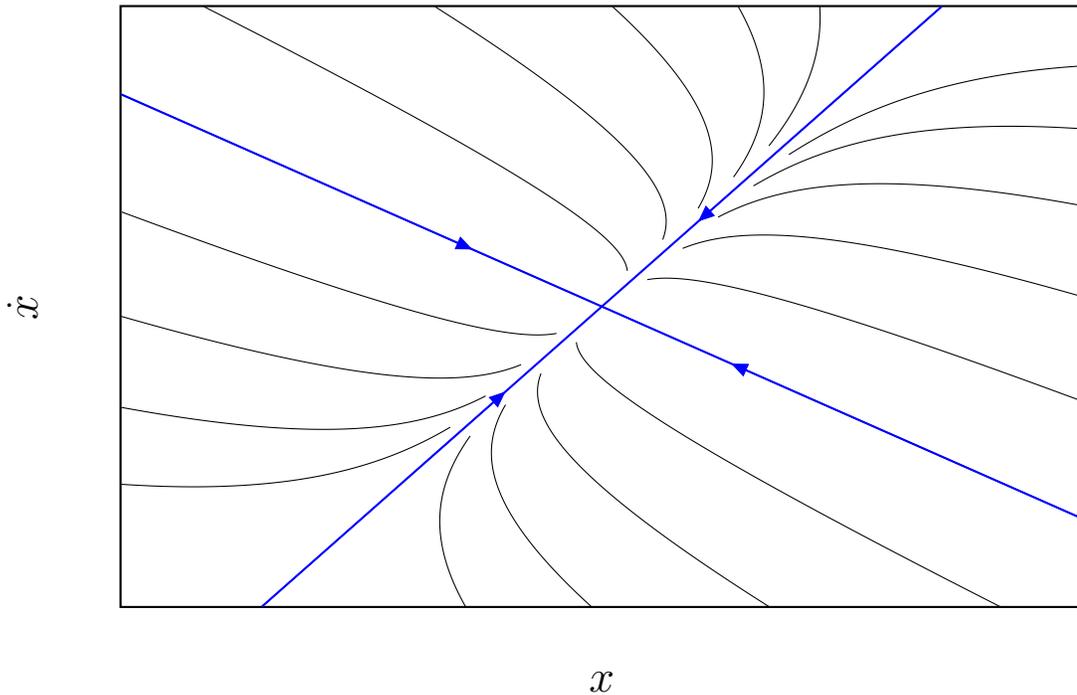


Figura 1.6: Diagrama de fase correspondiente a un nodo de hundimiento o punto nodal, siendo  $r_1 < r_2 < 0$

Cuando los autovalores son positivos el efecto es contrario, todos los puntos se alejan del centro. A este punto crítico se le conoce como “punto nodal” y es de hundimiento si los autovalores son negativos, en cambio si los autovalores son positivos el punto es un nodo de fuente. En el ejemplo mostrado en la fig.(1.6) las soluciones se acercan al nodo (cuando  $t \rightarrow \infty$ ) a través de la separatriz rayada.

Dependiendo del signo de los autovalores el punto nodal puede ser estable o inestable.

- Punto de ensilladura, autovalores reales y distintos con signos opuestos

La solución viene dada por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{x} = d_1 C^1 e^{r_1 t} + d_2 C^2 e^{r_2 t} \quad (1.40)$$

donde  $r_1 > 0$  y  $r_2 < 0$ .

Se puede apreciar (ver Fig. 1.7) que las únicas soluciones que se acercan al punto crítico son aquellas que comienzan sobre la línea rayada, lo contrario ocurre cuando una solución comienza en la separatriz sólida. Este punto crítico es conocido como “punto de ensilladura”

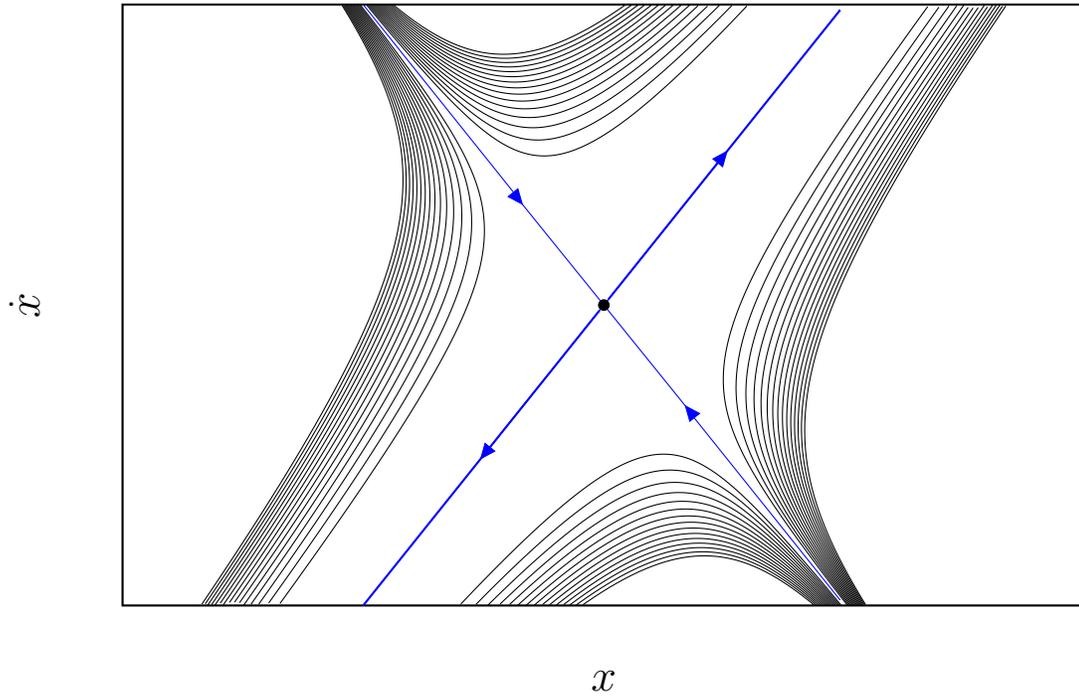


Figura 1.7: Diagrama de fase correspondiente a un punto de ensilladura

En consecuencia, los puntos de ensilladura son siempre inestables debido a que todas las trayectorias se alejan entre ellas cuando  $t \rightarrow 0$

- Punto Espiral, autovalores complejos

Cuando los autovalores tienen la forma  $\lambda \pm i\mu$  siendo  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , el sistema autónomo es el siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (1.41)$$

siendo su solución:

$$\mathbf{x} = e^{\lambda t} (C^1 e^{it} + C^2 e^{-it}) \quad (1.42)$$

Si la parte real de los autovalores es positiva  $\lambda > 0$  las soluciones se alejan en espiral del punto crítico, pero si  $\lambda < 0$  o antihorario (ver Fig. 1.8). Las trayectorias que siguen estas soluciones pueden ser en sentido horario o antihorario. Así cuando  $\lambda < 0$  los puntos de espiral son asintóticamente estables.

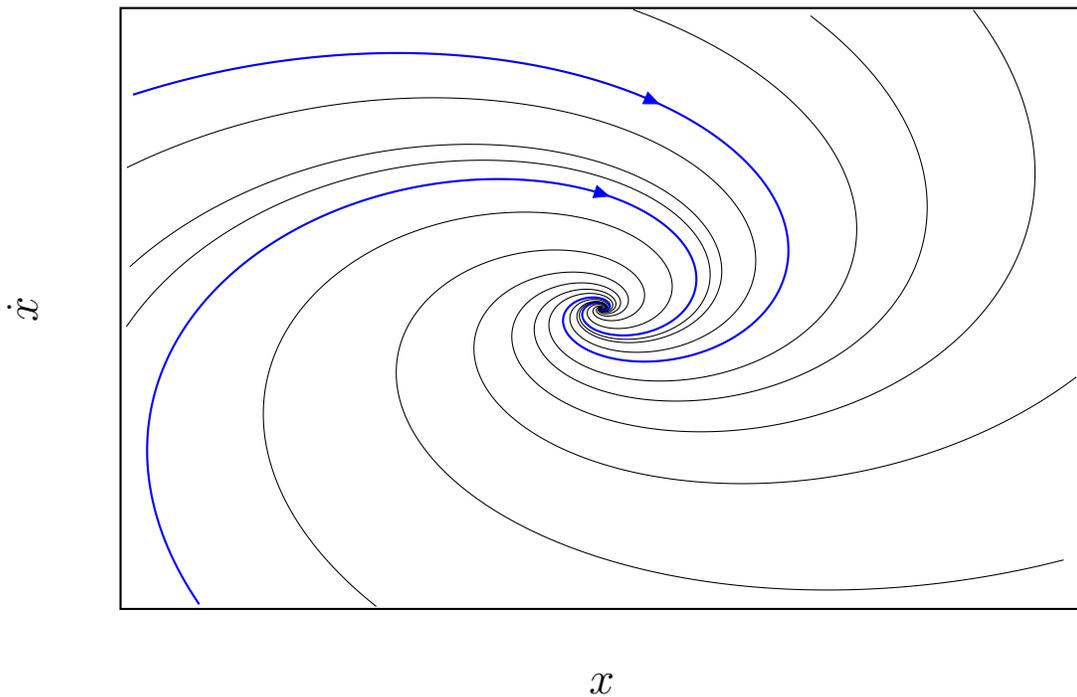


Figura 1.8: Diagrama de fase correspondiente a un punto espiral, en este caso el sentido es horario

- Centro, autovalores Imaginarios puros

Como ahora  $\lambda = 0$  el sistema a resolver es el siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (1.43)$$

La figura 1.9 muestra el diagrama de fase correspondiente a oscilaciones periódicas.

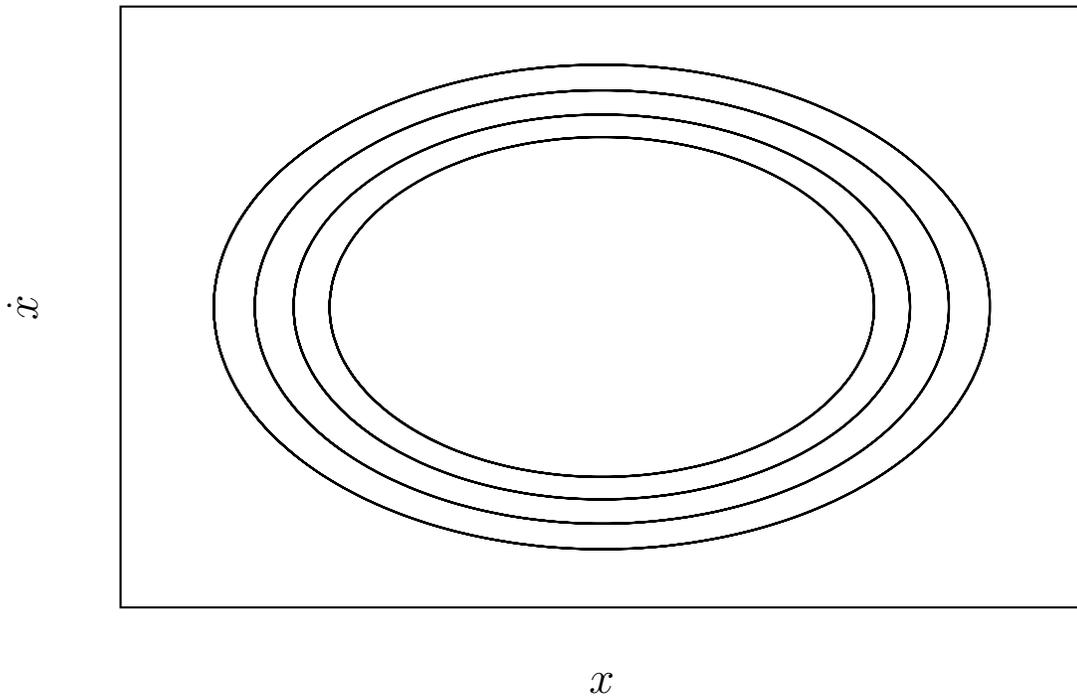


Figura 1.9: Diagrama de fase correspondiente a un centro, las trayectorias indican un movimiento periódico

## 1.7. Ecuación de Duffing[18]

La ecuación de Duffing modela un oscilador no lineal que describe el movimiento de una partícula clásica dentro del potencial biestable:

$$V(x) = -A\frac{x^2}{2} + B\frac{x^4}{4}, \quad (1.44)$$

con  $A > 0$  y  $B > 0$ , se trata de un potencial de doble pozo formado por dos mínimos simétricos respecto a una barrera de potencial centrada en  $x = 0$ . Este potencial se conoce como *potencial de Duffing*. Si elegimos  $A = B = 1$ , los mínimos se encontrarán en  $x \pm 1$  y tendrán un potencial de  $V = -1/4$  (ver Fig. 1.10).

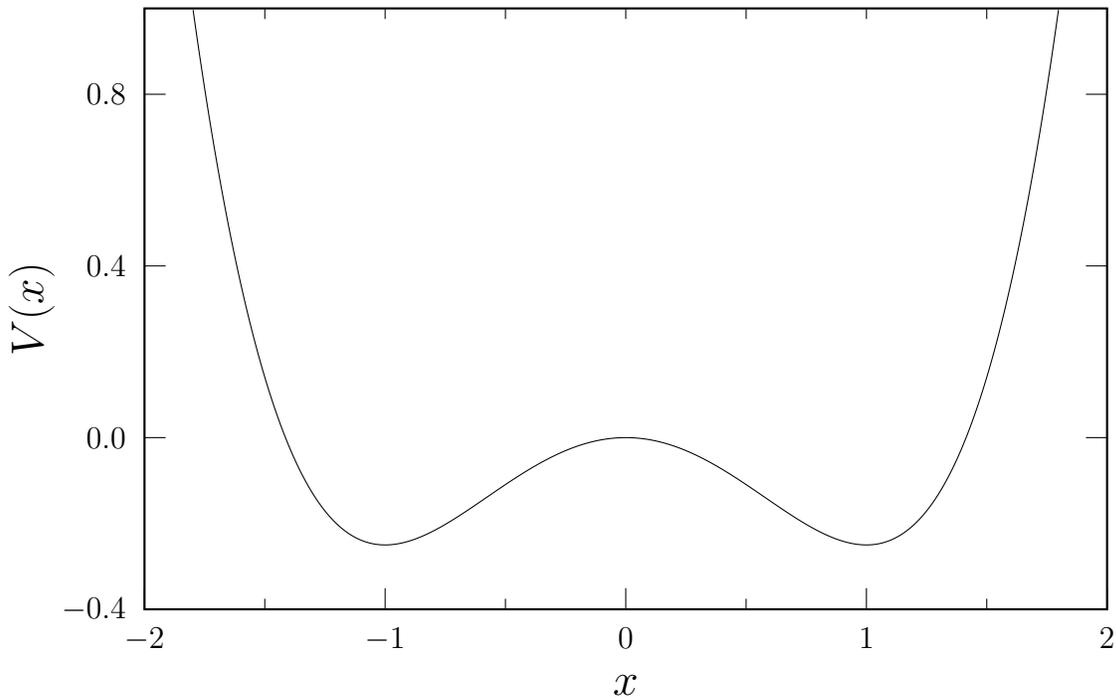


Figura 1.10: Potencial de Duffing con  $A = B = 1$ .

A través de las leyes de la dinámica clásica, el movimiento de la supuesta partícula encerrada en nuestro doble pozo vendrá determinado por la ecuación:

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad (1.45)$$

donde  $F$ , la fuerza a la que se ve sometida la partícula, no es más que el gradiente negativo del potencial, es decir:

$$F = -\frac{dV(x)}{dx} = x - x^3, \quad (1.46)$$

y si tomamos la masa de la partícula igual a la unidad, la ecuación diferencial que determina el movimiento de la partícula queda de la forma:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = x - x^3. \quad (1.47)$$

Resolvamos de forma numérica la ec.(1.47), y representemos la solución como la posición y su diagrama de fase:

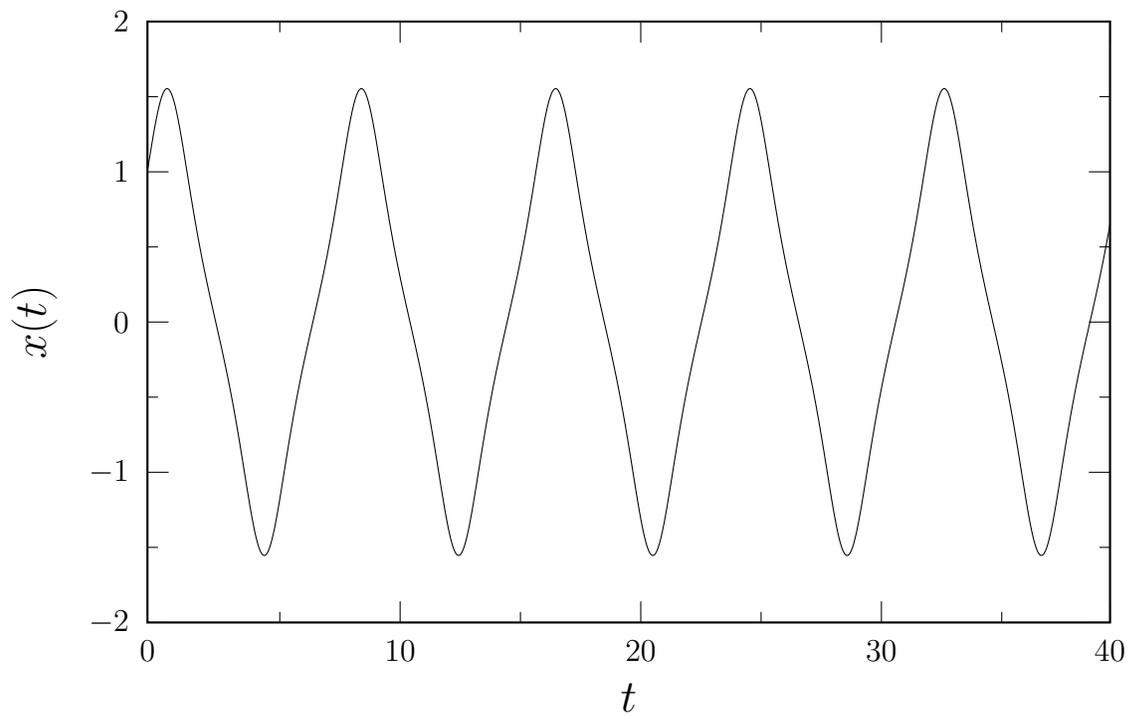


Figura 1.11: Posición para un oscilador de Duffing de masa unitaria, con  $x_0 = 1$  y  $v_0 = 1$

La posición (ver Fig. 1.11) indica que el oscilador posee un movimiento periódico en el tiempo, así como también lo evidencia su diagrama de fase, Fig. 1.12.

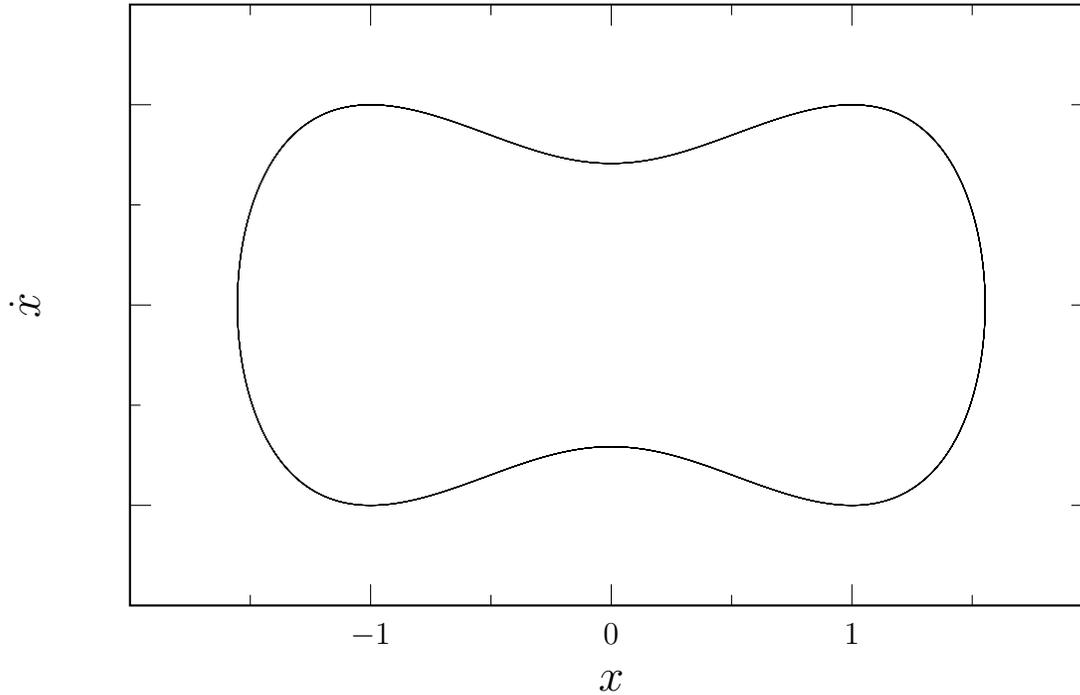


Figura 1.12: Diagrama de fase para el oscilador de Duffing, indicando una trayectoria cerrada (movimiento periódico)

Este comportamiento era de esperarse, puesto que no existe en el oscilador ningún término disipativo que impida la conservación de la energía.

