

# TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

## EVALUACIÓN DEL ANÁLISIS MULTIFRACTAL DE DATOS SÍSMICOS PARA LA CARACTERIZACIÓN DE YACIMIENTOS.

Presentado ante la Ilustre  
Universidad Central de Venezuela

Por el Br. Yépez B., Cesar A

Para optar al Título  
de Ingeniero Geofísico.

Caracas, 2012.

# TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

## EVALUACIÓN DEL ANÁLISIS MULTIFRACTAL DE DATOS SÍSMICOS PARA LA CARACTERIZACIÓN DE YACIMIENTOS.

TUTOR ACADÉMICO: Prof. César Noguera.

TUTOR INDUSTRIAL: Ing. Andrés Espeso.

Presentado ante la Ilustre  
Universidad Central de Venezuela

Por el Br. Yépez B., César A

Para optar al Título  
de Ingeniero Geofísico.

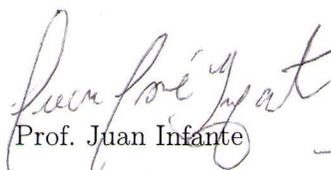
Caracas, 2012.

Caracas, (7, 2012)

Los abajo firmantes, miembros del Jurado designado por el Consejo de Escuela de Ingeniería geofísica, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por el Bachiller, titulado: **DEDICATORIA**

**“Evaluación del análisis multifractal de datos sísmicos para la  
caracterización de yacimientos”**

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el plan de estudios conducente al Título de Ingeniero geofísico, y sin que ello signifique que se hacen solidarios con las ideas expuestas por el autor, lo declaran APROBADO.



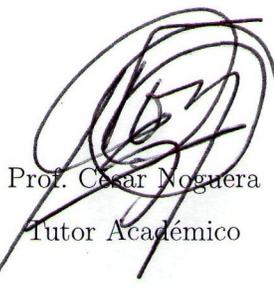
Prof. Juan Infante

Jurado



Prof. José Cavada

Jurado



Prof. César Noguera  
Tutor Académico



Ing. Andrés Espeso  
Tutor Industrial

# DEDICATORIA

*... A mi madre Siomara, mi padre Luis y a mis hermanos Pepe, Carlos y Danny.*

## AGRADECIMIENTOS

A Dios a quien debo hasta la partícula más ínfima de mí.

A la Universidad Central de Venezuela de la cual soy un grato deudor.

A mi familia por ser el primer motor de mi vida.

A Airam y Arturo hijos de distintas madres, siempre incondicionales no hay palabra que exprese mi agradecimiento.

A Ingemar Quintero y Carlos Contreras, *Elen sila lúmenn' omentielmo*.

A Yessy Palacios, Yolmer Berrios, Jeiker Lozano y Carlos Gonzales quienes formaron parte de mi vida fuera y dentro de la universidad.

A Yuniev y su familia que me hicieron parte de los suyos, muchas gracias.

A Diego y Angelvis compañeros de King's Garden.

A Andrés Espeso, Noguera César y Pablo Ricaurte cuya ayuda, apoyo y conocimiento son parte de esta obra.

A todos los que no he podido mencionar y que forman parte de éste.

Yépez B., César A

## EVALUACIÓN DEL ANÁLISIS MULTIFRACTAL DE DATOS SÍSMICOS PARA LA CARACTERIZACIÓN DE YACIMIENTOS

**Tutor Académico:** Prof. César Noguera. **Tutor Industrial:** Ing. Andrés Espeso. **Tesis.** Caracas, U.C.V. Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Geológica, Minas y Geofísica. Año 2012, n<sup>o</sup>p(169)

**Palabras Claves:** Multifractal, exponente de *Hölder*, dimensión fractal, transformada ondícula módulo máximo, fluidos de yacimiento.

**Resumen.** Actualmente en la caracterización sísmica de yacimiento se han establecido avances para la predicción de fluidos de reservorio, enfocados en el análisis multifractal de las señales sísmicas, a partir de la herramienta espectral “transformada ondícula módulo máximo” (WTMM por sus siglas en inglés). Dichos estudios se han aplicado sobre datos sintéticos y han logrado diferenciar las distintas fases de un yacimiento, hoy por hoy, en la industria petrolera venezolana no se tiene mayor conocimiento del estado del arte del análisis multifractal en la discriminación de fluidos. En vista de lo planteado anteriormente este trabajo surge de la necesidad de entender y evaluar el análisis multifractal para delimitación de fluidos en un yacimiento. En el ámbito del análisis de riesgos este problema se conoce

como “valor de información”, en el cual la caracterización sísmica de yacimiento juega un papel muy importante al ser una herramienta que permite reducir la incertidumbre en la posible delimitación de hidrocarburos (Bickerl, Gibson y Mc-Vay, 2006). Por lo tanto el método de análisis multifractal de señales, de ser capaz de diferenciar fluidos de yacimiento, será un elemento muy útil al momento de disminuir la incertidumbre en las logísticas de perforación. De esta investigación los resultados más categóricos arrojan que el subsuelo tiene un comportamiento multifractal lo que significa que es un medio constituido por singularidades de orden variable, las variables ancho del espectro y *Hölder* pico son las herramienta más eficiente del análisis multifractal que permiten discriminar modelos teóricos que imitan la respuesta sísmica de fluidos de yacimiento y por último la discriminación de saturaciones a partir del análisis multifractal no presenta un comportamiento lineal en relación a la porosidad, por lo que se propone la continuación del estudio en este tipo de problemás de forma tal de establecer resultados más concluyentes.

# Índice general

<b>DEDICATORIA</b>	<b>IV</b>
<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>v</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>VI</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>I. EL PROBLEMA</b>	<b>3</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	3
1.1.1. Objetivos . . . . .	4
1.2. Justificación . . . . .	5
<b>II. MARCO TEÓRICO</b>	<b>7</b>
2.1. Definición de fractalidad de Mandelbrot . . . . .	7
2.2. Introducción a la geometría y medida fractal . . . . .	8
2.2.1. Ideas sobre dimensión . . . . .	9
2.2.2. Dimensión y medida de Hausdorff . . . . .	11
2.2.3. Dimensión fractal: . . . . .	14
2.2.4. Tipos de dimensión fractal . . . . .	16
2.3. Conjuntos auto-afines: . . . . .	17
2.4. Multifractales . . . . .	19
2.4.1. Medida y distribución de masa . . . . .	20
2.5. Series de tiempo Multifractales . . . . .	22

2.6.	Introducción a la transformada ondícula . . . . .	24
2.6.1.	Análisis espectral de Fourier . . . . .	24
2.6.2.	Espectrograma . . . . .	26
2.7.	Espectrograma de análisis de ventana móvil o transformada seccional de Fourier . . . . .	27
2.7.1.	Relación tiempo-frecuencia . . . . .	29
2.7.2.	Relación entre la transformada de Fourier y las funciones de Gabor . . . . .	29
2.7.3.	Transformada ondícula . . . . .	31
2.8.	Singularidades en una función . . . . .	34
2.9.	Regularidad de Lipschitz . . . . .	35
2.9.1.	Exponente de Lipschitz . . . . .	36
2.10.	Momentos cero de una ondícula . . . . .	38
2.10.1.	Supresión del comportamiento polinomial . . . . .	38
2.10.2.	Operador diferencial multiescala y relación entre el decaimiento de la transformada ondícula y la regularidad . . . . .	40
2.11.	Transformada ondícula módulo máximo . . . . .	44
2.11.1.	Detección de singularidades . . . . .	45
2.12.	Espectro de singularidad . . . . .	49
2.12.1.	Función de partición . . . . .	49
2.12.2.	Transformada de Legendre . . . . .	51
2.13.	Dimensiones Generalizadas de Rényi . . . . .	52

**IIIMARCO METODOLÓGICO 55**

3.1.	Síntesis . . . . .	55
3.2.	Variables de entrada . . . . .	56
3.2.1.	Modelos teóricos del subsuelo a partir de velocidades y densidades, características de fluidos de yacimiento . . . . .	59

3.2.2.	Modelo a partir de registros de pozo con validación de contenido de fluido (gas) . . . . .	60
3.2.3.	Modelos teóricos a partir de la sustitución de fluidos por medio de la ecuación de Gassman . . . . .	62
3.2.4.	Datos reales . . . . .	72
3.3.	Cálculo numérico . . . . .	73
3.3.1.	Resumen . . . . .	73
3.3.2.	Transformada ondícula . . . . .	73
3.3.3.	Cálculo de la función de partición $Z(q, s)$ . . . . .	84
3.3.4.	Cómputo del exponente de escalamiento $\tau(q)$ . . . . .	87
3.3.5.	Cálculo de el espectro multifractal $D(\alpha)$ . . . . .	91
3.3.6.	Dimensiones generalizadas de Rényi . . . . .	95
3.4.	Variables de salida . . . . .	98