La ecuación de Duffing con amortiguamiento  $\gamma$  y una fuerza externa periódica de amplitud  $f_0$  con frecuencia  $\omega$ ;

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} - x + x^3 = f_0 \cos(\omega t), \quad (1.48)$$

muestra las siguientes dinámicas;

- Movimiento Periódico

En el régimen estacionario la partícula realiza oscilaciones periódicas como se puede apreciar en la Fig. 1.13

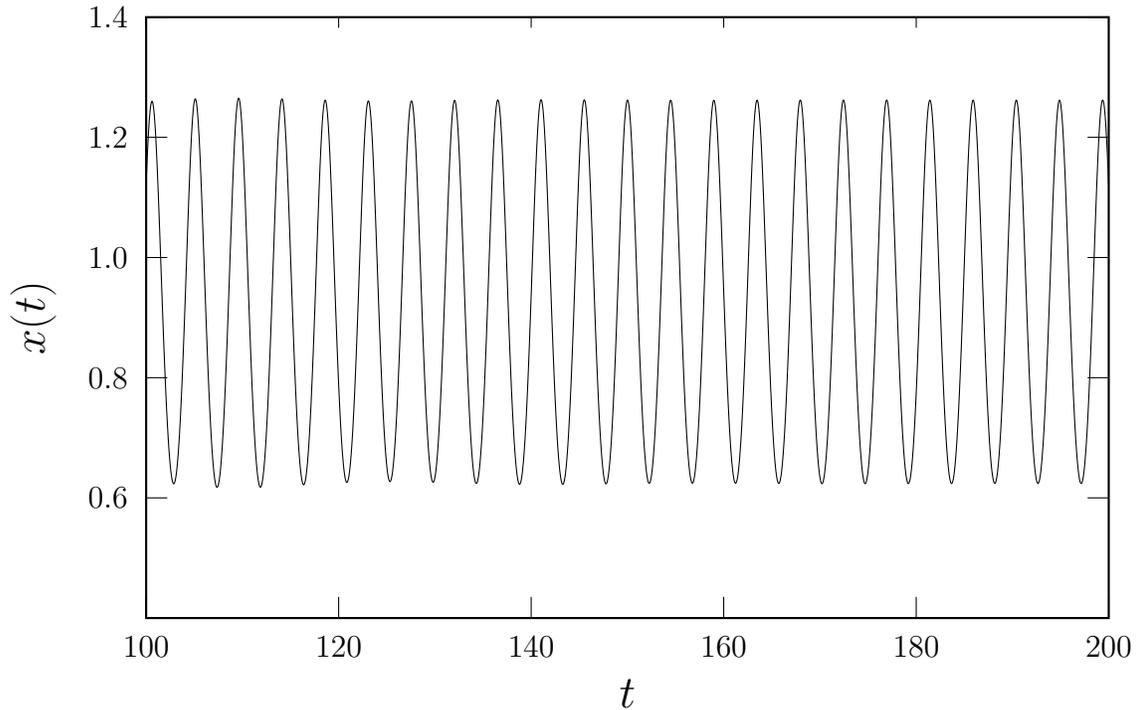


Figura 1.13: Posición del oscilador en el tiempo, usando  $x_0 = 0,0$ ,  $v_0 = 0,0$ ,  $\gamma = 0,1$ ,  $f_0 = 0,1$  y  $\omega = 1.4$

- Transición al Caos

Si aumentamos la amplitud vemos de la Fig. 1.14 como se duplica el período del movimiento, ahora se necesita dar dos vueltas para volver a su posición original.

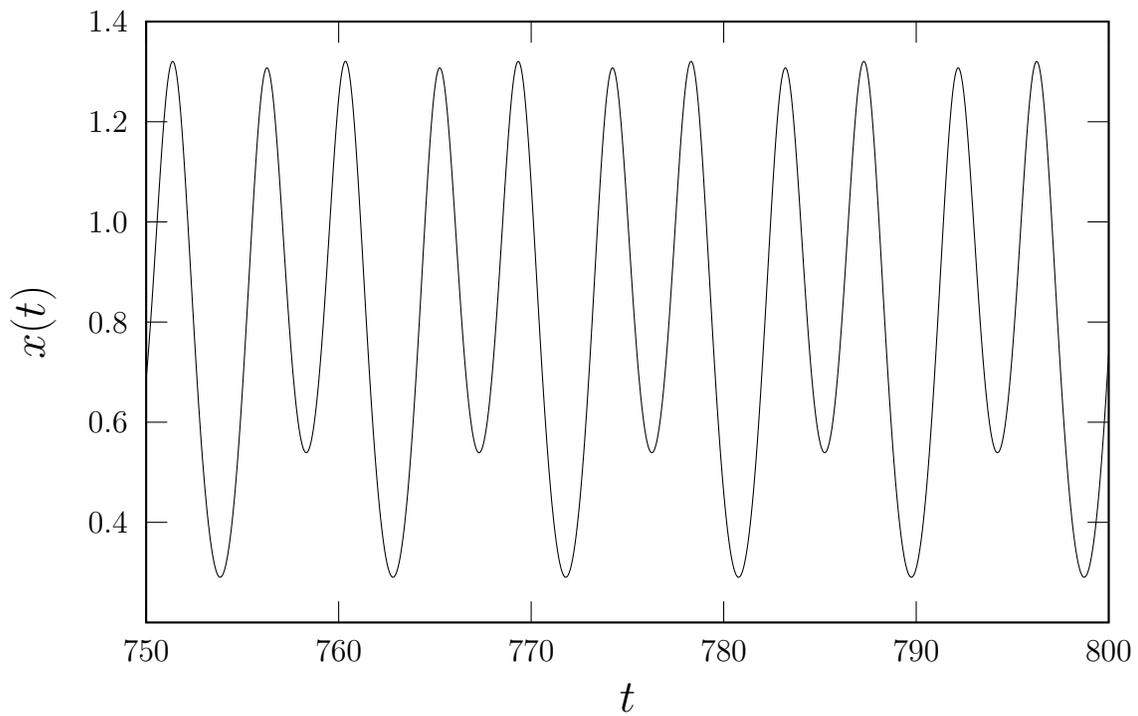


Figura 1.14: Posición del oscilador en el tiempo, usando  $x_0 = 0, 0$ ,  $v_0 = 0, 0$ ,  $\gamma = 0, 1$ ,  $f_0 = 0, 32$  y  $\omega = 1.4$

- Caos

Aumentando aun más la amplitud nunca encontraremos un movimiento periódico por más que extendamos el tiempo, el movimiento es completamente caótico (ver Fig. 1.15)

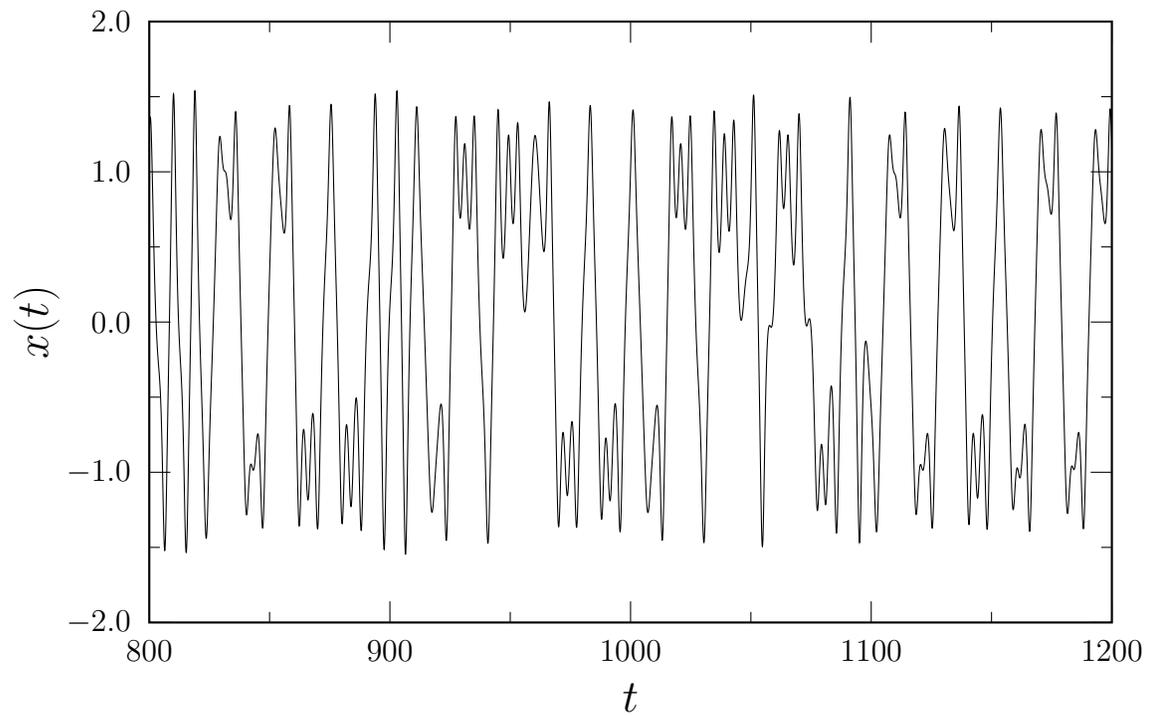


Figura 1.15: Posición del oscilador en el tiempo, usando  $x_0 = 0, 0$ ,  $v_0 = 0, 0$ ,  $\gamma = 0, 1$ ,  $f_0 = 0, 34$  y  $\omega = 1.4$

## 1.8. Bifurcaciones

Consideremos las soluciones del oscilador de Duffing sin amortiguamiento:

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0. \quad (1.49)$$

Uno puede graficar los puntos de equilibrio como una función de  $\alpha$ . Cuando  $\alpha$  cambia de positivo a negativo, un punto de equilibrio se divide en tres puntos. Dinámicamente, un centro (ver Fig. 1.16) es transformado en un punto de ensilladura en el origen y dos centros (ver Fig. 1.17);

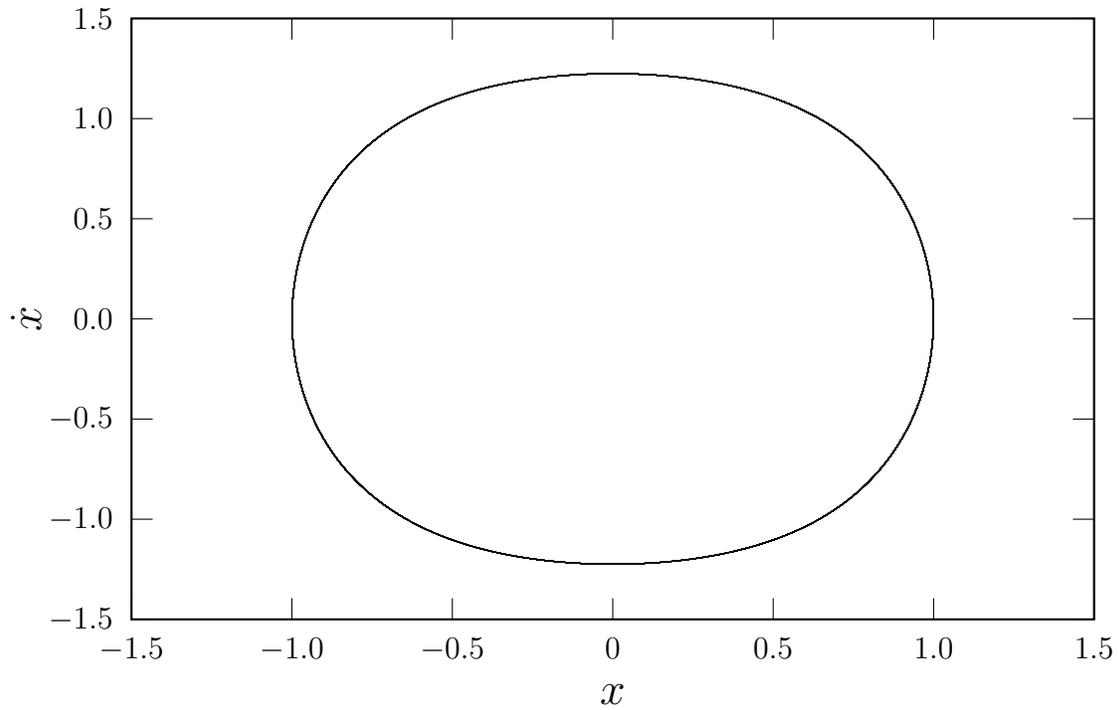


Figura 1.16: Diagrama de fase para  $\alpha = 1$  y  $\beta = 1$ , con  $x_0 = 1$  y  $v_0 = 0$

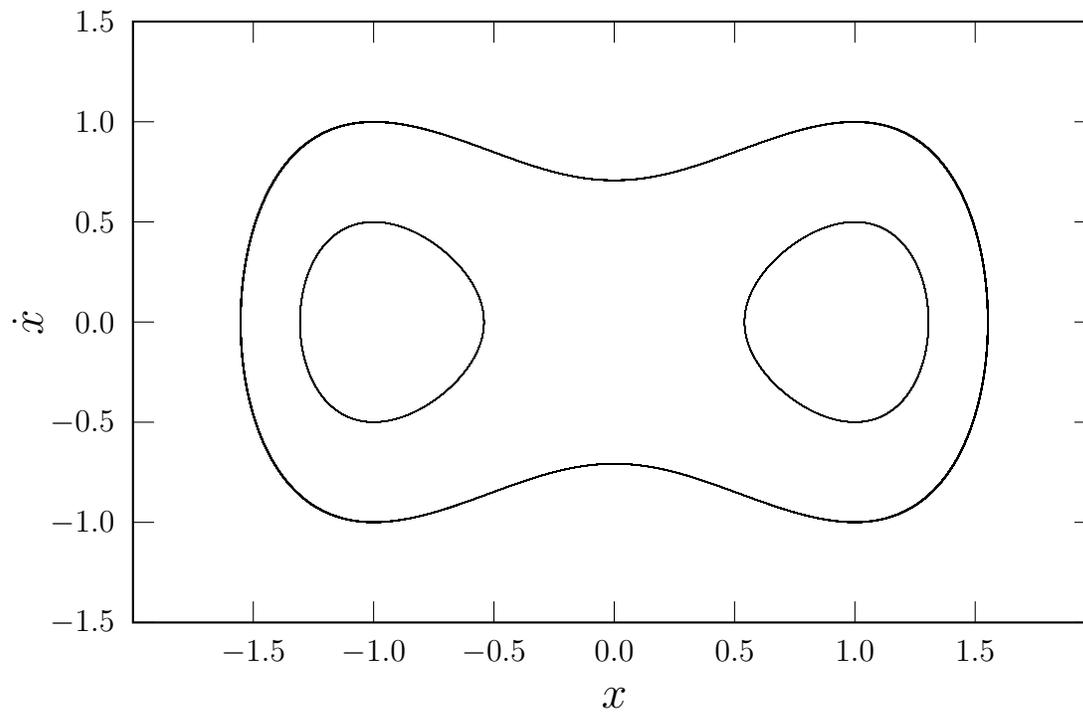


Figura 1.17: Diagrama de fase para  $\alpha = -1$  y  $\beta = 1$ , con  $x_0 = 1$  y  $v_0 = 0$  donde se puede apreciar los dos centros creados

Este tipo de bifurcación es conocida como *pitchfork*. Por lo tanto  $\alpha = 0$  es un valor de bifurcación crítico.

## 1.9. Atractores[18]

Existen tres tipos de movimientos dinámicos clásicos:

- Equilibrio
- Movimiento Periódico o Ciclo Límite
- Movimiento Cuasiperiódico

Estos tres estados son llamados *atractores*, ya que si existe alguna forma de amortiguamiento presente en nuestro sistema los efectos transitorios al decaer darán paso al estado estacionario y el sistema será *atraído* a uno de los anteriores tipos de movimientos. Sin embargo existen otros movimientos en vibraciones no lineales que no entran en el grupo anterior de atractores “clásicos”. Estos son los movimientos caóticos los cuales son impredecibles cuando existe una pequeña incertidumbre en las condiciones iniciales y por eso se les conocen como *atractores extraños*.

A continuación introduciremos una fuerza externa periódica a la ec.(1.49):

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 + \gamma \dot{x} = \delta \cos(\omega t) \tag{1.50}$$

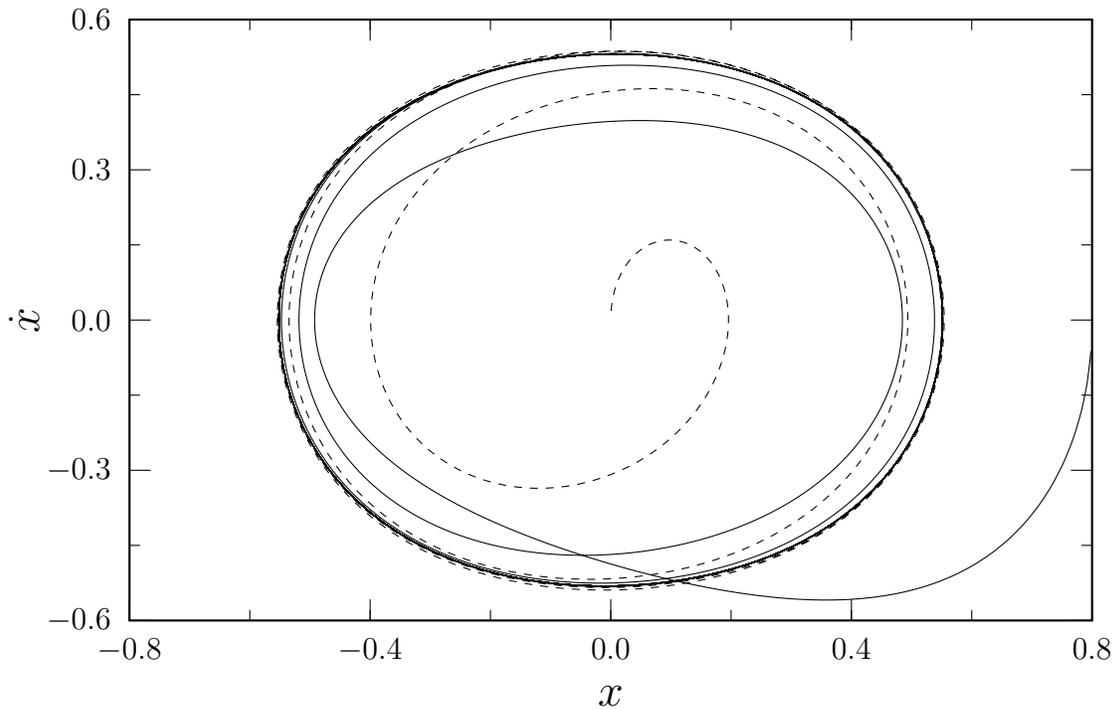


Figura 1.18: Diagrama de fase para la ecuación (1.50) donde  $f_0 = 0.3, \gamma = 0.4$  y  $\omega = 1.0$  donde la línea rayada indica el comienzo del movimiento con la posición y velocidad inicial nulos, mientras la línea gruesa comienza en  $(0.8, 0)$

En la figura (1.18) vemos que el sistema entra en una dinámica de la cual no puede salir, es un *ciclo límite*. Este ciclo no depende de las condiciones iniciales, es un valor tope del desplazamiento para el cual el movimiento ni crece ni decrece con el tiempo. Las trayectorias que comienzan fuera del ciclo límite ( $x_0 = 1$ , línea rayada) entran en este ciclo, mientras que las trayectorias que empiezan dentro del ciclo ( $x_0 = 0.24$ , línea rayada con puntos) salen hacia dicho ciclo.