#### **IV.RESULTADOS Y ANÁLISIS** **100**

4.1.	Fundamentación teórica de la herramienta matemática multifractal con los principios físicos de la sísmica de prospección . . . . .	101
4.1.1.	Introducción . . . . .	101
4.1.2.	Modelado de las transiciones sísmicas . . . . .	102
4.1.3.	Transiciones y reflectividad . . . . .	105
4.2.	Evaluación del análisis multifractal en modelos teóricos que emulan características de yacimientos ( $V_p$ y $\rho$ ). . . . .	109
4.3.	Evaluación del análisis multifractal en datos sísmicos sintéticos cuyo contenido de fluidos es validado . . . . .	116
4.4.	Evaluación del análisis multifractal en datos sísmicos reales cuyo contenido de fluidos ya sea validado . . . . .	119
4.5.	Evaluación del análisis multifractal en una roca con saturaciones variantes de gas y agua (sustitución de fluidos). . . . .	123

<b>V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>130</b>
5.1. Fundamentación teórica de la herramienta matemática multifractal con los principios físicos de la sísmica de prospección . . . . .	130
5.2. Evaluación del análisis multifractal en modelos teóricos que emulan características de yacimientos ( $V_p$ y $\rho$ ). . . . .	131
5.3. Evaluación del análisis multifractal en datos sísmicos sintéticos cuyo contenido de fluidos es validado . . . . .	132
5.4. Evaluación del análisis multifractal en datos sísmicos reales cuyo contenido de fluidos ya es validado . . . . .	132
5.5. Evaluación del análisis multifractal en una roca con saturaciones variantes de gas y agua (sustitución de fluidos). . . . .	133
 <b>BIBLIOGRAFÍA</b>	 <b>134</b>
 <b>APÉNDICES</b>	 <b>139</b>
 <b>ANEXOS</b>	 <b>145</b>
 <b>NOTACIÓN</b>	 <b>150</b>

## Índice de tablas

3.1. Valores de $V_p$ y $\rho$ tomados de (Robert y Wrolstad, 1993) . . . . .	57
3.2. Valores de condiciones iniciales para la sustitución de fluidos tomado de (Mavko, Mukerji y Dvorkin, 1998) . . . . .	58
3.3. Modelos monofásicos del subsuelo . . . . .	59
3.4. Modelos bifásicos del subsuelo . . . . .	60
3.5. Módulo volumétrico y densidad de la mezcla de fluidos . . . . .	65
3.6. Modelos teóricos a partir de la sustitución de fluidos por medio de la ecuación de Gassman . . . . .	69
4.1. Riesgos asociados a la discriminación de fluidos . . . . .	116
4.2. Relación entre las impedancias acústicas de los modelos teóricos y sustitución de fluidos . . . . .	127
4.3. Porosidad según el tipo de empaquetamiento . . . . .	127

## Índice de figuras

2.1. Recubrimiento de un conjunto a partir de elementos de dimensión conocida . . . . .	8
2.2. a) Atractor, b) Movimiento Browniano . . . . .	9
2.3. Idea intuitiva de dimensión topológica, en los recuadros inferiores se muestran las dimensiones de los distintos elementos geométricos asociados a los grados de libertad cuya dirección se señala en el recuadro de la derecha . . . . .	9
2.4. Dimensión a partir de objetos congruentes. Modificado de (Kraft, s.f) . . . . .	10
2.5. Dos (2) posibles recubrimientos de un conjunto $F$ . El ínfimo valor de la sumatoria sobre todos los recubrimientos provee $H_{\delta}^s(F)$ . . .	12
2.6. Gráfico del $H^s(F)$ contra $s$ para un conjunto $F$ . La dimensión de Hasudorff es el valor en el cual ocurre el “salto” de $\infty$ a 0 . . . . .	13
2.7. Dos líneas a las cuales se les aplica el método de “conteo de caja” para calcular la dimensión fractal. Para la línea de la Figura (a) el valor de la ecuación (2.7) corresponde al valor entero uno (1). Para el caso de la Figura (b) arroja el valor fraccionario $d_f = 1,2$ (tomado de (Huego, 2011)) . . . . .	15
2.8. Superior: Curva de Koch, inferior: Transformada ondícula de la curva de Koch. Ambas presentan una estructura auto-afín, como era de esperarse de acuerdo a la deducción (2.9) . . . . .	19

2.9. Construcción de una señal $f(t)$ a partir de combinaciones de distintas funciones monocromáticas (armónicos) . . . . .	25
2.10. Cajas tiempo-frecuencia (Rectángulos de Hesienberg) representando la dispersión de energía de dos átomos de Gabor. . . . .	30
2.11. “Cajas ”en el plano tiempo-frecuencia de dos ondículas $\psi_{u,s}$ y $\psi_{u_0,s_0}$ . . . . .	33
2.12. “Cajas ”en el plano tiempo-frecuencia de una base de ondículas. . . . .	33
2.13. Ejemplificación de singularidades en una señal real (Modificado de (Physionet, s.f)), singularidad tipo paso (azul) y tipo cúspide (verde) . . . . .	35
2.14. Transformada ondícula calculada con $\psi = -\theta'$ donde $\theta$ es una Gaussiana, la señal evaluada se muestra en la parte superior (Modificado de (Mallat, 1999)) . . . . .	43
2.15. a) Transformada ondícula $T_\psi[f](u, s)$ , b) Transformada ondícula módulo máximo (líneas máximas) . . . . .	44
2.16. La convolución $f \star \bar{\theta}_s(u)$ promedia a $f$ en un dominio proporcional a $f$ . Si $\psi = -\bar{\theta}$ entonces $W_1 f(u, s) = s \frac{d}{du}(f \star \bar{\theta}_s)(u)$ tiene un módulo máximo en los puntos de variaciones agudas en $f \star \bar{\theta}_s(u)$ . Si $\psi = \theta^n$ entonces el módulo máximo de $W_2 f(u, s) = s^2 \frac{d^2}{du^2}(f \star \bar{\theta}_s)(u)$ corresponde a los puntos locales de máxima curvatura. . . . .	45
2.17. a) Movimiento Browniano, b) Transformada ondícula módulo máximo, c) Función de partición, d) Exponente de escalamiento y e) Espectro multifractal . . . . .	50
3.1. Esquema de la metodología utilizada . . . . .	56
3.2. Modelado directo Modificado de (Tearpock et al, 1991) . . . . .	57
3.3. Efecto de presencia de gas, en registros geofísicos de pozo . . . . .	58
3.4. Registros de pozo Pozo 1 (Rojo) Pozo 2 (Azul) , donde se indican los intervalos de interés . . . . .	61
3.5. Sismogramas sintéticos de los pozos Pozo 1 y Pozo 2 . . . . .	62

3.6. Comportamiento de la velocidad de onda p en función de los distintos valores de saturación. . . . .	69
3.7. Sismogramas sintéticos a partir de la sustitución de fluidos y en rojo la tendencia que cumplen los valores de impedancia acústica ( $S_w = 100\% \rightarrow$ máxima impedancia acústica) . . . . .	71
3.8. Trazas sísmicas, extraídas del cubo sísmico considerado. . . . .	72
3.9. Aproximación de una función periódica (trazado interrumpido) a la ondícula Morlet (trazado continuo) . . . . .	75
3.10. Relación entre el contenido de frecuencias y las escalas, espectro de amplitud (derecha) y relación escala frecuencia (izquierda) . . . . .	75
3.11. Transformada ondícula módulo máximo, en falso color tomando como referencia el máximo valor por escala . . . . .	76
3.12. Ondícula $\alpha$ (derecha) y $\theta$ (izquierda) diseñadas para la solución numérica del error en la transformada ondícula, en trazos la ondícula Morlet y continuo las ondículas respectivas . . . . .	78
3.13. Distribución de los errores en la transformada ondícula de la señal $f(t)$ , en falso color tomando como referencia el máximo absoluto. . . . .	79
3.14. Mapa esqueleto . . . . .	81
3.15. Máximos relativos de la transformada ondícula y el error asociado a la misma (fondo) . . . . .	83
3.16. Incertidumbre asociada a los máximos relativos de la transformada ondícula de la señal $f(t)$ . . . . .	83
3.17. Detalle tomado a la pseudo-frecuencia $50Hz$ (línea continua) y valores que cumplen la condición de la línea 13 del algoritmo 2 (cuadrado) . . . . .	84
3.18. Función de partición obtenida mediante el algoritmo 3 . . . . .	85
3.19. Incertidumbre asociada a la función de partición en un valor característico de $q = 1$ , estimado a partir de la ecuación (3.30) . . . . .	86
3.20. Aproximación lineal a la función de partición . . . . .	88
3.21. Exponente de escalamiento . . . . .	89