Veremos que a medida que la fuerza externa va aumentando en su magnitud, el movimiento de la partícula será más complejo hasta convertirse en caótico. Fijaremos  $\alpha = -1, \gamma = 0.1$  y  $\omega = 1.4$  en todo lo que sigue, y empezaremos con la amplitud de la

fuerza externa  $\delta = 0.1$ . Ahora consideremos la situación en la que la partícula está inicialmente en reposo  $v_0 = 0$ , en  $x = 0$ , es decir, en la posición de equilibrio inestable. Integraremos la ecuación de movimiento hasta  $t = 200$ . Mostramos a continuación el aspecto que toma la trayectoria en el espacio de fases (ver Fig. 1.19):

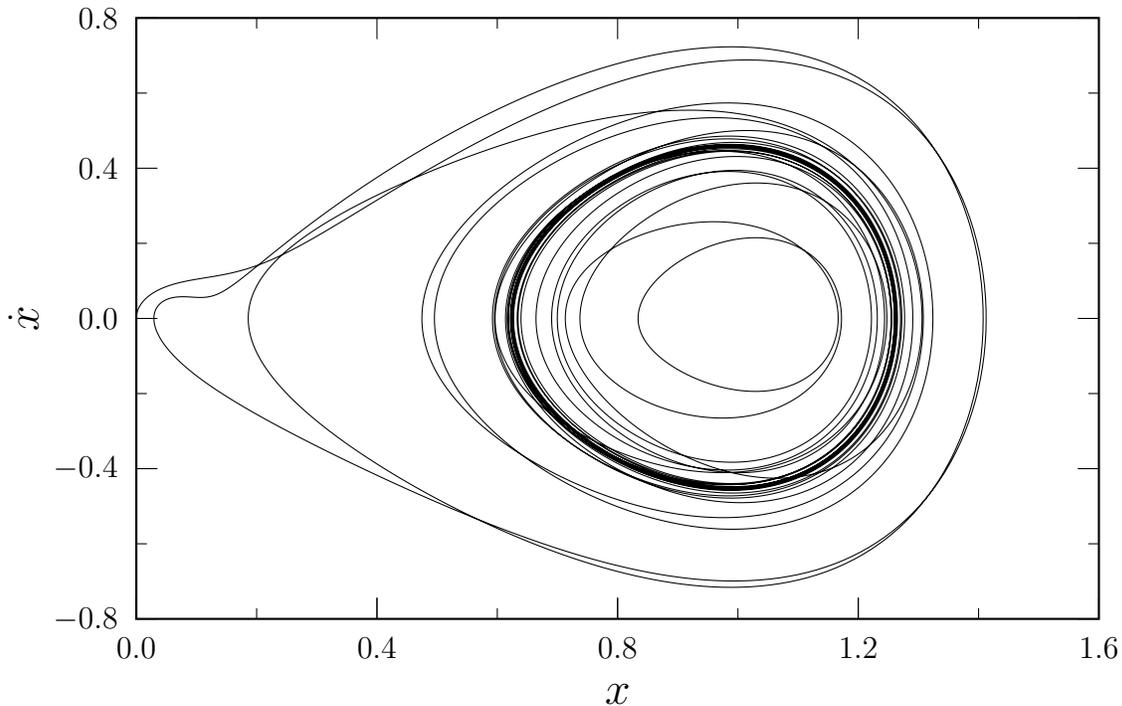


Figura 1.19: Diagrama de fase para el oscilador de Duffing con  $t < 154$ , donde se puede observar la formación de un ciclo límite

Su aspecto es complicado ya que estamos incluyendo el estado transitorio del sistema. Esta imagen es la que siempre aparecerá si iteramos en tiempos suficientemente grandes. Por ejemplo, si representamos la trayectoria en el plano de fase con  $150 < t < 200$  se obtiene una figura cuyo aspecto es mucho más sencillo que el de la figura anterior (ver Fig. 1.20).

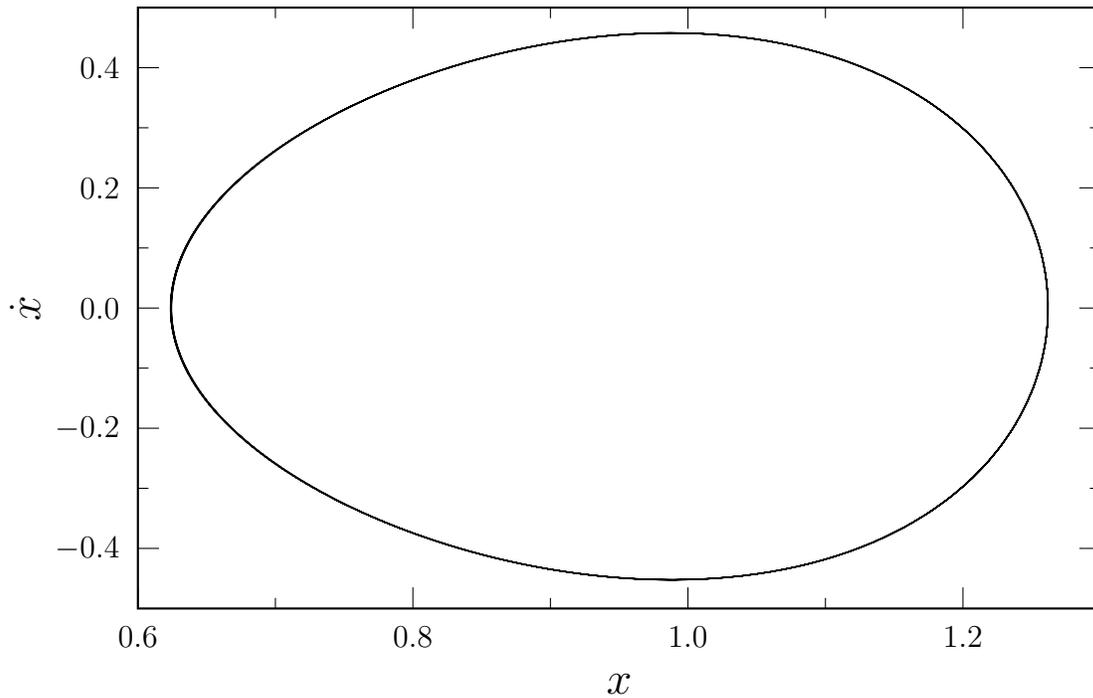


Figura 1.20: Diagrama de fase para el oscilador de Duffing con  $150 < t < 200$ , donde el ciclo límite queda bien definido

Lo que se observa en la Fig. 1.20 es simplemente una órbita periódica, una trayectoria cerrada. Su período es justamente igual al período  $T$  de la fuerza externa  $T = 2\pi/\omega \approx 4,48$ .

## 1.10. Transición al Caos

A continuación vamos a indagar cómo cambian las trayectorias en el plano de fases cuando cambia la amplitud de la fuerza externa.

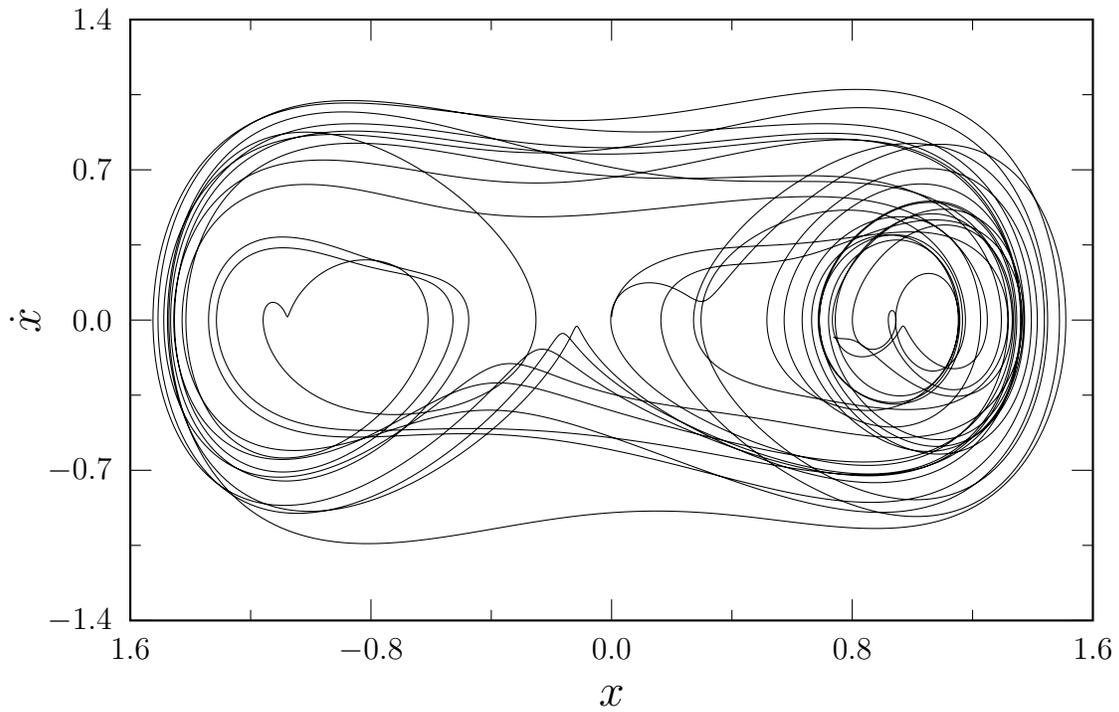


Figura 1.21: Diagrama de fase para el oscilador de Duffing con  $t < 200$ , el movimiento al principio es caótico

Como se puede observar en la Fig. 1.21, la partícula se ha movido dentro de los dos pozos. Sin embargo, de nuevo, esta complejidad se debe a que se dibuja el estado transitorio: la complejidad desaparece cuando trazamos la trayectoria en el régimen estacionario (ver Fig. 1.22).

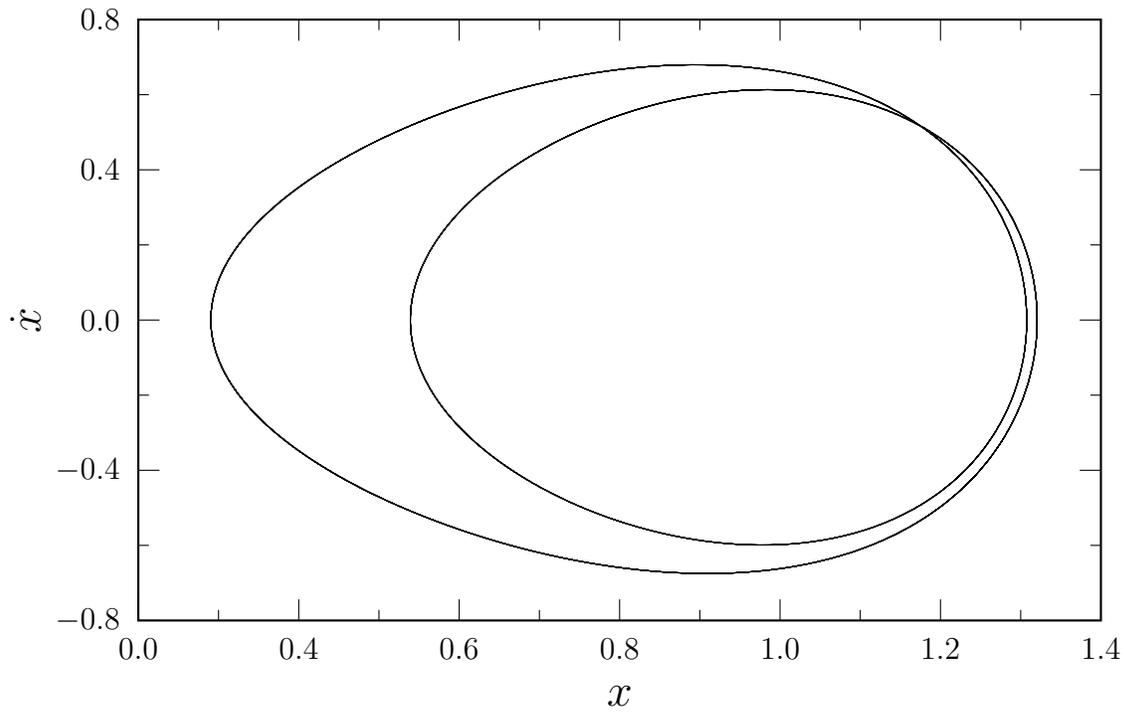


Figura 1.22: Diagrama de fase para el oscilador de Duffing con  $750 < t < 800$ , se observa una duplicación del período

En la Fig. 1.22 vemos que la partícula, en el régimen estacionario, se limita a oscilar dentro del pozo derecho (alrededor del mínimo situado en  $x = 1$ ) y da dos vueltas completas antes de volver al punto desde el cual partió. Ahora el período se ha doblado para alcanzar el valor de  $2T = 4\pi/\omega$ . Incrementemos ahora la magnitud de la fuerza externa.

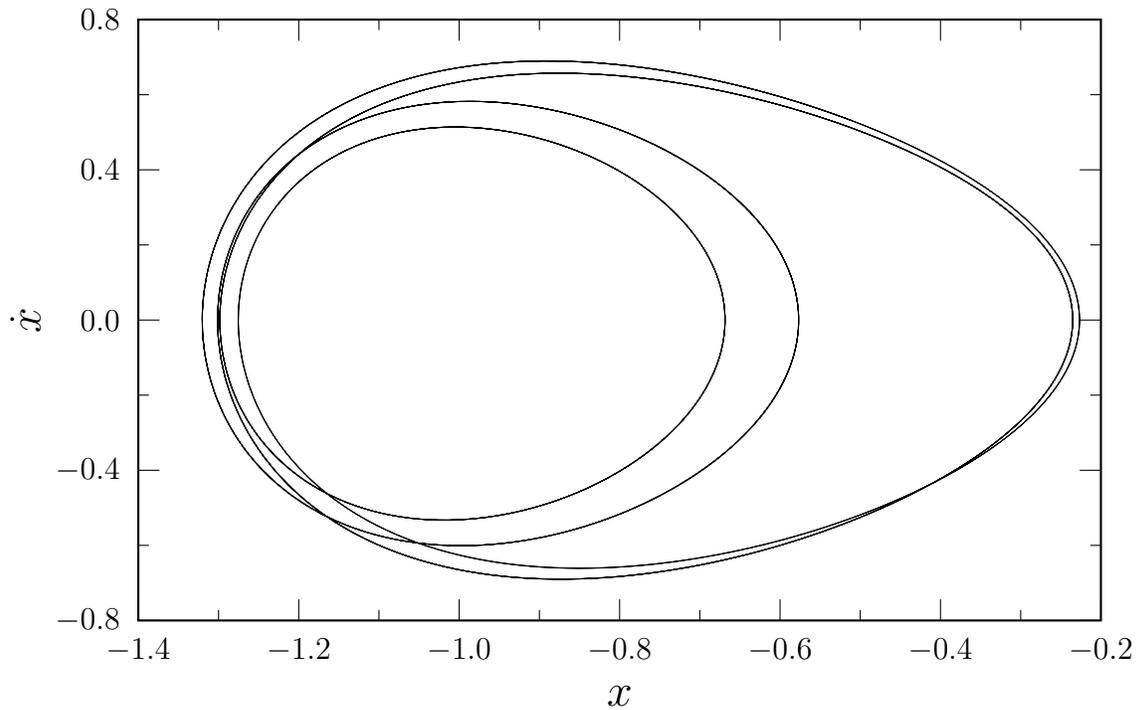


Figura 1.23: Diagrama de fase para el oscilador de Duffing donde  $f_0 = 0.338705$  para  $750 < t < 800$ , con duplicación del período para el sistema Fig. 1.22

Ahora la órbita periódica, antes de volver al punto de partida y repetirse, gira cuatro veces en torno al mínimo en  $x = 1$ . Parece natural pensar que el período se ha duplicado de nuevo hasta alcanzar el valor de  $4T = 8\pi/\omega$ . Esto es efectivamente lo que sucede tal como uno puede comprobar mediante ensayo y error. Lo que estamos viendo no es más que el comienzo de una secuencia de duplicación de período que es una forma característica mediante la cual los sistemas alcanzan el régimen caótico. Veamos qué pasa cuando la amplitud de la fuerza motriz se incrementa hasta  $\delta = 0.35$ .

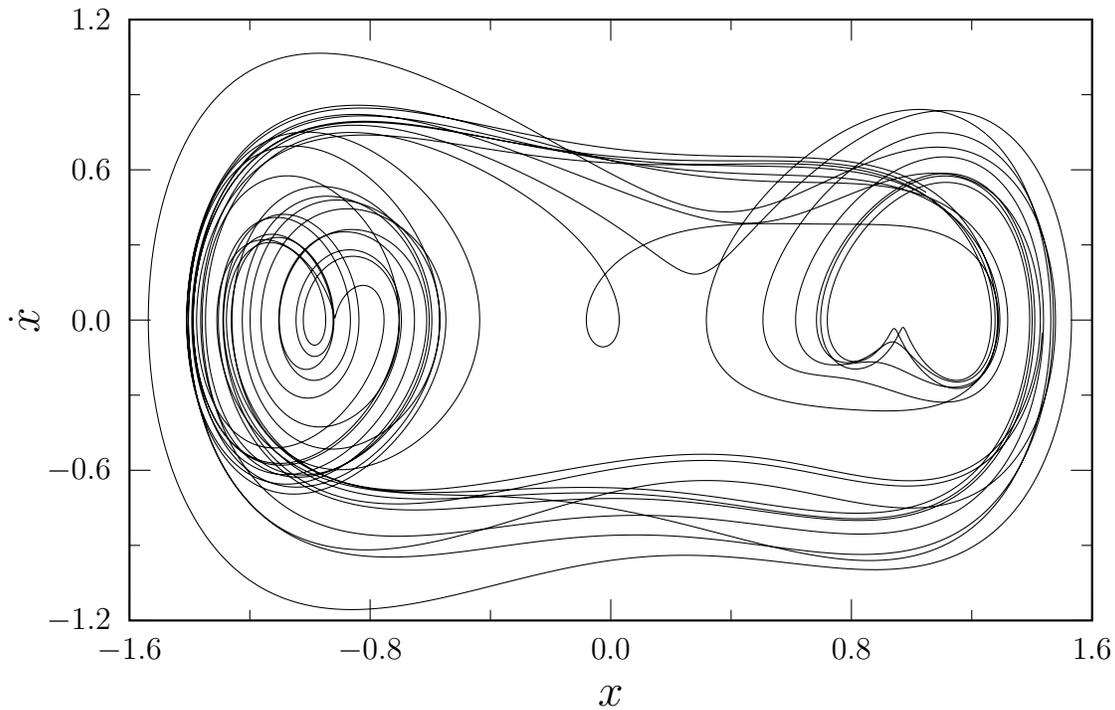


Figura 1.24: Diagrama de fase para el oscilador de Duffing con  $1800 < t < 2000$  siendo  $f_0 = 0.35$ , demostrando que ha entrado en un régimen caótico

A pesar de que hemos aumentado el tiempo de iteración observamos que las trayectorias nunca tienden hacia una órbita periódica. Un estudio detallado de los valores en los cuales se producen las duplicaciones de los períodos mostraría que la secuencia:

$$\epsilon_n = \frac{\delta_n - \delta_{n-1}}{\delta_{n+1} - \delta_n} \quad (1.51)$$

tienden a la constante de Feigenbaum  $\epsilon = 4.6692$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , siendo  $\epsilon_n$  el valor de  $\delta$  para el que se produce la  $n$ -ésima duplicación de período. Esta constante es “universal”, es decir, aparece en los escenarios en los que se alcanza el régimen caótico a través de bifurcaciones (duplicaciones) de período.

## 1.11. Secciones de Poincaré

Un modo útil de analizar el paso del comportamiento periódico al comportamiento caótico es mediante un diagrama conocido como sección de Poincaré. En vez de dibujar la trayectoria completa (es decir, los puntos solución  $x(t)$ ,  $v(t)$  para todo instante) tal como hemos hecho hasta ahora, en la sección de Poincaré se representan los puntos  $(x(t), v(t))$  de la trayectoria para valores discretos del tiempo separados por el período  $T = 2\pi/\omega$  de la fuerza externa.

Cuando volvemos a las condiciones de la Fig. 1.23 observamos como la sección de Poincaré (ver Fig. 1.25) nos muestra el número de períodos:

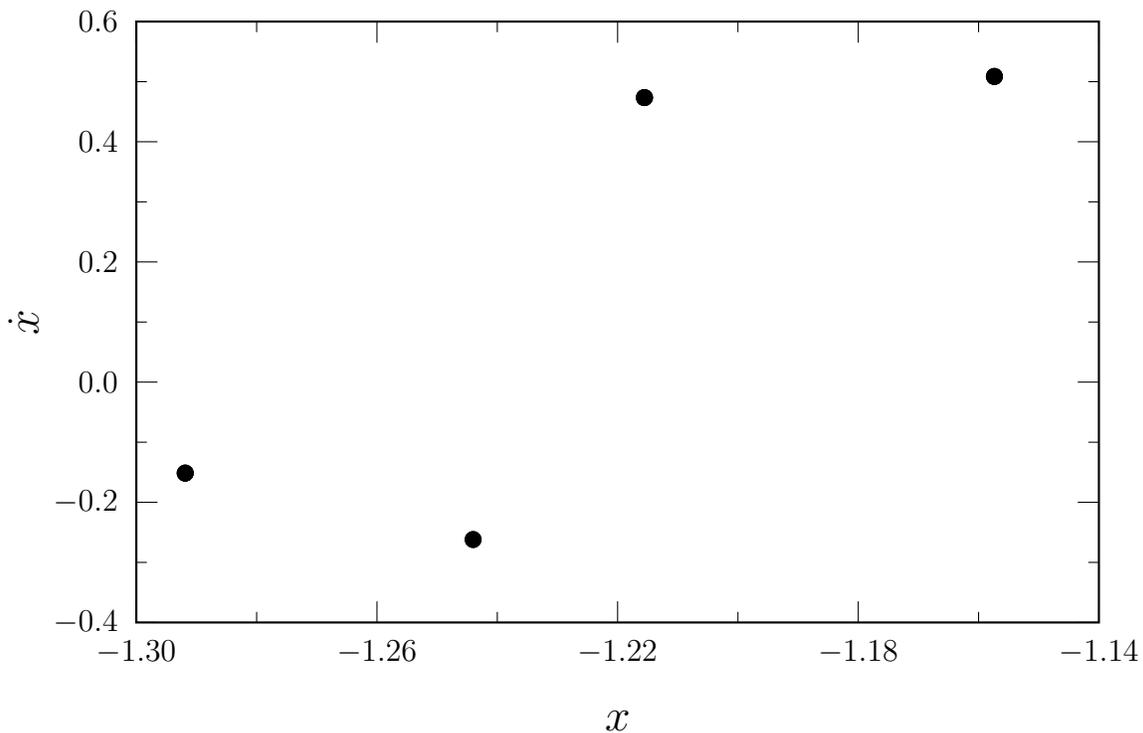


Figura 1.25: Sección de Poincaré correspondiente a la Fig. 1.23

Sin embargo en el régimen caótico, la sección de Poincaré (ver Fig. 1.26), toma un aspecto mucho más importante:

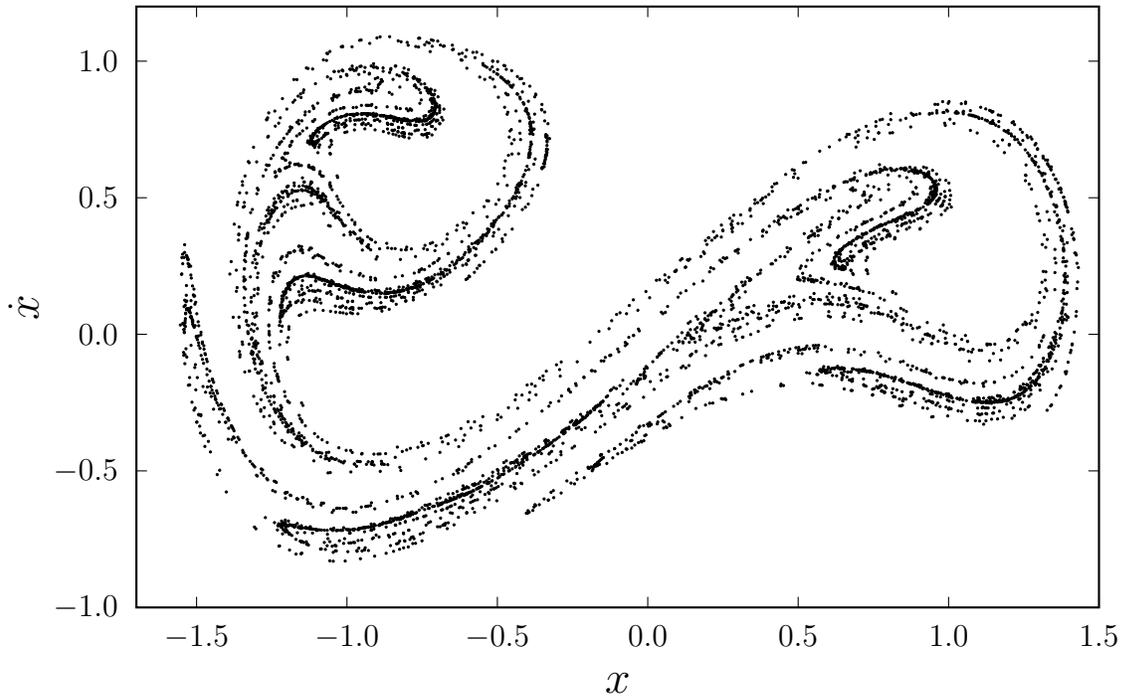


Figura 1.26: Mapa de fase de un atractor extraño con  $\delta = 0.35$

Si el sistema se comportara de forma aleatoria, se esperaría que los puntos llenen por completo el espacio de fase, sin embargo ha surgido una estructura que evidencia un comportamiento caótico dentro de una región limitada.

---

---

## CAPÍTULO 2

---

# MODOS INTERNOS DE LA ECUACIÓN SENO DE GORDON

Estamos interesados en estudiar mecanismos que permitan la aparición de modos de forma en solitones seno de Gordon. Es bien sabido que los solitones seno de Gordon sin perturbar (pura) no tienen modos internos. Por ello vamos a tratar de responder a la siguiente pregunta ¿Es posible que ciertas fuerzas externas sean capaces de crear modos internos en la ecuación seno de Gordon?

A continuación resolveremos de forma analítica la ecuación seno de Gordon perturbada por una fuerza externa e identificaremos la forma que tendrían los modos internos.

## 2.1. Fuerza inhomogénea espacial

La ecuación seno de Gordon perturbada por una fuerza externa inhomogénea tiene la siguiente forma:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \gamma\phi_t + \text{sen } \phi = F(x). \quad (2.1)$$

Suponemos una solución solitónica estática  $\beta(x)$  que satisface la siguiente ecuación:

$$-\beta_{xx} + \text{sen } \beta = F(x). \quad (2.2)$$

Calcularemos la estabilidad de pequeñas perturbaciones alrededor del kink estático.

$$\psi(x, t) = f(x)e^{\lambda t}, \quad |f(x)| \ll 1. \quad (2.3)$$

Por lo tanto la solución general tiene la siguiente forma:

$$\phi(x, t) = \beta(x) + f(x)e^{\lambda t}, \quad (2.4)$$

sus derivadas son:

$$\phi_t = f(x)e^{\lambda t}\lambda = \lambda f(x)e^{\lambda t}; \quad \phi_x = \beta'(x) + f'(x)e^{\lambda t}; \quad (2.5)$$

$$\phi_{tt} = \lambda f(x)e^{\lambda t}\lambda = \lambda^2 f(x)e^{\lambda t}; \quad \phi_{xx} = \beta''(x) + f''(x)e^{\lambda t}; \quad (2.6)$$

sustituyendo estas derivadas en la ecuación (2.1) nos queda:

$$\lambda^2 f(x)e^{\lambda t} - (\beta''(x) + f''(x)e^{\lambda t}) + \gamma(\lambda f(x)e^{\lambda t}) + \text{sen}(\beta(x) + f(x)e^{\lambda t}) = F(x). \quad (2.7)$$

Desarrollemos en serie de Taylor la función  $\text{sen}(\beta + fe^{\lambda t})$  alrededor de  $\beta$ ;

$$\text{sen}(\beta + fe^{\lambda t}) = \text{sen}(\beta) + \cos(\beta)fe^{\lambda t} - \frac{1}{2}\text{sen}(\beta)f^2e^{2\lambda t} + \mathcal{O}(h^3), \quad (2.8)$$

donde  $h = f(x)e^{\lambda t}$ .

Asumiendo que  $|f(x)| \ll 1$  podemos hacer la siguiente aproximación:

$$\text{sen}(\beta + f(x)e^{\lambda t}) \simeq \text{sen} \beta + f(x)e^{\lambda t} \cos \beta, \quad (2.9)$$

sustituyendo la ecuación (2.9) en (2.7) y usando la ecuación (2.2) nos queda:

$$\lambda^2 f(x)e^{\lambda t} - f''(x)e^{\lambda t} + \gamma \lambda f(x)e^{\lambda t} + f(x)e^{\lambda t} \cos \beta = 0. \quad (2.10)$$

Para conocer la forma de la solución solitónica estática escogemos  $F(x)$  como:

$$F(x) = 2(B^2 - 1) \frac{\text{senh}(Bx)}{\cosh^2(Bx)} \quad (2.11)$$

A continuación mostramos algunas de sus formas:

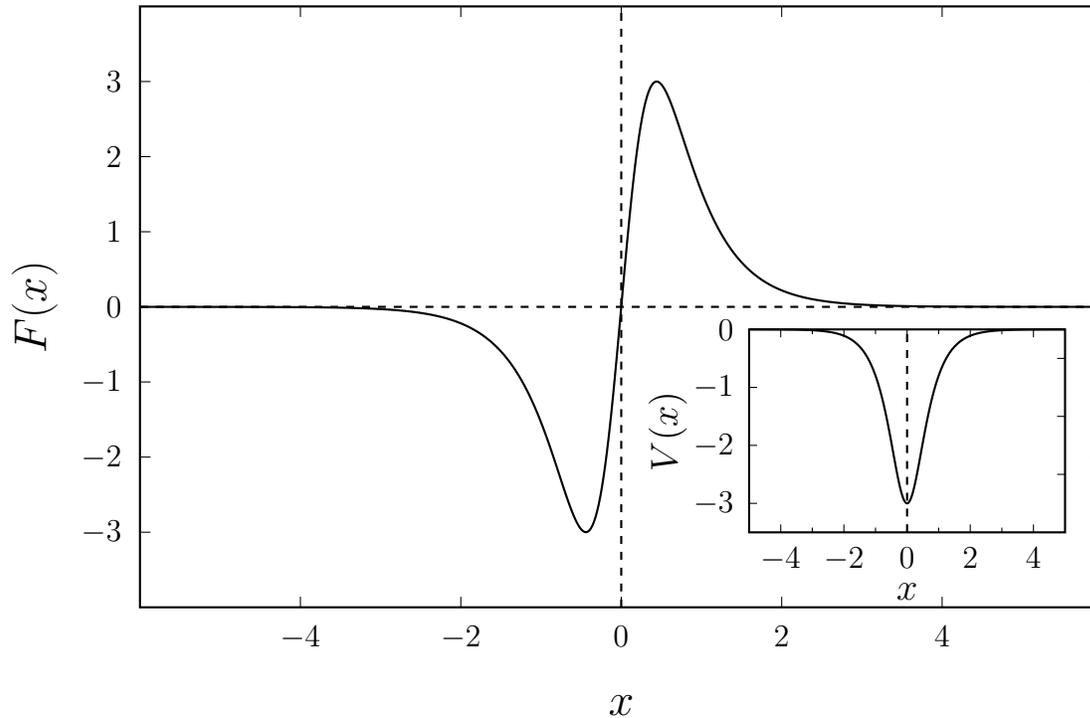


Figura 2.1: La fuerza  $F(x)$  con su respectivo potencial  $V(x)$  cuando  $B^2 = 4$

En la Fig. 2.1 vemos como el potencial para valores de  $B^2 > 1$  posee solo un mínimo, es decir existe solo una posición de equilibrio estable. La situación es diferente cuando  $B^2 < 1$ , un caso particular es mostrado en la Fig. 2.2, en donde podemos observar un máximo, indicando una posición de equilibrio inestable. El potencial que usamos proviene de la siguiente expresión:

$$dV = -Fdx \quad (2.12)$$

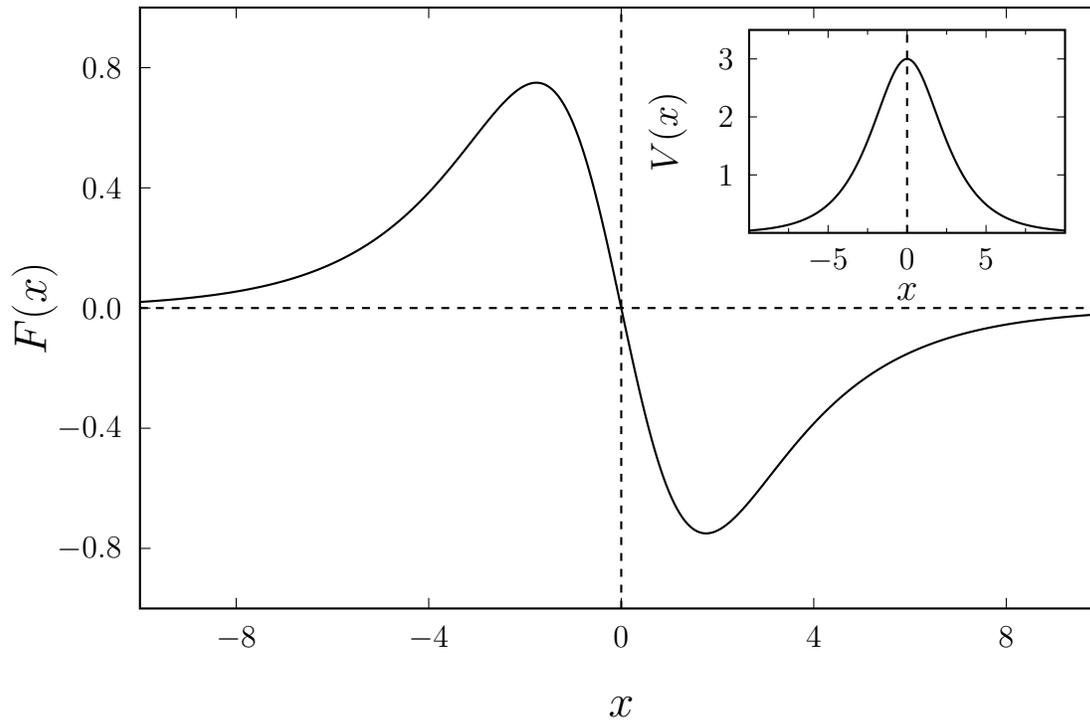


Figura 2.2: La fuerza  $F(x)$  con su respectivo potencial  $V(x)$  cuando  $B^2 = 0.25$

Elegimos la ecuación (2.11) como la fuerza espacial, porque nos permite:

- Obtener una solución analítica del kink solitón.
- Resuelve el problema de estabilidad exactamente.
- Representar una fuerza de ancho finito.

Por lo tanto, la solución de la ecuación (2.2) esta dada por:

$$\beta(x) = 4 \arctan(e^{Bx}) \quad (2.13)$$

y el coseno de la ecuación (2.13) viene dado por:

$$\cos \beta = 1 - \frac{2}{\cosh^2(Bx)}. \quad (2.14)$$

Con estos cálculos podemos establecer la ecuación autovalor para  $f(x)$ :

$$-f''(x) + f(x) \cos \beta = (-\lambda^2 - \gamma\lambda)f(x), \quad (2.15)$$

o escrito como una ecuación espectral:

$$\hat{L}f = \Gamma f, \quad (2.16)$$

donde

$$\hat{L} = -\partial_x^2 + \left[1 - \frac{2}{\cosh^2(Bx)}\right]; \quad \Gamma = -\lambda^2 - \gamma\lambda \quad (2.17)$$

Resolviendo esta ecuación espectral hallamos los autovectores de la ecuación (2.15) (ver apéndice)

$$\boxed{\Gamma_n = B^2(\Lambda + 2\Lambda n - n^2) - 1} \quad (2.18)$$

siendo

$$\Lambda(\Lambda + 1) = \frac{2}{B^2} \quad (2.19)$$

Para que los modos sean estables  $\Gamma_n > 0$ .

Identificamos a los modos internos del solitón en función de  $n$  como sigue:

- Para  $n = 0$  tenemos el modo traslacional.
- Para  $n = 1$  tenemos el primer modo de forma
- Para  $n = 2$  tenemos el segundo modo de forma

A continuación mostramos los distintos modos que dependen de  $B^2$ :

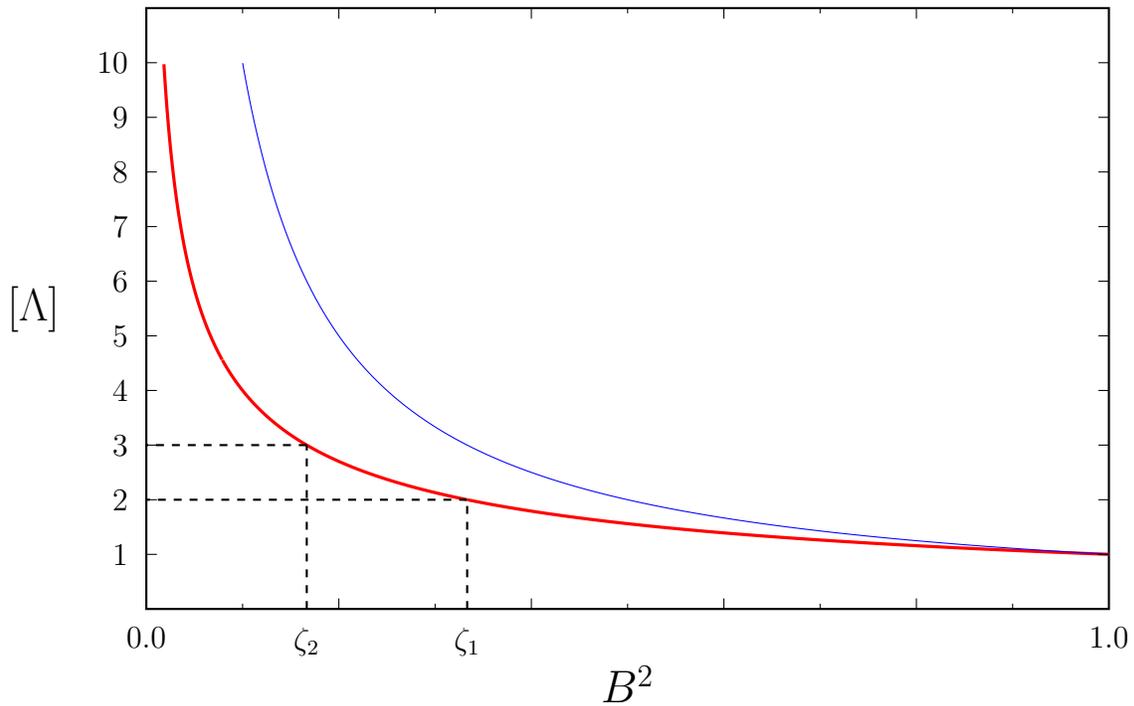


Figura 2.3: Condiciones de estabilidad para el modo traslacional del solitón, donde  $\zeta_1 = 1/3$  y  $\zeta_2 = 1/6$ . La curva azul representa la condición  $n = 0$ . Se puede apreciar que el primer modo siempre será inestable (curva roja)

La curva roja en la Fig. 2.3 obedece a la ecuación (2.19), la cual indica el número de modos internos ( $[\Lambda]$ ) en función de  $B^2$ . Por ejemplo, para  $1/3 < B^2 < 1$  existe

sólo un modo el cual representa al modo traslacional, si seguimos disminuyendo a  $B^2$ , aumentará el número de modos internos en el kink solitón.

Para conocer la estabilidad del primer modo interno en función de  $B^2$  aplicamos la ecuación (2.18) para un  $n = 0$ ;

$$\Gamma_0 > 0 \Rightarrow \Lambda > \frac{1}{B^2}, \quad (2.20)$$

La función  $\Lambda$  de los modos internos tiene la siguiente expresión:

$$\Lambda = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{B^2} + \frac{1}{4}} \quad (2.21)$$

Cuando graficamos la condición expresada en la ecuación (2.20) (curva azul de la Fig. 2.3), la curva de los modos del solitón debe estar por encima de ella para que el modo traslacional sea estable y como se puede apreciar eso nunca ocurre (por eso la curva de los modos esta en rojo), en consecuencia el modo traslacional siempre será inestable cuando  $B^2$  toma valores menores a 1.

Aplicando un análisis similar al primer modo de forma ( $n=1$ ) obtenemos el siguiente resultado:

$$\Lambda > \frac{1}{3B^2} + \frac{1}{3}. \quad (2.22)$$

Observando la Fig. 2.4 la condición expresada en la ecuación (2.22), se cumple si la curva de los modos del solitón esta por encima de la curva azul. En este caso se puede apreciar que el primer modo de forma es estable (representando la curva en verde) hasta que las dos curvas, la curva de los modos del solitón y la curva de estabilidad, se toquen en  $B^2 = \zeta$ . Este punto de intersección cumple la siguiente identidad:

$$\Lambda = \frac{1}{3\zeta^2} + \frac{1}{3} \quad (2.23)$$

con  $\Lambda$  dado en la ecuación (2.21).