3.22. Aproximaciones lineales a los errores y a la medición respectivamente. En los ejes mayores se muestra la curva $q = 1$ de $\log_2 Z(q, s)$ con sus cotas superior e inferior asociadas a su entorno de certidumbre y en los ejes menores, las aproximaciones lineales correspondientes a dichas cotas y a la medición . . . . .	90
3.23. Exponente de escalamiento e incertidumbre asociada . . . . .	91
3.24. Exponente de <i>Hölder</i> . . . . .	93
3.25. Incertidumbre asociada a exponente de <i>Hölder</i> $\alpha$ . . . . .	94
3.26. Espectro multifractal, en línea continua aproximación polinómica de 2º y valor calculado en punto con la incertidumbre asociada a $\alpha$ . . . . .	95
3.27. Dimensiones generalizadas $D_q$ y su incertidumbre asociada $\delta D_q$ . . . . .	98
3.28. Elementos catalogados como atributos en el espectro multifractal y dimensiones generalizadas . . . . .	99
4.1. En las Figuras superiores se muestran los splines fraccionarios causales y anti-causales respectivamente en un intervalo $0 \leq \alpha \leq 2$ y en el recuadro inferior se muestra el comportamiento del spline fraccional con $\alpha = -1$ . . . . .	104
4.2. Modelo 1D de tres capas del subsuelo (lutita, arena con gas y lutita) utilizado en la presente investigación, como se observa las propiedades de velocidad de onda p, densidad e impedancia acústica son modelados por splines fraccionales de orden cero (0). . . . .	106
4.3. Tomada de (Herrmann, 2000), se muestra un ejemplo del análisis local de un registro sísmico de pozo, en la Figura (a) se muestra el registro sísmico, (b) es la transformada ondícula módulo máximo del registro anterior, por último en las Figuras (c)-(f), se estima el exponente de <i>Hölder</i> local. . . . .	108
4.4. Atributo $\Omega\Lambda$ . . . . .	110
4.5. Atributo $\Omega\Lambda$ y los conjuntos asociados . . . . .	110

4.6. Atributo $\Omega\chi_2$ . . . . .	112
4.7. Atributo $\chi_1\chi_2$ . . . . .	113
4.8. Matriz de coeficientes relativos de discriminación del atributo $\chi_1\chi_2$	114
4.9. Atributo $\chi_1\chi_2$ y sus conjuntos asociados . . . . .	115
4.10. Energía asociada a los transeptos de cada modelo teórico . . . . .	116
4.11. Espectros de singularidad de los sismogramas sintéticos del pozo 1 y el pozo 2 . . . . .	117
4.12. Energía asociada a los transeptos de los sismogramas sintéticos del pozo 1 y el pozo 2 . . . . .	118
4.13. Posición geométrica de las trazas a analizar . . . . .	119
4.14. Atributo $\Omega\Lambda$ y los tres (3) conjuntos en los que se subdividieron las trazas analizadas . . . . .	120
4.15. Anomalías de amplitud resaltadas por el atributo de fuerza de re- flexión en las trazas 1 y 2 junto con una sección entre pozos para el seguimiento de las anomalías entre los pozos . . . . .	121
4.16. Atributos sísmicos de: Amplitud RMS (izquierda), Fuerza de refle- xión (derecha) y Amplitud original (abajo) . . . . .	122
4.17. Atributo Fuerza de reflexión . . . . .	123
4.18. Zonas de interés propuestas, asociado a la presencia de gas . . . . .	123
4.19. Ejemplo modificado de (Hilterman,Zhou y Haitao, 2008), con el cual se muestra la poca capacidad del análisis AVO para discriminar saturaciones de gas. . . . .	124
4.20. Atributo $\Omega\Lambda$ de los sismogramas sintéticos obtenidos mediante la sustitución de fluidos. . . . .	125
4.21. Coeficiente de discriminación relativo para el atributo $\Omega\Lambda$ . . . . .	126
4.22. Energía asociada a los transeptos de los modelos de la sustitución de fluidos, como se observa es prácticamente la misma para cada modelo . . . . .	126
4.23. Atributo $\Omega\Lambda$ en modelos con porosidad de 47,6% . . . . .	128

4.24. Atributo $\Omega\Lambda$ en modelos con porosidad de 39,5% . . . . .	128
5.1. Modelo 1 . . . . .	145
5.2. Modelo 2 . . . . .	146
5.3. Modelo 3 . . . . .	146
5.4. Modelo 4 . . . . .	147
5.5. Modelo 5 . . . . .	147
5.6. Modelo 6 . . . . .	148
5.7. Modelo 7 . . . . .	148
5.8. Modelo 8 . . . . .	149
5.9. Modelo 9 . . . . .	149

# INTRODUCCIÓN

La demanda de petróleo y gas, sin duda, continuará en el próximo siglo, mejorar la eficiencia en la predicción de fluidos de yacimiento en los campos existentes es un avance importante en la caracterización sísmica de yacimientos (Packwood, 1997).