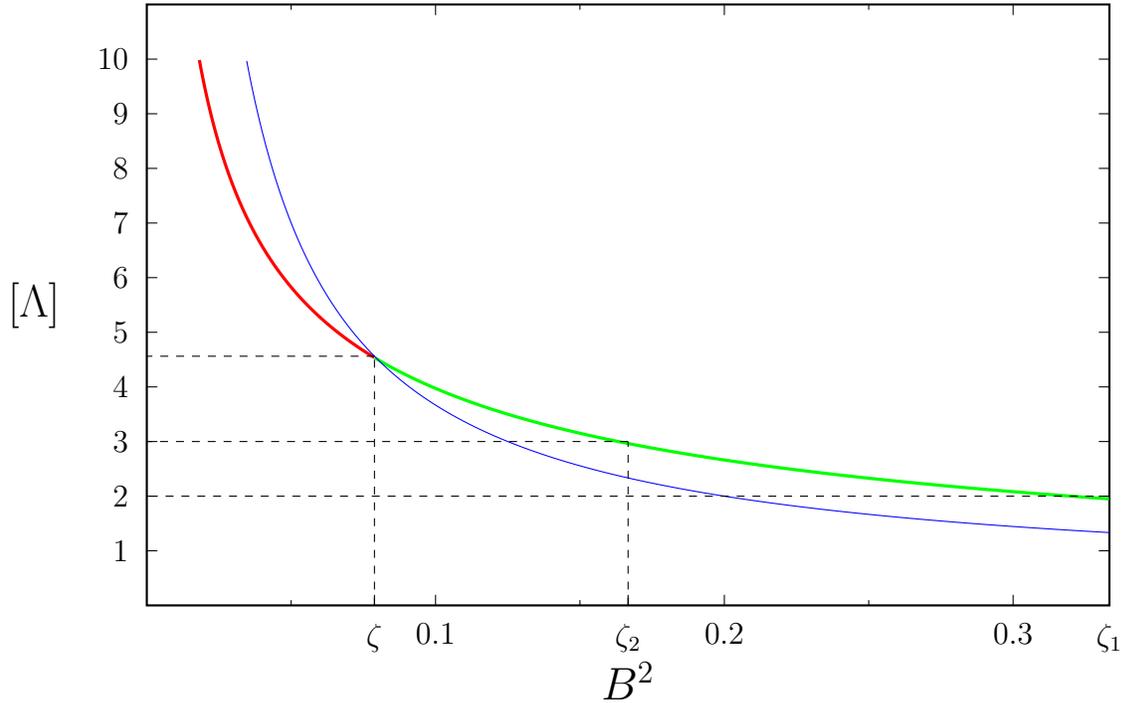


Figura 2.4: Condiciones de estabilidad para el primer modo de forma del solitón, donde  $\zeta_1 = 1/3$  y  $\zeta_2 = 1/6$ . La curva azul representa la condición  $n = 1$ , la curva verde es la zona donde se cumple la condición mientras que la roja es la curva donde no se cumple la condición.

Realizando los cálculos, el punto  $\zeta$  posee el siguiente valor:

$$\zeta = \frac{1}{8}(13 - 3\sqrt{17}). \quad (2.24)$$

En consecuencia si  $B^2 < \zeta$  el primer modo de forma será inestable, por ejemplo cuando  $B^2 = 0.07$  existen cuatro modos internos; el traslacional que es inestable y 3 modos de forma donde el primero de ellos es inestable.

A continuación resumiremos los resultados anteriores;

- Para  $B^2 < 1$  el modo traslacional será inestable
- Para  $B^2 > 1$ , el modo traslacional es estable.
- Para  $1/6 < B^2 < 1/3$ , se activa el primer modo de forma y es estable.
- Para  $B^2 < 1/6$  se activan más de un modo interno, exactamente  $[\Lambda] - 1$ .
- Si  $B^2 < \zeta$ , donde  $\zeta \approx 0.0788$  el primer modo interno será inestable

Las autofunciones vienen dadas por la solución de la ecuación (2.15) las cuales son las funciones de Legendre de grado  $\Lambda$  y orden  $\mu$ . Las siguientes ecuaciones corresponden a los dos primeros modos internos; el modo traslacional  $f_0(x)$  y el primer modo de forma  $f_1(x)$ :

$$f_0(x) = 3\operatorname{sech}^2(x/2), \quad f_1(x) = -3 \tanh(x/2)\operatorname{sech}(x/2) \quad (2.25)$$

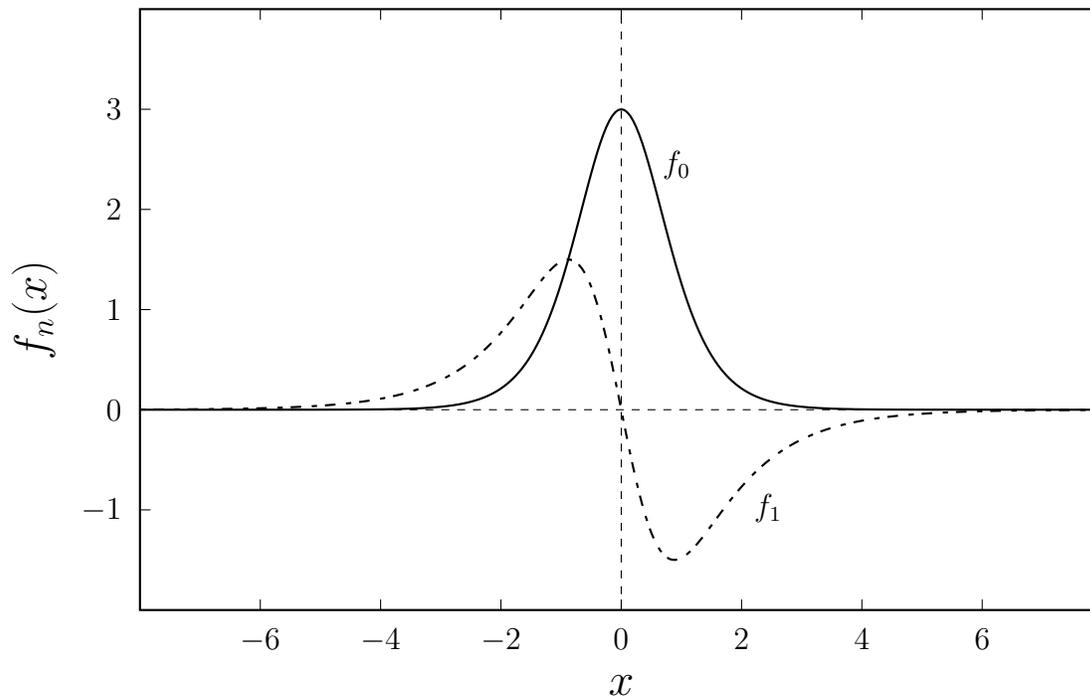


Figura 2.5: Los dos primeros modos del solitón,  $f_0$  corresponde al modo traslacional (línea gruesa) y  $f_1$  corresponde al primer modo de forma (línea segmentada)

## 2.2. El problema de Cauchy: Experimentos Numéricos

Ahora vamos a confirmar a través de experimentos numéricos las predicciones teóricas que hicimos en la sección anterior; es decir, analizaremos la estabilidad y existencia de los modos internos del solitón.

*¿Qué sucede si colocamos el centro de masa del kink-solitón fuera de la posición de equilibrio?* Comencemos estudiando el siguiente sistema:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \gamma\phi_t + \text{sen } \phi = F(x) \quad (2.26)$$

donde la fuerza viene dada por la ecuación (2.11) y las condiciones iniciales son las siguientes:

$$\phi(x, 0) = 4 \arctan(e^{B(x-x_0)}) \quad (2.27)$$

$$\phi_t(x, 0) = 0 \quad (2.28)$$

Cuando  $B^2 > 1$  el centro de masa del solitón hará oscilaciones amortiguadas alrededor del punto de equilibrio, como se puede apreciar en la Fig. 2.6.

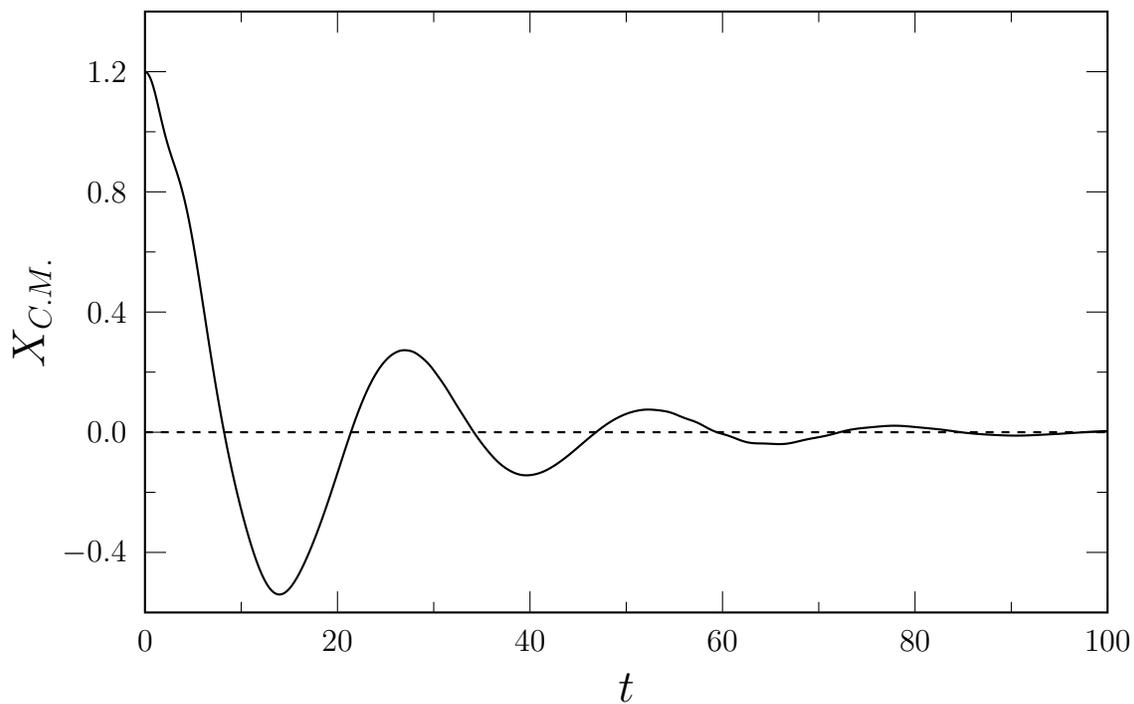


Figura 2.6: Dinámica del centro de masa del solitón para el caso estable usando los siguientes valores  $B^2 = 1,21$  y  $x_0 = 1,2$

Cuando el modo traslacional es inestable, el solitón se moverá fuera de la posición de equilibrio de forma indefinida (ver Fig. 2.7).

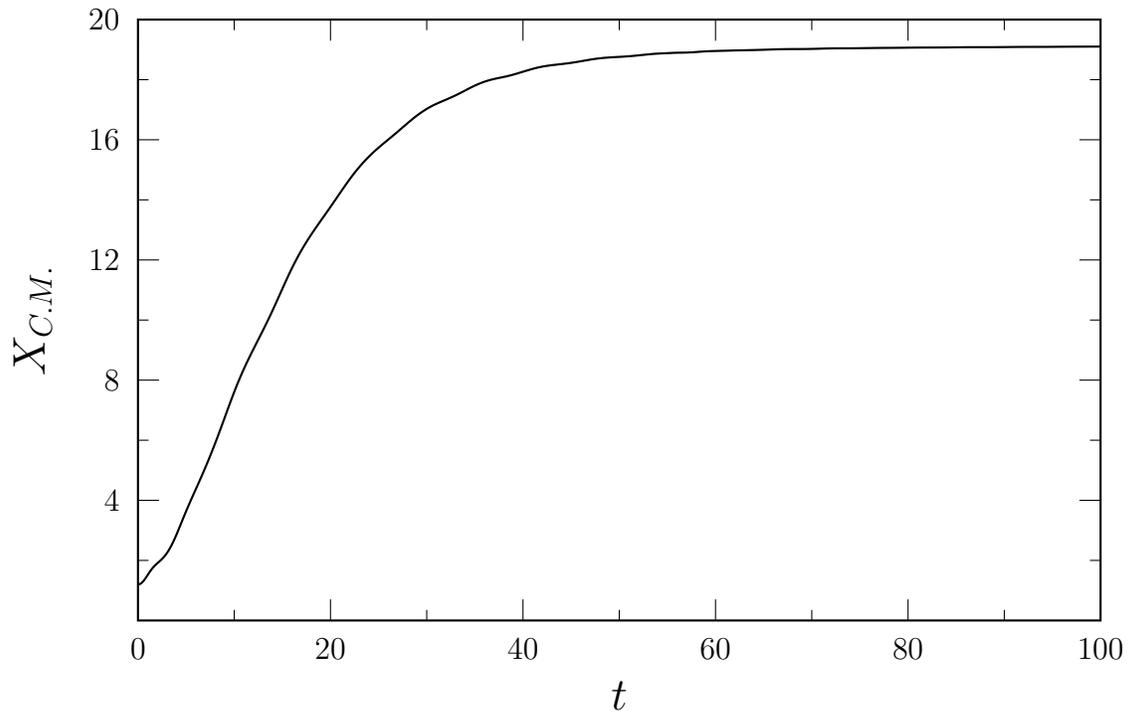


Figura 2.7: Dinámica del centro de masa del solitón para el caso estable usando los siguientes valores  $B^2 = 0.25$  y  $x_0 = 1.2$

Consideremos otro problema:

$$\phi(x, 0) = 4 \arctan(e^{Bx}) + C \sinh(Bx) \cosh^{-\Lambda}(Bx), \quad (2.29)$$

$$\phi_t(x, 0) = 0, \quad (2.30)$$

Cuando entramos en la zona donde es posible la activación de un modo de forma  $(1/6 < B^2 < 1/3)$  observamos oscilaciones en el ancho del solitón (ver Fig. 2.8).

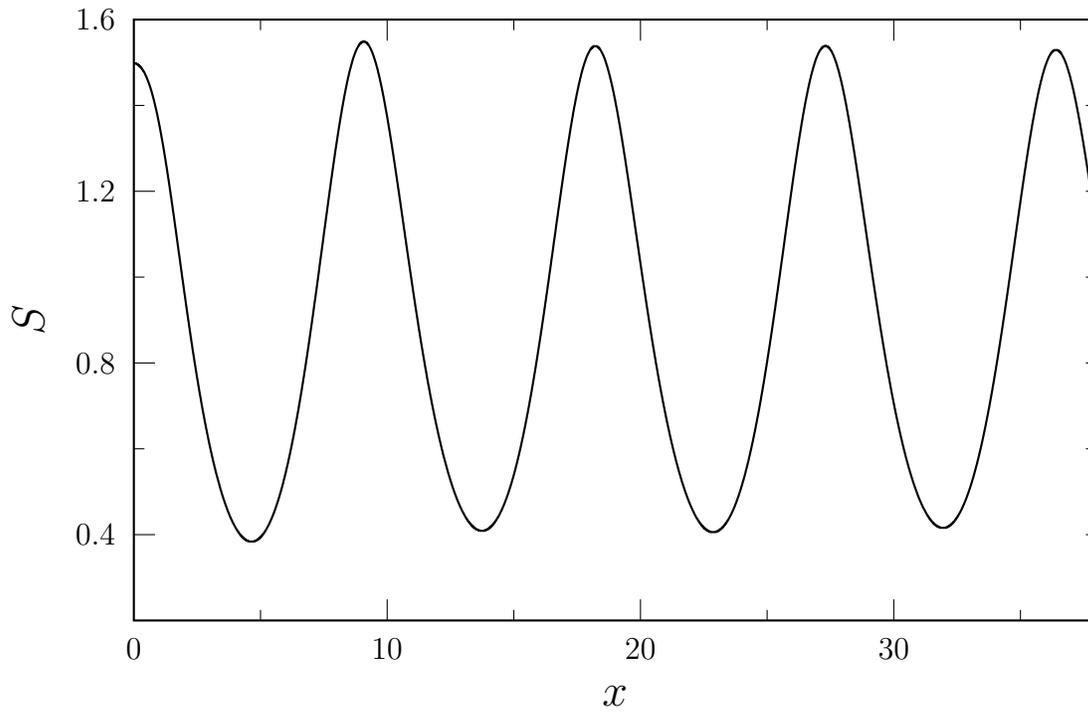


Figura 2.8: Oscilaciones en el ancho del solitón ( $S$ ), para  $\gamma = 0.0$ ,  $B^2 = 0.25$  con  $x_0 = 0.0$

El fenómeno más espectacular ocurre cuando  $B^2 < 0,0788$ . En este caso, el primer modo interno es inestable. Si estudiamos la evolución del solitón con las condiciones iniciales (2.29) y (2.30), observaremos una destrucción del solitón (ver Fig. 2.9).

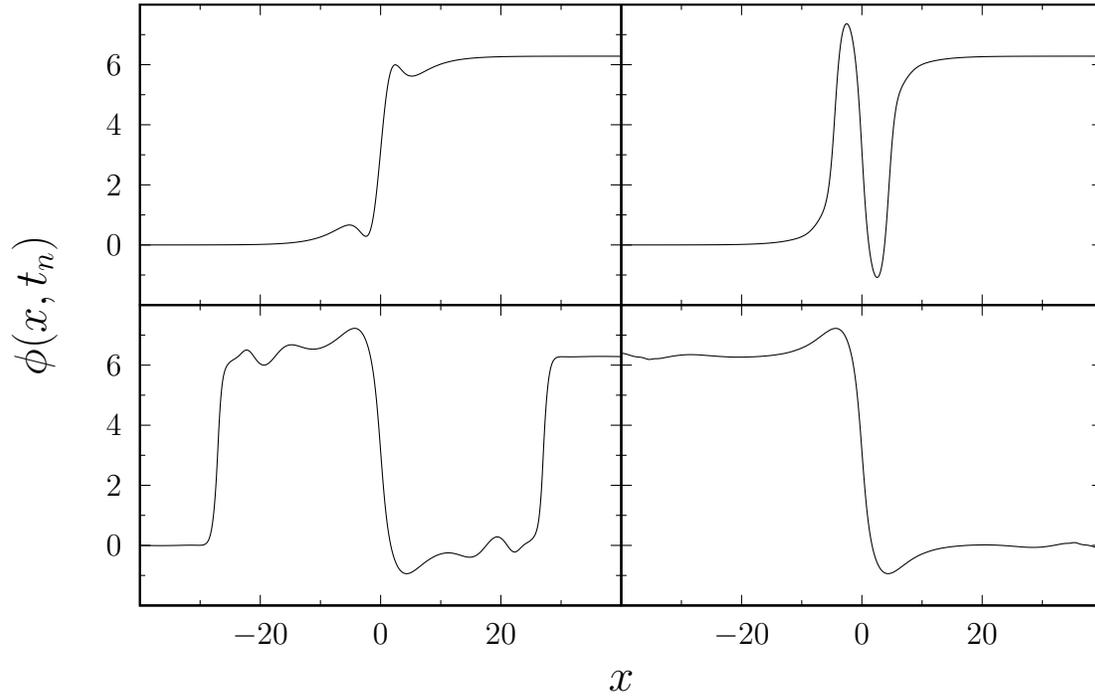


Figura 2.9: Destrucción del solitón cuando el modo de forma es inestable ( $B^2 = 0.0729$ ) y además  $\gamma = 0.04$ ,  $\eta = 0, 1$  y  $C = 6.0$

### 2.3. Potencial de doble pozo para el kink-soliton

Ahora que conocemos las condiciones para la existencia de los modos de forma es importante introducir una fuerza externa dependiente del tiempo que sustente las oscilaciones en el ancho del solitón debido a que dichas oscilaciones se amortiguarán a medida que transcurra el tiempo (presencia de amortiguamiento).

Consideremos la siguiente perturbación espacio-temporal:

$$\phi_{tt} + \gamma\phi_t - \phi_{xx} + \sin\phi = F_2(x) + f_0 \cos(\omega t)g(x), \quad (2.31)$$

donde

$$F_2(x) = \begin{cases} 2(E^2 - 1) \frac{\operatorname{sech}(Ex)}{\cosh^2(Ex)}, & \text{si } -x_1 \leq x \leq x_1; \\ \frac{A}{\cosh^2[E(x+x_1)]} - D, & \text{si } x < -x_1; \\ D - \frac{A}{\cosh^2[E(x-x_1)]}, & \text{si } x > x_1; \end{cases} \quad (2.32)$$

$$g(x) = \frac{1}{\cosh^2(E(x+x_1))} + \frac{1}{\cosh^2(E(x-x_1))}. \quad (2.33)$$

El número  $x_1$  es un valor extremo de  $F(x)$ .

$$Ex_1 = \pm \frac{1}{2} \ln(3 \pm 2\sqrt{2}) \approx \pm 0,881. \quad (2.34)$$

La constante  $A$  se determina realizando el siguiente cálculo, conociendo de antemano  $x_1$  y  $D$ :

$$\frac{A}{\cosh^2[E(-x_1+x_1)]} - D = 2(E^2 - 1) \frac{\tanh(-Ex_1)}{\cosh(-Ex_1)}, \quad (2.35)$$

como la  $\tanh x$  es una función impar, mientras que  $\cosh x$  es una función par nos queda:

$$A = 2(1 - E^2) \frac{\tanh(Ex_1)}{\cosh(Ex_1)} + D. \quad (2.36)$$

Para el otro lado el cálculo arroja el mismo resultado:

$$D - \frac{A}{\cosh^2[E(x_1 - x_1)]} = 2(E^2 - 1) \frac{\tanh(Ex_1)}{\cosh(Ex_1)}, \quad (2.37)$$

que nos lleva a ec.(2.36). Reduciendo aún más el resultado, tenemos :

$$\boxed{A = 1 - E^2 + D} \quad (2.38)$$

La fuerza expresada en la ecuación (2.32) junto con su potencial es graficada en la Fig. 2.10;

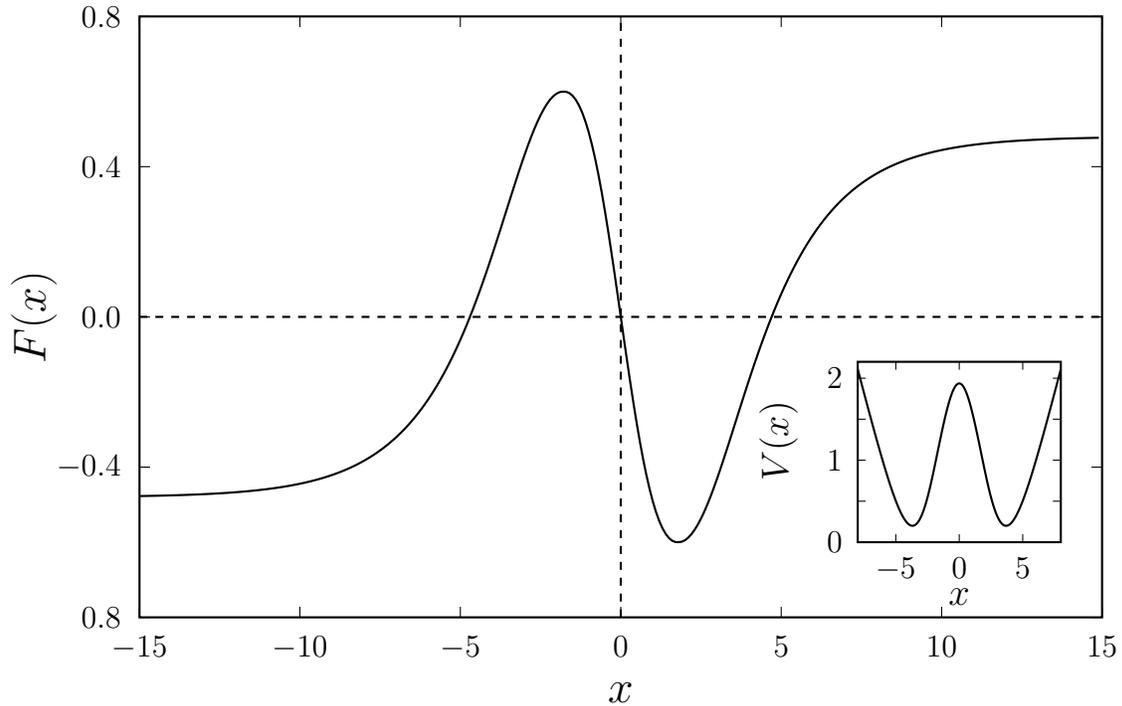


Figura 2.10: La fuerza  $F_2(x)$  con su respectivo potencial  $V(x)$  cuando  $E = 0.5$  y  $D = 0.6$

En algunos casos, el centro de masa oscilará dentro de uno de los pozos de potencial (ver Fig. 2.11):

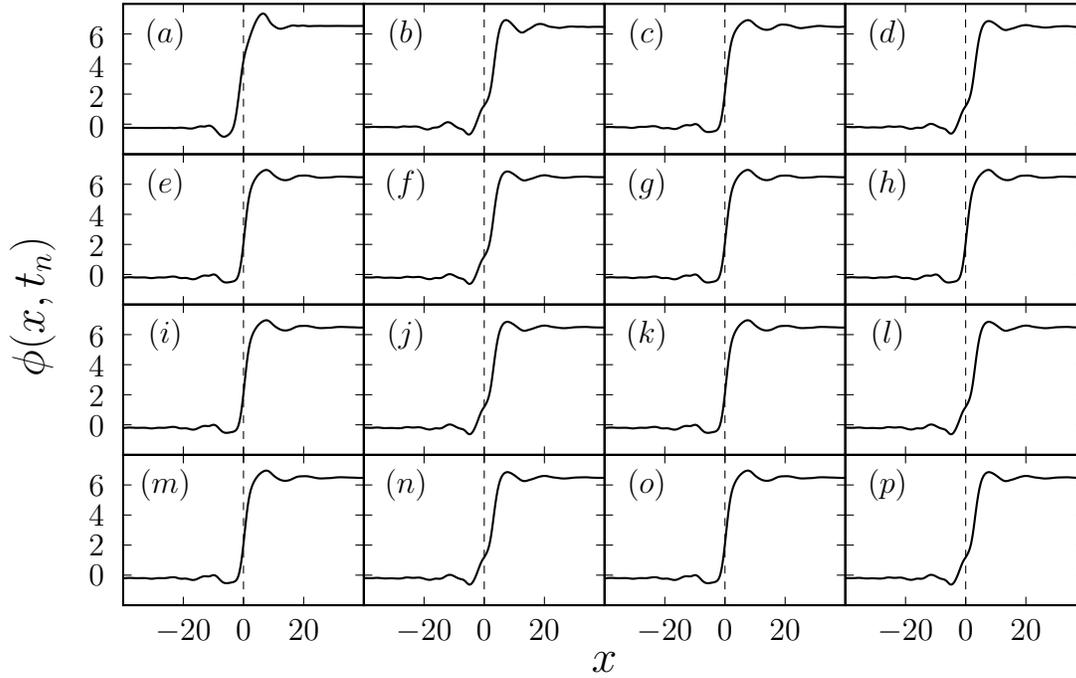


Figura 2.11: Perfil del solitón cuando  $B = 0.5$ ,  $D = 0.2$ ,  $f_0 = 0.55$ ,  $E = 0.99$ ,  $\omega = 0.55$ ,  $C = 0.0$  para  $t < 450$ , correspondiente a la ecuación (2.31)

Como se puede apreciar en la Fig. 2.12 el solitón oscila en el pozo derecho.

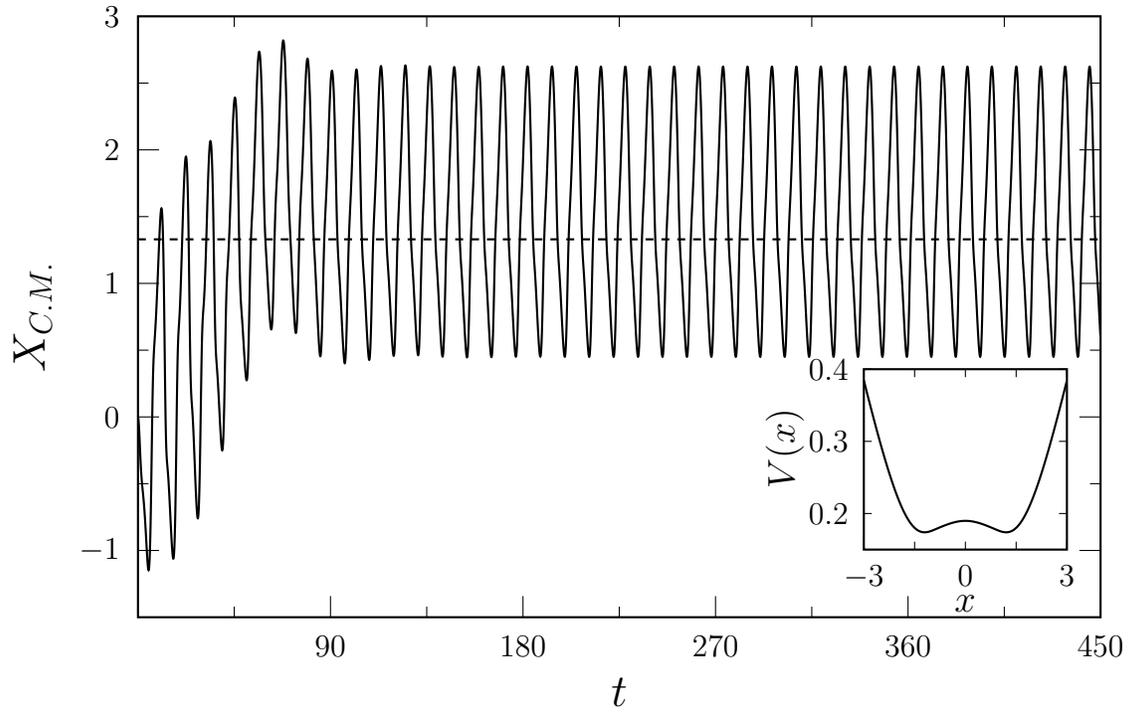


Figura 2.12: Oscilaciones periódicas del centro de masa para las condiciones indicadas en la Fig. 2.11, la línea punteada indica la posición de los pozos

Si aumentamos al doble la frecuencia  $\omega$  y disminuimos la variable  $E$ , encontraremos un estado transitorio en el que las oscilaciones son cuasiperiódicas. Al observar la figura 2.13 podemos notar que existen una frecuencia que se combina con otra provocando saltos entre los pozos.

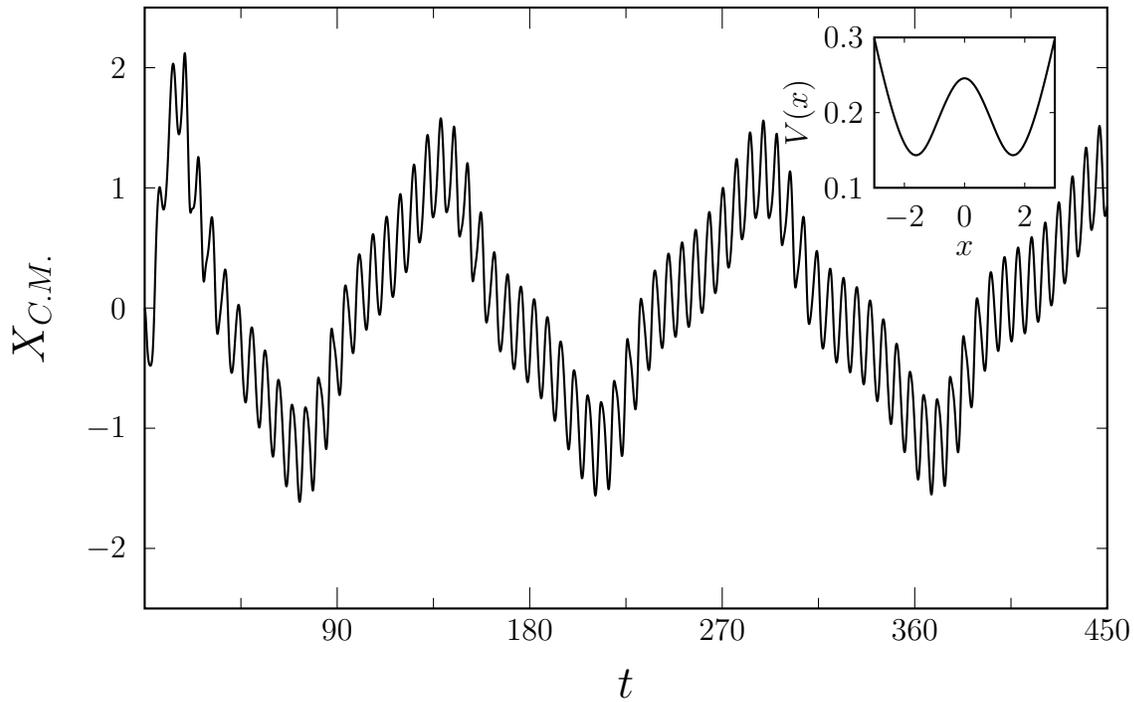


Figura 2.13: Oscilaciones del centro de masa cuando  $D = 0.2$ ,  $E = 0.95$ ,  $f = 0.55$  y  $\omega = 1.0$  con su respectivo potencial

Su sección de Poincaré mostrada en la Fig. 2.14 nos indica que el movimiento es de tipo cuasiperiódico, ya que se puede apreciar en él una curva cerrada. Esta gráfica se realizó para tiempos mayores al mostrado en la figura 2.14.

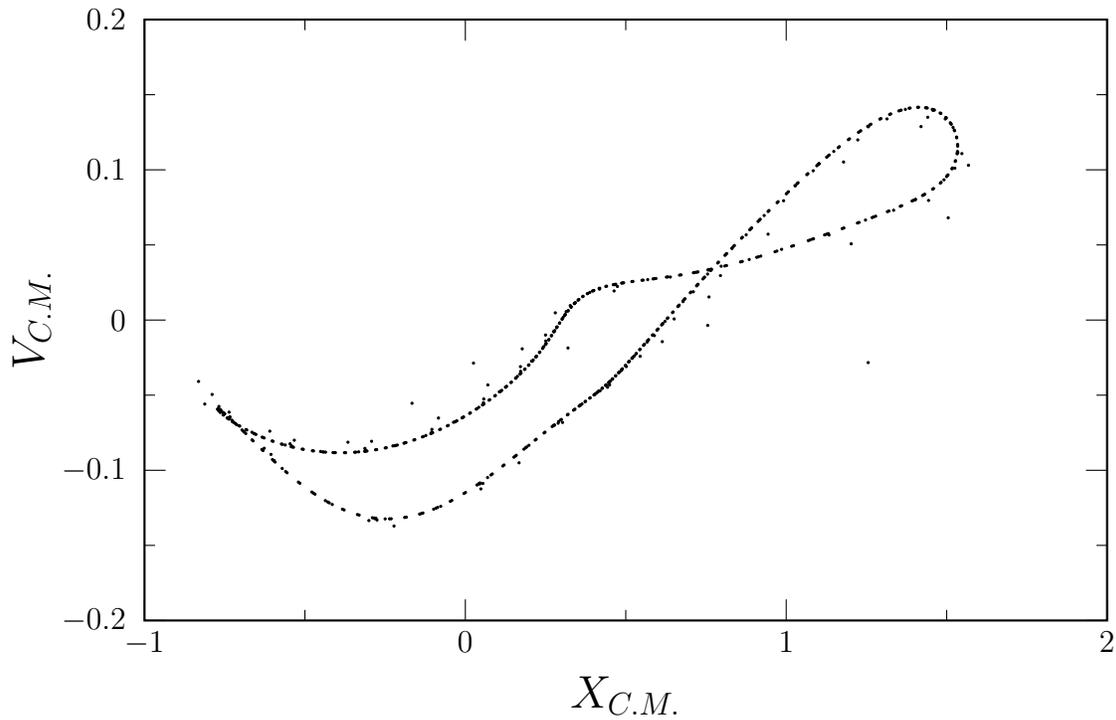


Figura 2.14: Sección de Poincaré correspondiente al sistema del la Fig. 2.13, la curva cerrada indica cuasiperiodicidad

Ahora cuando aumentamos la frecuencia de la fuerza externa y modificamos ligeramente los otros valores usados en la Fig. 2.11 lograremos que el centro de masa del solitón salte entre los dos pozos de potencial (ver Fig. 2.16), sin que el solitón se destruya (ver Fig. 2.15).

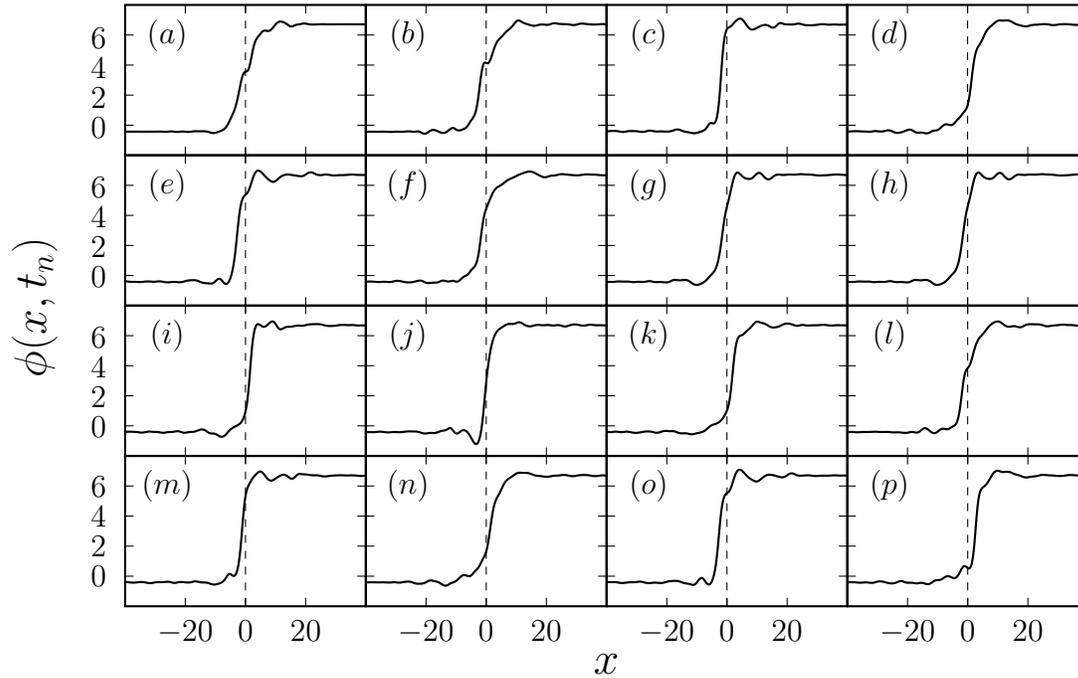


Figura 2.15: Perfil del solitón cuando  $B = 0.5$ ,  $D = 0.4$ ,  $f_0 = 0.6$ ,  $E = 0.8$ ,  $\omega = 1.0$ ,  $C = 0.0$

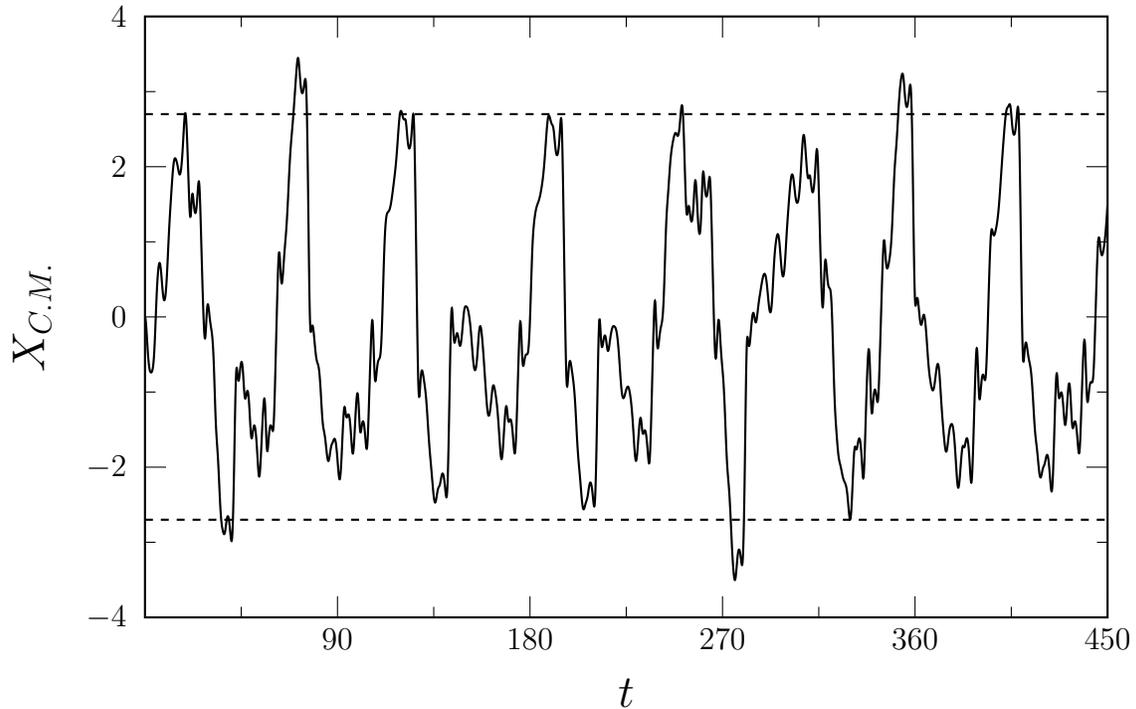


Figura 2.16: Movimiento (caótico) del centro de masa entre los dos pozos de potencial, la línea punteada indica la posición de los pozos

Si seguimos incrementando la amplitud de la fuerza externa se crearán deformaciones extraordinarias en el solitón a tal punto de que puede provocar su destrucción (ver Fig. 2.17), sin embargo el solitón puede ser reconstruido.