El foco de este estudio esta en evaluar el análisis multifractal de datos sísmicos con el fin de reducir la incertidumbre en la predicción de fluidos de yacimiento ya que en la actualidad, en la industria petrolera venezolana no se tiene mayor conocimiento del estado del arte del análisis multifractal en la discriminación de fluidos. En vista de lo planteado anteriormente este trabajo surge de la necesidad de entender y evaluar el análisis multifractal para delimitación de fluidos en un yacimiento.

La presente investigación consta de cinco capítulos, el Capítulo I se desarrolla la problemática que da origen a esta obra, en el Capítulo II se presentan las nociones teóricas que sustentan el análisis multifractal, seguidamente el Capítulo III, se plantea el diseño de la investigación, éste capítulo se subdivide en tres secciones, en la primera de estas se describen las variables de entrada (datos sísmicos) y su relevancia en la investigación, luego en una segunda sección se plantea el diseño del calculo numérico para el análisis multifractal y por último la tercera sección, se definen las variables de salida; en el Capítulo IV se presenta los resultados obtenidos al analizar mediante el algoritmo planteado los datos sísmicos definidos como variables de entrada, para finalizar en el Capítulo V se enfatizan los alcances de esta investigación.

Evaluar el análisis multifractal como herramienta para la discriminación de fluidos de yacimiento en datos sísmicos, es el principal objetivo de esta investigación, para esto se proponen las siguientes metas, Establecer la fundamentación teórica de la herramienta matemática multifractal con los principios físicos de la sísmica de prospección, seguida de identificar la posible relación entre el contenido de fluidos y el espectro multifractal, en tercer lugar evaluar el análisis multifractal en datos reales cuyo contenido de fluidos ya sea validado y por último evaluar el análisis multifractal en rocas con saturaciones variantes de gas.

# Capítulo I

## EL PROBLEMA

### 1.1. Planteamiento del problema

En el análisis de volúmenes sísmicos del subsuelo, se puede observar como las modificaciones en las medidas de amplitud pueden responder a: litología, porosidad e incluso al tipo de fluido (gas, petróleo, agua) (Dopkin y Wang, 2008).

Es aquí donde la caracterización sísmica de yacimientos también conocida como geofísica de yacimiento ha evolucionado en los últimos años como un estudio multidisciplinario, en función al aspecto crítico que representa en la economía de la mayoría de las organizaciones de exploración y producción (E & P) (Walls, Dvorkin y Carr, s.f). Acorde con (Sheriff, 1991) la geofísica de yacimientos se define como:

*“El uso de métodos geofísicos para ayudar a delimitar, describir o monitorear los cambios en el yacimiento mientras está en producción”*

Los últimos avances en la caracterización sísmica de yacimiento son la identificación y delineación del reservorio junto con la distribución de sus propiedades relevantes.

En la caracterización sísmica de yacimiento la descomposición espectral se refiere a cualquier método que produzca un análisis continuo tiempo/frecuencia. Esto permite la determinación del espesor de capas, la visualización estratigráfica y la

detección directa de hidrocarburos (Castagna y Sun, 2006) ,(Li y Liner, 2005). Actualmente en la caracterización sísmica de yacimiento se han establecido avances para la predicción de fluidos de reservorio, enfocados en el análisis multifractal de las señales sísmicas, a partir de la herramienta espectral “transformada ondícula módulo máximo” (WTMM por sus siglas en inglés) (Khan et al, 2007). Dichos estudios se han aplicado sobre datos sintéticos y han logrado diferenciar las distintas fases de un yacimiento (Khan et al, 2007),(Khan y Fadzil, 2007). En la actualidad, en la industria petrolera venezolana no se tiene mayor conocimiento del estado del arte del análisis multifractal en la discriminación de fluidos. En vista de lo planteado anteriormente este trabajo surge de la necesidad de entender y evaluar el análisis multifractal para delimitación de fluidos en un yacimiento.

### **1.1.1. Objetivos**

#### **Objetivo general**

Evaluar el análisis multifractal como herramienta para la discriminación de fluidos de yacimiento en datos sísmicos.