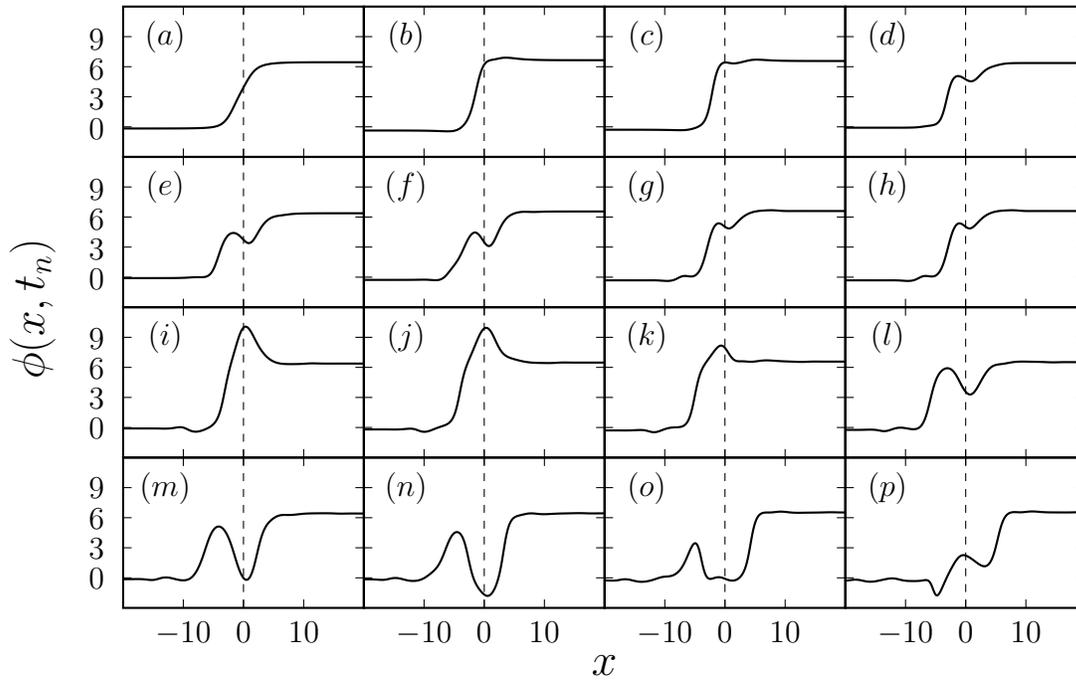


Figura 2.17: Perfil del solitón cuando  $B = 0.5$ ,  $D = 0.2$ ,  $f_0 = 0.7$ ,  $E = 0.7$ ,  $\omega = 0.55$ ,  $C = 0.0$  para  $t < 23$ , correspondiente a la ecuación (2.31)

Esto es una estructura dinámica que alterna destrucciones y reconstrucciones. El centro de masa saltará entre los pozos de potencial.

Ahora, deformaremos inicialmente al solitón ( $C \neq 0$ ). Para un valor dado de la amplitud encontraremos reconstrucciones y destrucciones del solitón (ver Fig. 2.18).

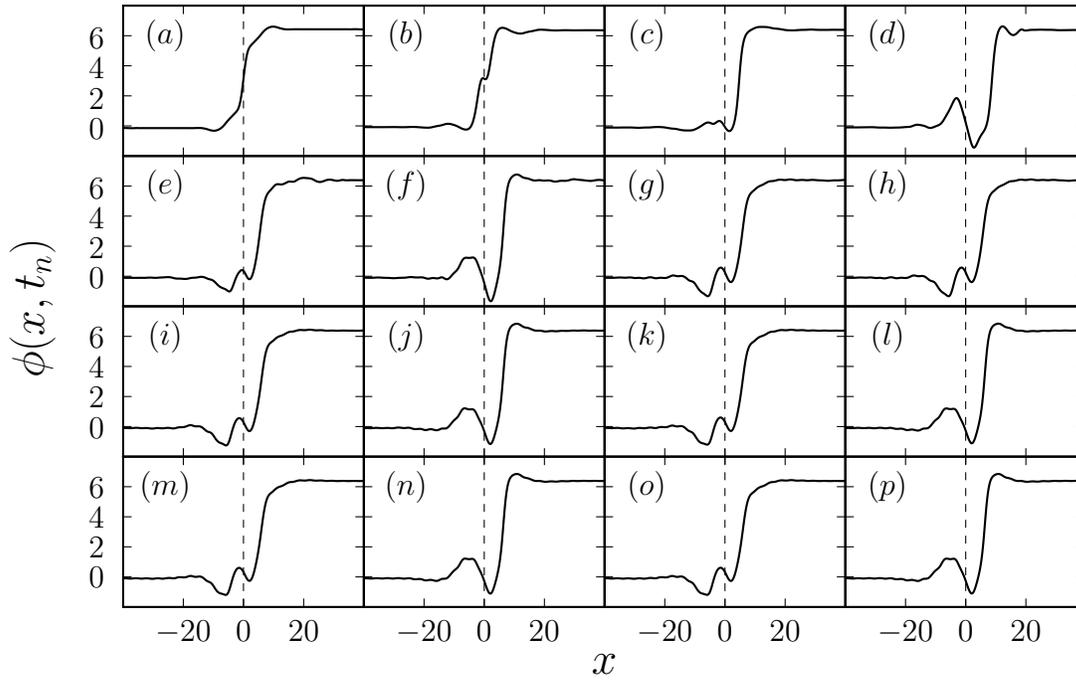


Figura 2.18: Perfil del solitón cuando  $B = 0.5$ ,  $D = 0.1$ ,  $f_0 = 0.2$ ,  $E = 0.5$ ,  $\omega = 1.0$ ,  $C = -0.1$  para  $t < 250$

Si aumentamos más la amplitud el solitón se destruirá de forma permanente (ver Fig. 2.19) :

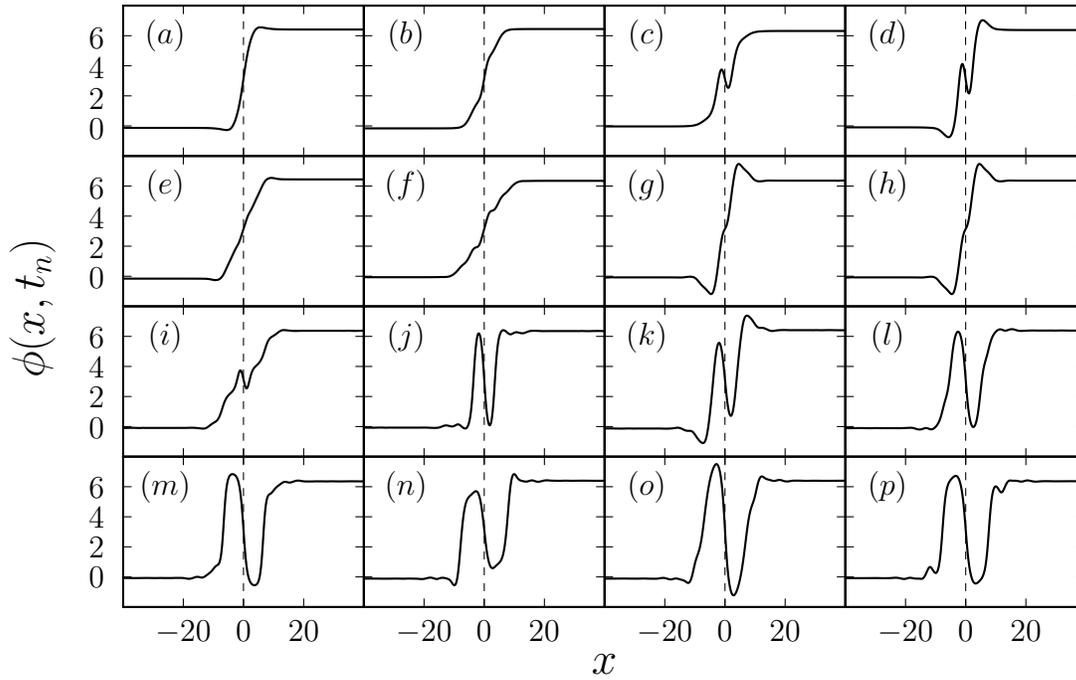


Figura 2.19: Perfil del solitón cuando  $B = 0.5$ ,  $D = 0.1$ ,  $f_0 = 0.4$ ,  $E = 0.5$ ,  $\omega = 1.0$ ,  $C = -0.1$  para  $t < 32$

Finalmente cuando volvemos a las condiciones similares a la gráfica Fig. 2.15 obtenemos el siguiente mapa de fase para el centro de masa:

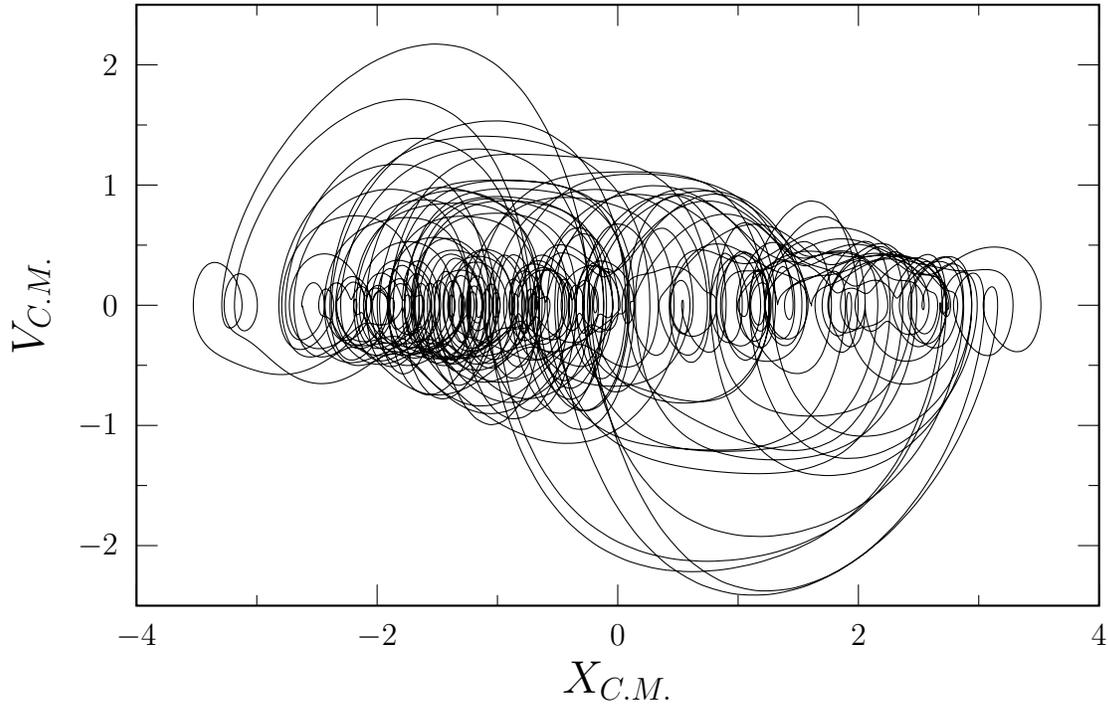


Figura 2.20: Mapa de fase para el solitón del sistema descrito por la ecuación (2.31) con  $B=0.5$ ,  $D=0.4$ ,  $x_0=0.0$ ,  $v_0=0.0$ ,  $\gamma=0.1$ ,  $C=0.0$ ,  $f_0=0.6$ ,  $\omega=1.0$  y  $E=0.8$

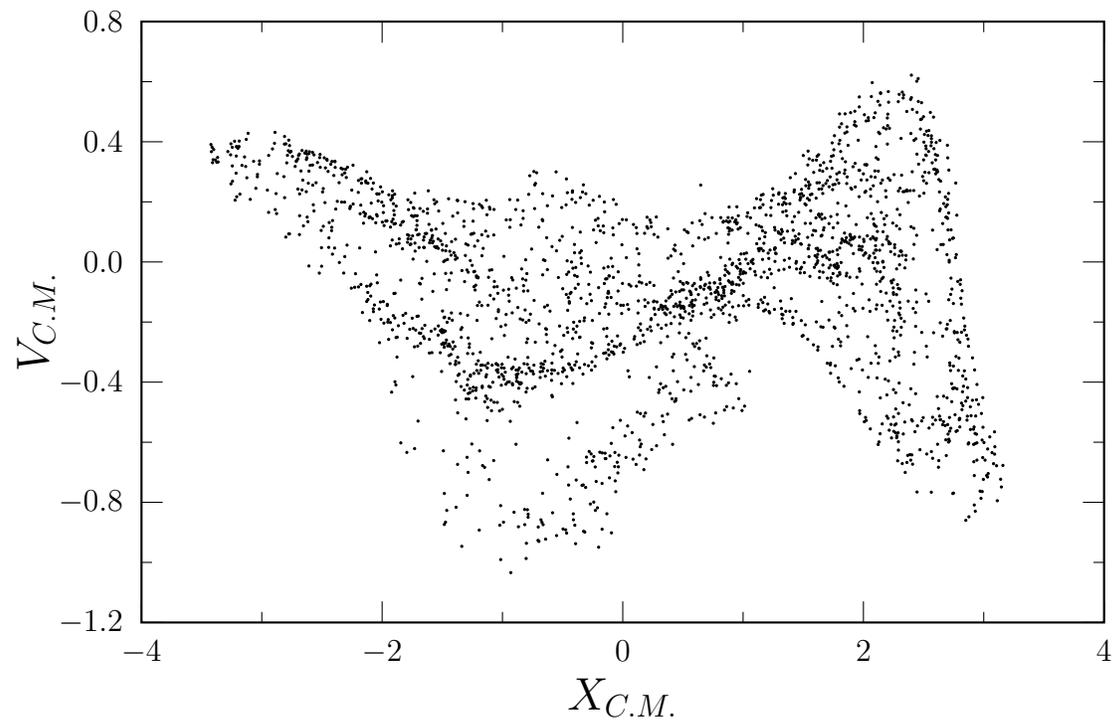


Figura 2.21: Sección de Poincaré del centro de masa para la Fig. 2.20

Algo interesante ocurre con la sección de Poincaré para el ancho del solitón.

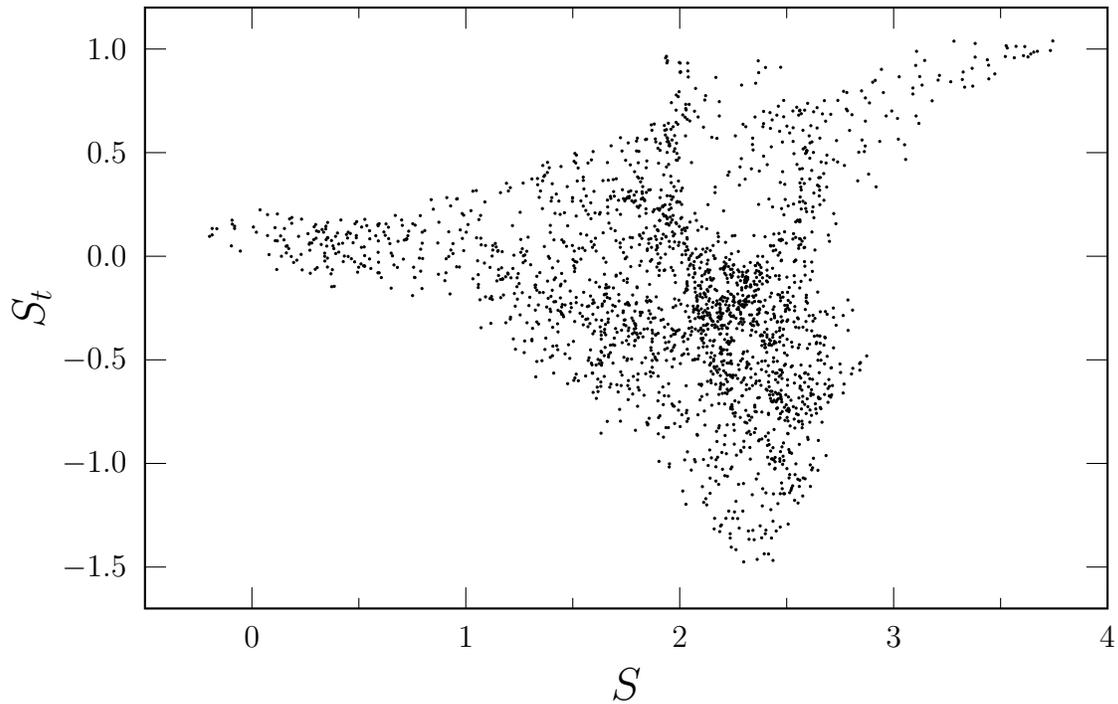


Figura 2.22: Atractor extraño en el ancho del solitón para el sistema de la Fig. 2.20

Lo interesante de la Fig. 2.22 es la estructura fractal que se genera en el ancho del solitón el cual está asociado al primer modo de forma. Su dinámica compleja indica que la estructura del solitón realiza estiramientos y estrechamientos en la zona donde existe una mayor variación de  $\phi(x, t)$  en el espacio. Podemos hablar de deformaciones caóticas en el ancho del solitón porque nos aseguramos de que la estructura no se destruye creando un par kink-antikink.

---

## CONCLUSIONES

Hemos demostrado que la ecuación seno de Gordon perturbada posee modos internos cuando existe una fuerza inhomogénea espacial externa. Cuando esta fuerza ecuación (2.11) se anula el único modo de interno del kink-solitón es el translacional (en virtud de la ecuación (2.19)). No solo es importante la presencia de una fuerza inhomogénea espacial para la creación de los modos de forma, también es necesario que el kink-solitón se sitúe en una posición de equilibrio inestable.

Una vez que el solitón está en una posición de equilibrio inestable, se crean “fuerzas” de igual magnitud pero con sentidos opuestos que actúan sobre el solitón, provocando la aparición de modos internos si la intensidad (amplitud) de la fuerza externa es lo suficientemente grande.

Una evidencia de la existencia de modos internos son las oscilaciones en el ancho del solitón. Cuando estamos en una región donde teóricamente se predice la aparición de modos internos estas oscilaciones se producen gracias a la forma de la fuerza exter-

na las cuales son periódicas en el tiempo.

La estabilidad del modo translacional no implica estabilidad en la estructura del solitón, lo contrario ocurre para los modos de forma, una vez que estos son excitados pueden provocar cambios drásticos en la dinámica del solitón. Si los modos de forma son inestables provocaran la destrucción del solitón, una situación en la cual las fuerzas opuestas que actúan sobre el solitón son tan grandes que provocan la destrucción de este (estiramientos de un lado al otro muy fuertes). Si el solitón posee esta “elasticidad” podemos afirmar que se comporta como una partícula.

Al comprobar que las excitaciones de los modos internos ocurren en posiciones de equilibrio inestables podemos extrapolar este resultado para el estudio de la dinámica de solitones en medios inhomogéneos, si tenemos un arreglo de inhomogeneidades, este puede ser modelado a través de una fuerza que posee múltiples posiciones de equilibrio inestables.

La existencia de modos internos es muy importante porque estos pueden almacenar temporalmente parte (o toda) la energía cinética del kink-solitón, la cual más tarde puede ser transferida al modo translacional.

Comparamos la dinámica del centro de masa del kink-solitón con respecto a una partícula sometida a un potencial de Duffing. A pesar de que la dinámica del kink solitón esta dada por ecuaciones diferenciales parciales, y la ecuación de Duffing es una ecuación diferencial ordinaria, el caos es posible en ambos sistemas.

En el caso de la ecuación seno de Gordon, el caos no solo se evidencia en la dinámica presente en el centro de masa, sino que también podemos encontrar un

atractor extraño en el ancho del solitón (como lo muestra la Fig. 2.22). La dinámica del ancho del solitón está ligada a la dinámica del primer modo de forma.