#### **Objetivos específicos**

1. Establecer la fundamentación teórica de la herramienta matemática multifractal para la aplicación en sísmica de prospección.
2. Definir modelos de tierra que emulen condiciones de yacimiento.
3. Identificar la posible relación entre el contenido de fluidos y el espectro multifractal.
4. Evaluar el análisis multifractal en datos reales cuyo contenido de fluidos ya sea validado.

5. Evaluar el análisis multifractal en rocas con saturaciones variantes de gas y agua.

## 1.2. Justificación

La presente investigación ha de justificar su origen en dos marcos principales, en primer lugar su carácter científico y en segundo su importancia netamente comercial.

En el marco investigativo, este trabajo tiene carácter innovador ya que pretende esclarecer un nuevo método en la diferenciación de fluidos de yacimientos por el análisis multifractal de señales y con esto aportar a la comunidad científica un elemento de sustento en investigaciones de esta índole.

En consecuencia, dada la importancia que en lo futuro se generará de esta investigación a la industria petrolera venezolana y por ende a la economía del país se tiene el siguiente precedente:

El sector petrolero en Venezuela es el más importante del país. Representa aproximadamente el 80 % de las exportaciones, el 20 % del producto interno bruto (PIB) del país y el 50 % de los ingresos del Estado, lo que convierte a este recurso en la verdadera locomotora económica del país (Latin Business Report, s.f).

El cometido de una compañía de E & P es extraer la mayor cantidad de reservas de un yacimiento para su posterior procesamiento y venta. Para recuperar estas reservas, la empresa necesita un primer avance que compete a la perforación de pozos los cuales representan una inversión inicial cuyos costos oscilan entre unos pocos cientos de miles de dólares para pozos relativamente poco profundos hasta millones de dólares para pozos muy profundos ( $\sim 20.000$  ft)(Kellogg, 2010), la inversión en estos pozos puede ser irrecuperable si estos resultan evidenciar poca o ninguna saturación de hidrocarburos.

En el ámbito del análisis de riesgos este problema se conoce como “valor de información”, en el cual la caracterización sísmica de yacimiento juega un papel muy

importante al ser una herramienta que permite reducir la incertidumbre en la posible delimitación de hidrocarburos (Bickerl, Gibson y McVay, 2006). Por lo tanto el método de análisis multifractal de señales, de ser capaz de diferenciar fluidos de yacimiento, será un elemento muy útil al momento de disminuir la incertidumbre en las logísticas de perforación.

## Capítulo II

### MARCO TEÓRICO

#### 2.1. Definición de fractalidad de Mandelbrot

“Un fractal es un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch excede estrictamente su dimensión topológica”.

Donde la dimensión topológica siempre se expresa como un número entero (Barcellos, s.f) .

La dimensión de Hausdorff-Besicovitch es substancialmente más complicada, está basada en la idea de “medida” o “extensión” de un conjunto de puntos. Estos son términos generalizados de los conceptos de “longitud”, “área” y “volumen”, cada una de estos términos es una medida asociada con objetos de una dimensión particular. El conjunto cuya dimensión va a ser calculada es cubierto de varias formas por un conjunto de medida conocida, tal como se muestra en la Figura 2.1. Cuando nos referimos a un conjunto  $F$  como un fractal, por lo general tendrá las siguientes características:

- $F$  posee una estructura fina por ejemplo: posee detalles a cualquier escala arbitraria.
- $F$  es muy irregular para ser descrita por la geometría tradicional, tanto local como globalmente.

- $F$  posee de alguna forma una estructura auto-afín, la cual puede ser aproximada o estadística.
- Usualmente, la “dimensión fractal” de  $F$  (definida de alguna forma) es mayor o igual a su dimensión topológica.

## 2.2. Introducción a la geometría y medida fractal

Una de las características importantes de los fenómenos físicos son sus propiedades geométricas. Por muchos años se ha utilizado la geometría Euclidiana o Riemmaniana para describir propiedades geométricas de los fenómenos naturales, esto produjo modelos que se describían mediante funciones suaves, analíticas, etc. El éxito de los modelos es indiscutible, pero existen muchos objetos en la naturaleza que no estaban descritos correctamente mediante el lenguaje tradicional de la geometría tales como conjuntos atractores o repulsores de los sistemas dinámicos, movimiento Browniano (véase Figura 2.2), distribuciones de materia en el universo y otros más. Por lo que B.B Mandelbrot en 1982 desarrollo un lenguaje más fino para describir estos elementos de manera más aproximada (Hansen, 2009).