---

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. Russell, “Report on waves,” *Rep. Brit. Assoc. for the Advancement of Science*, pp. 311–390, 1844.
- [2] A. Mourachkine, *High-Temperature Superconductivity: The Nonlinear Mechanism and Tunneling Measurements*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2002.
- [3] G. Airy, “Tides and waves,” *Encyclopedia Metropolitana*, vol. 5, pp. 241–396, 1845.
- [4] G. G. Stokes, “On the theory of oscillatory waves,” *Camb. Trans.*, vol. 8, pp. 441–473, 1847.
- [5] Filippov, Alexandre T., *The Versatile Soliton*. Dubná: Modern Birkhäuser Classics, 2000.
- [6] J. Boussinesq, “Théorie de l’intumescence liquide appelée onde solitaire ou de traslation, se propageant dans un canal rectangulaire,” *C. R. Acad. Sci*, vol. 72, pp. 755–759, 1871.
- [7] L. Rayleigh, “On waves,” *Phil. Mag.*, vol. 1, pp. 257–279, 1876.

- 
- [8] D. J. Korteweg and G. de Vries, “On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary wave,” *Phil. Mag.*, vol. 39, pp. 442–443, 1895.
- [9] Y. I. Frenkel and T. Kontorova *J. Phys. Moscow*, vol. 1, p. 137, 1939.
- [10] E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam, “Studies of nonlinear problems,” Sci. Lab. Rep. LA-1940, Los Álamos, 1955.
- [11] A. Bellowin, *Solitones con dualidad onda-partícula, caos, turbulencia y métodos de control en sistemas no-lineales espacio-temporales*. Universidad Central de Venezuela, 2010.
- [12] A.-M. Wazwaz, *Partial Differential Equations, Methods and applications*. Swets & Zeitlinger B. V., 2002.
- [13] Carroll, Sean, *Spacetime and Geometry*. Chicago: Addison Wesley, 2004.
- [14] Y. Shen, *Principles of Nonlinear Optics*. New York: Wiley, 1984.
- [15] Z. E. Musielak, J. M. Fontenla, and R. L. Moore, “On waves,” *Phys. Fluids*, vol. 4, p. 13, 1992.
- [16] A. Seeger, H. Donth, and A. Kochendörfer *Z. Phys.*, vol. 134, p. 173, 1953.
- [17] F. Abdullaev, *Theory of solitons in inhomogeneous media*. John Wiley & Sons, 1994.
- [18] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1990.
- [19] F. C. Moon, *Chaotic and Fractal Dynamics: An introduction for applied scientists and engineers*. Wiley-Vch, 2004.
- [20] W. E. Boyce and Di Prima, Robert C., *Elementary: Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, 2000.

- [21] P. L. Torres, *Curso en Métodos de la Física Teórica*. Facultad de Ciencias (UCV), 2000.

---

---

# APÉNDICE A

---

## DETALLES DE LA SOLUCIÓN

### A.1. Autovalores

Para hallar los autovalores de (2.15) hagamos el siguiente cambio de variable[21]:

$$y = \tanh(Bx). \tag{A.1}$$

Sus derivadas son<sup>1</sup>:

$$f'(x) = B \operatorname{sech}^2(Bx) f_y, \tag{A.2}$$

---

<sup>1</sup>tomando en cuenta que:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{df}{dy},$$

$$f''(x) = B^2 (\operatorname{sech}^4(Bx)f_{yy} - 2\operatorname{sech}^2(Bx)\tanh(Bx)f_y), \quad (\text{A.3})$$

además como:

$$\frac{2}{\cosh^2(Bx)} = 2\operatorname{sech}^2(Bx), \quad (\text{A.4})$$

la ec.(2.15) se transforma en :

$$- B^2\operatorname{sech}^4(Bx)f_{yy} + 2B^2\operatorname{sech}^2(Bx)yf_y + (1 - 2\operatorname{sech}^2(Bx))f = \Gamma_n f, \quad (\text{A.5})$$

$$- B^2\operatorname{sech}^4(Bx)f_{yy} + 2B^2\operatorname{sech}^2(Bx)yf_y + (1 - \Gamma_n - 2\operatorname{sech}^2(Bx))f = 0, \quad (\text{A.6})$$

dividiendo (A.5) por  $B^2\operatorname{sech}^2(Bx)$

$$- \operatorname{sech}^2(Bx)f_{yy} + 2yf_y - \left[ \frac{\Gamma_n - 1}{B^2\operatorname{sech}^2(Bx)} + \frac{2}{B^2} \right] f = 0, \quad (\text{A.7})$$

sabemos que<sup>2</sup>

$$\operatorname{sech}^2(Bx) = 1 - \tanh^2(Bx) = 1 - y^2, \quad (\text{A.8})$$

que resulta en el Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal (EDOL) Asociada de Legendre

$$(1 - y^2)f_{yy} - 2yf_y + \left[ \Lambda(\Lambda + 1) - \frac{\mu^2}{1 - y^2} \right] f = 0, \quad (\text{A.9})$$

---

<sup>2</sup>Usando la identidad:  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

donde

$$\Lambda(\Lambda + 1) = \frac{2}{B^2}; \quad \mu^2 = \frac{1 - \Gamma_n}{B^2}. \quad (\text{A.10})$$

Una vez que logramos llegar a la EDOL Asociada de Legendre, debemos realizar el siguiente cambio de variable para transformarla en la EDOL Hipergeométrica:

$$f(y) = (1 - y^2)^{\frac{\mu}{2}} \varphi(z), \quad (\text{A.11})$$

con

$$z = \frac{1 - y}{2},$$

el cual nos lleva al resultado deseado:

$$z(1-z)\varphi''(z) + \{(\mu + 1) - [(-\Lambda + \mu) + (\Lambda + 1 + \mu) + 1]z\} \varphi'(z) - (\mu - \Lambda)(\mu + \Lambda + 1)\varphi(z) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Para simplificar la notación definamos los siguientes coeficientes:

$$a = -\Lambda + \mu; \quad b = \Lambda + 1 + \mu; \quad c = \mu + 1; \quad (\text{A.13})$$

tal que (A.12) se reescribe como:

$$z(1 - z)\varphi''(z) + [c - (a + b + 1)z] \varphi'(z) - ab\varphi(z) = 0. \quad (\text{A.14})$$

Una solución de (A.14) es la función Hipergeométrica:

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}; \quad c = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.15})$$

Recordemos que (para una función Hipergeométrica):

- Si  $a$  es un entero negativo la serie (A.15) termina en el término  $(1 - a)$
- Si  $b$  es un entero negativo la serie (A.15) termina en el término  $(1 - b)$

Para obtener soluciones debemos resolver el polinomio de grado  $n$  que se genera cuando la función Hipergeométrica termina.

Como  $a = -n$  (un entero negativo) tenemos en (A.13):

$$-n = -\Lambda + \mu, \quad (\text{A.16})$$

$$\mu^2 = (\Lambda - n)^2 = \Lambda^2 - 2\Lambda n + n^2, \quad (\text{A.17})$$

donde de ec.(A.10) nos queda

$$\Gamma_n = 1 - B^2(\Lambda^2 - 2\Lambda n + n^2) = 1 + B^2 \left( -\frac{2}{B^2} + \Lambda + 2\Lambda n - n^2 \right), \quad (\text{A.18})$$

obteniendo así los autovalores:

$$\boxed{\Gamma_n = B^2(\Lambda + 2\Lambda n - n^2) - 1} \quad (\text{A.19})$$

## A.2. Autovectores

$$P_{\Lambda}^{\mu}(y) = (-1)^{\mu} \frac{\Gamma(\Lambda + \mu + 1)}{2^{\mu} \Gamma(\Lambda - \mu + 1) \mu!} (1 - y^2)^{\frac{\mu}{2}} F\left(\mu - \Lambda, \mu + \Lambda + 1; \mu + 1; \frac{1 - y}{2}\right). \quad (\text{A.20})$$

Sabemos que si  $\Lambda$  adopta valores enteros, al igual que  $\mu$  podemos usar algunas propiedades de  $P_{\Lambda}^{\mu}$  junto con la fórmula de Rodrigues para llegar a la siguiente ecuación:

$$P_{\Lambda}^{\mu}(y) = (-1)^{\mu} \frac{(1 - y^2)^{\frac{\mu}{2}}}{2^{\Lambda} \Lambda!} \frac{d^{\Lambda + \mu}}{dy^{\Lambda + \mu}} (y^2 - 1)^{\Lambda}, \quad (\text{A.21})$$

recordando que  $\mu \leq \Lambda$ . Además usando la ec.(A.10) reescribimos la ec.(A.21) así

$$P_{\Lambda}^{\Lambda - n}(y) = (-1)^{\Lambda - n} \frac{(1 - y^2)^{\frac{\Lambda - n}{2}}}{2^{\Lambda} \Lambda!} \frac{d^{2\Lambda - n}}{dy^{2\Lambda - n}} (y^2 - 1)^{\Lambda}. \quad (\text{A.22})$$

Por ejemplo si usamos  $B = 0.5$  entonces  $\Lambda = 2$  y la ec.(A.22) se convierte en:

$$P_2^{\Lambda - n}(y) = (-1)^{2 - n} \frac{(1 - y^2)^{\frac{2 - n}{2}}}{2^2 2!} \frac{d^{4 - n}}{dy^{4 - n}} (y^2 - 1)^2, \quad (\text{A.23})$$

así para el primer modo ( $n = 0$ ) tenemos:

$$P_2^2(y) = \frac{1 - y^2}{8} \frac{d^4}{dy^4} (y - 1)^2 = \frac{4!}{8} (1 - y^2) = 3(1 - y^2), \quad (\text{A.24})$$

mientras que el segundo modo ( $n = 1$ ) tiene la siguiente autofunción

$$P_2^1(y) = -\frac{(1 - y^2)^{1/2}}{8} \frac{d^3}{dy^3} (y^2 - 1)^2 = -\frac{4! y \sqrt{1 - y^2}}{8} = -3y \sqrt{1 - y^2}. \quad (\text{A.25})$$

Si usamos el cambio de variable (A.1) en las ecuaciones (A.24) y (A.25) tenemos:

$$P_2^2(\tanh(x/2)) = 3\operatorname{sech}^2(x/2), \quad P_2^1(\tanh(x/2)) = -3\tanh(x/2)\operatorname{sech}(x/2) \quad (\text{A.26})$$

---

---

# APÉNDICE B

---

## DISCRETIZACIÓN

En este trabajo hemos utilizado el método implícito de diferencias finitas para la solución del sistema seno de Gordon perturbado. Consideramos condiciones de frontera abierta,

$$\phi_x(-L/2, t) = \phi_x(L/2, t) = 0, \quad (\text{B.1})$$

y utilizamos un kink como condición inicial,

$$\phi(x, 0) = A \tanh \left[ \frac{B(x - x_0)}{\sqrt{1 - v_0^2}} \right], \quad (\text{B.2})$$

$$\phi_t(x, 0) = \frac{-ABv_0}{\sqrt{1 - v_0^2}} \cosh^2 \left[ \frac{B(x - x_0)}{\sqrt{1 - v_0^2}} \right], \quad (\text{B.3})$$

donde A y B son constantes; y  $x_0$  y  $v_0$  son la posición y velocidad inicial del centro de masa del solitón, respectivamente.

El centro de masa del solitón lo definimos como sigue

$$X_{C.M.} = \frac{\int_{-L/2}^{+L/2} x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx}{\int_{-L/2}^{+L/2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx} \quad (\text{B.4})$$

donde  $l$  es la longitud del sistema.

## Implementación Numérica de la ecuación seno de Gordon

Supongamos que queremos modelar el sistema descrito por la siguiente ecuación de movimiento:

$$\partial_t^2 \phi(x, t) - \partial_x^2 \phi(x, t) - V(\phi(x, t)) = F(x), \quad (\text{B.5})$$

donde  $V(x)$  y  $F(x)$  representan la fuerza debida al potencial y una fuerza externa respectivamente.

El sistema descrito por la ecuación (B.5) posee las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$\phi(x, 0) = H(x) \quad (\text{B.6})$$

$$\phi_t(x, 0) = G(x) \quad (\text{B.7})$$

$$\phi_x(L/2, t) = \phi_x(-L/2, t) = \eta \quad (\text{B.8})$$

Ahora transformemos nuestras variables para adaptarla a una red

$$x \rightarrow x_i = ih \quad i = 1, 2, \dots, M \quad h = L/M \quad (\text{espacio}) \quad (\text{B.9})$$

$$t \rightarrow t_j = jk \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (\text{tiempo}) \quad (\text{B.10})$$

$$V \rightarrow V_j^i = -\text{sen}(\phi_i^j) \quad F \rightarrow F_i = F(x_i)$$

además usando las siguientes diferencias finitas centradas:

$$\phi_{tt} = \frac{\phi_i^{j+1} - 2\phi_i^j + \phi_i^{j-1}}{k^2} \quad (\text{B.11})$$

$$\phi_{xx} = \frac{\phi_{i+1}^j - 2\phi_i^j + \phi_{i-1}^j}{h^2} \quad (\text{B.12})$$

$$\phi_t = \frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^{j-1}}{2k} \quad (\text{B.13})$$

las condiciones iniciales se reescriben como:

$$H(x) \rightarrow H(x_i) = \phi_i^0 \quad (\text{B.14})$$

$$G(x) \rightarrow G(x_i) = \frac{\phi_i^1 - \phi_i^{-1}}{2k} \quad (\text{B.15})$$

$$\eta = \frac{\phi_{M+1}^j - \phi_{M-1}^j}{2h} = \frac{\phi_1^j - \phi_{-1}^j}{2h} \quad (\text{B.16})$$

sustituyendo las ecs. (B.11) y (B.12) en ecuación (B.5) nos queda:

$$\frac{\phi_i^{j+1} - 2\phi_i^j + \phi_i^{j-1}}{k^2} - \frac{\phi_{i+1}^{j+1} - 2\phi_i^{j+1} + \phi_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \alpha \frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^{j-1}}{2k} - V_i^j - F_i = 0 \quad (\text{B.17})$$

Observese que hemos empleado un tiempo  $t = j + 1$  en la derivada segunda espacial lo cual indica que se empleará el método completamente implícito. A continuación analizaremos 5 zonas especiales dentro de nuestra red:

- Parte Central ( $0 < i < M, j > 0$ )

La ec. (B.17) queda como:

$$\left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{h^2} + \frac{\alpha}{2k}\right) \phi_i^{j+1} - \frac{1}{h^2} (\phi_{i+1}^{j+1} + \phi_{i-1}^{j+1}) = \frac{2}{k^2} \phi_i^j + \left(\frac{\alpha}{2k} - \frac{1}{k^2}\right) \phi_i^{j-1} + V_i^j + F_i \quad (\text{B.18})$$

- Esquinas

- Izquierda ( $i = j = 0$ )

$$\left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{h^2} + \frac{\alpha}{2k}\right) \phi_0^1 - \frac{1}{h^2} (\phi_1^1 + \phi_{-1}^1) = \frac{2}{k^2} \phi_0^0 + \left(\frac{\alpha}{2k} - \frac{1}{k^2}\right) \phi_0^{-1} + V_0^0 + F_0$$

Usando las condiciones (B.16) y (B.14)

$$\phi_{-1}^1 = \phi_1^1 - 2\eta h; \quad \phi_0^{-1} = \phi_0^1 - 2kG_0 \quad (\text{B.19})$$

llegamos al siguiente resultado

$$2\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{h^2}\right) \phi_0^1 - \frac{2}{h^2} \phi_1^1 = \frac{2}{k^2} \phi_0^0 + \left(\frac{2}{k} - \alpha\right) G_0 + V_0^0 + F_0 - \frac{2\eta}{h} \quad (\text{B.20})$$

- Derecha ( $i = M, j = 0$ )

$$\left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{h^2} + \frac{\alpha}{2k}\right) \phi_M^1 - \frac{1}{h^2} (\phi_{M+1}^1 + \phi_{M-1}^1) = \frac{2}{k^2} \phi_M^0 + \left(\frac{\alpha}{2k} - \frac{1}{k^2}\right) \phi_M^{-1} + V_M^0 + F_M \quad (\text{B.21})$$

La cual al usar las condiciones:

$$\phi_{M+1}^1 = 2h\eta + \phi_{M-1}^1; \quad \phi_M^{-1} = \phi_M^1 - 2kG_M \quad (\text{B.22})$$

nos lleva al siguiente resultado:

$$2\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{h^2}\right) \phi_M^1 - \frac{2}{h^2} \phi_{M-1}^1 = \frac{2}{k^2} \phi_M^0 + \left(\frac{2}{k} - \alpha\right) G_M + V_M^0 + F_M + \frac{2\eta}{h} \quad (\text{B.23})$$

- Lados

- Derecho ( $i = M, j > 0$ )

$$\left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{h^2} + \frac{\alpha}{2k}\right) \phi_M^{j+1} - \frac{1}{h^2} (\phi_{M+1}^{j+1} + \phi_{M-1}^{j+1}) = \frac{2}{k^2} \phi_M^j + \left(\frac{\alpha}{2k} - \frac{1}{k^2}\right) \phi_M^{j-1} + V_M^j + F_M \quad (\text{B.24})$$

Usando la siguiente condición:

$$\phi_{M+1}^{j+1} = \phi_{M-1}^{j+1} + 2h\eta \quad (\text{B.25})$$

llegamos a la siguiente expresión:

$$\left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{h^2} + \frac{\alpha}{2k}\right) \phi_M^{j+1} - \frac{2}{h^2} \phi_{M-1}^{j+1} = \frac{2}{k^2} \phi_M^j + \left(\frac{\alpha}{2k} - \frac{1}{k^2}\right) \phi_M^{j-1} + V_M^j + F_M + \frac{2\eta}{h} \quad (\text{B.26})$$

- Izquierdo ( $i = 0, j > 0$ )

$$\left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{h^2} + \frac{\alpha}{2k}\right)\phi_0^{j+1} - \frac{1}{h^2}(\phi_1^{j+1} + \phi_{-1}^{j+1}) = \frac{2}{k^2}\phi_0^j + \left(\frac{\alpha}{2k} - \frac{1}{k^2}\right)\phi_0^{j-1} + V_0^j + F_0 \quad (\text{B.27})$$

Cuando usamos la siguiente condición:

$$\phi_{-1}^{j+1} = \phi_1^{j+1} - 2h\eta \quad (\text{B.28})$$

nos queda la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{h^2} + \frac{\alpha}{2k}\right)\phi_0^{j+1} - \frac{2}{h^2}\phi_1^{j+1} = \frac{2}{k^2}\phi_0^j + \left(\frac{\alpha}{2k} - \frac{1}{k^2}\right)\phi_0^{j-1} + V_0^j + F_0 - \frac{2\eta}{h} \quad (\text{B.29})$$

- Base ( $0 < i < M, j = 0$ )

$$\left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{h^2} + \frac{\alpha}{2k}\right)\phi_i^1 - \frac{1}{h^2}(\phi_{i+1}^1 + \phi_{i-1}^1) = \frac{2}{k^2}\phi_i^0 + \left(\frac{\alpha}{2k} - \frac{1}{k^2}\right)\phi_i^{-1} + V_i^0 + F_i \quad (\text{B.30})$$

Usando el siguiente cambio:

$$\phi_i^{-1} = \phi_i^1 - 2kG_i \quad (\text{B.31})$$

nos queda

$$2\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{h^2}\right)\phi_i^1 - \frac{1}{h^2}(\phi_{i+1}^1 + \phi_{i-1}^1) = \frac{2}{k^2}\phi_i^0 + \left(\frac{2}{k} - \alpha\right)G_i + V_i^0 + F_i \quad (\text{B.32})$$

Encontramos que la solución para el primer iterado en el tiempo es:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{2}{k^2} + \frac{2}{h^2}\right) & -\frac{2}{h^2} & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \left(\frac{2}{k^2} + \frac{2}{h^2}\right) & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & -\frac{2}{h^2} & \left(\frac{2}{k^2} + \frac{2}{h^2}\right) & \end{pmatrix} \Phi^1 = \\
 \begin{pmatrix} -\frac{2\eta}{h} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{2\eta}{h} \end{pmatrix} + \frac{2}{k^2} \Phi^0 + \left(\frac{2}{k} - \alpha\right) \mathbf{G} + \mathbf{V} + \mathbf{F}. \quad (\text{B.33})$$

Luego podemos escribir la solución para cualquier  $j > 0$  como:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{h^2} + \frac{\alpha}{2k}\right) & -\frac{2}{h^2} & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{h^2} + \frac{\alpha}{2k}\right) & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & -\frac{2}{h^2} & \left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{h^2} + \frac{\alpha}{2k}\right) & \end{pmatrix} \Phi^{j+1} = \\
 \begin{pmatrix} -\frac{2\eta}{h} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{2\eta}{h} \end{pmatrix} + \frac{2}{k^2} \Phi^j + \left(\frac{\alpha}{2k} - \frac{1}{k^2}\right) \Phi^{j-1} + \left(\frac{2}{k} - \alpha\right) \mathbf{G} + \mathbf{V} + \mathbf{F}. \quad (\text{B.34})$$

En ambos casos debemos resolver un sistema tridiagonal.