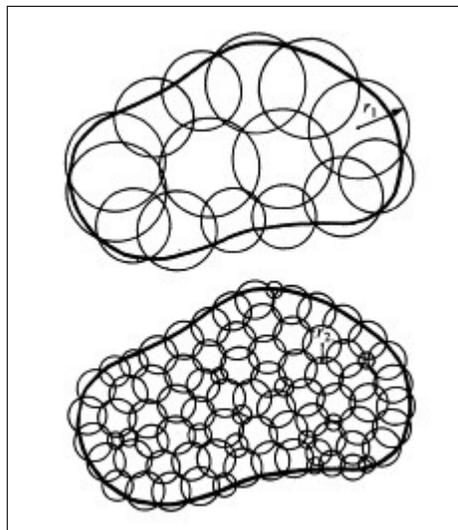


Figura 2.1: Recubrimiento de un conjunto a partir de elementos de dimensión conocida

La geometría clásica trata con objetos cuya dimensión es entera, intuitivamente se caracteriza un punto con dimensión cero (0), uno (1) para una línea, dos (2) para un plano y tres (3) para sólidos esta dimensión es conocida como dimensión topológica (véase Figura 2.3), más la geometría fractal describe elementos con dimensiones no enteras.

### 2.2.1. Ideas sobre dimensión

Una idea muy común es pensar que el valor de la dimensión de un objeto viene dado por sus direcciones independientes o sus grados de libertad Figura 2.3, por

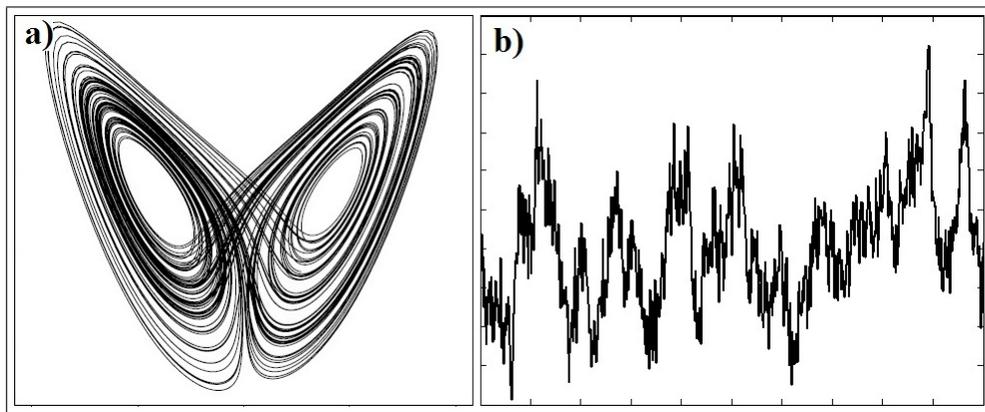


Figura 2.2: a) Atractor, b) Movimiento Browniano

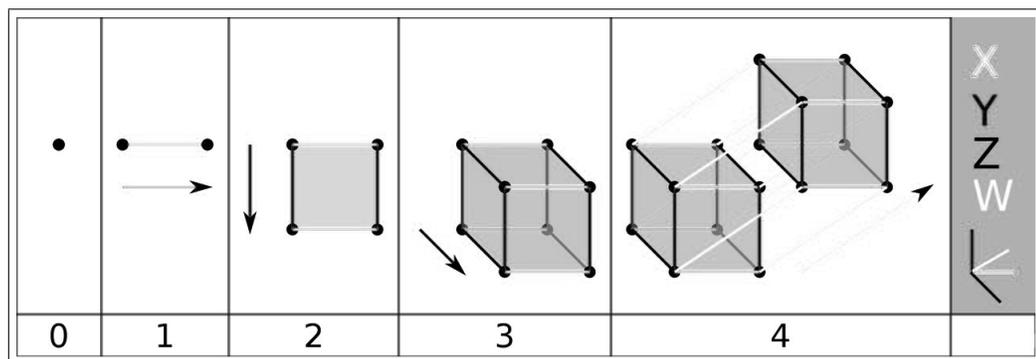


Figura 2.3: Idea intuitiva de dimensión topológica, en los recuadros inferiores se muestran las dimensiones de los distintos elementos geométricos asociados a los grados de libertad cuya dirección se señala en el recuadro de la derecha

lo que es necesario en primera instancia definir una caracterización de dimensión que permita realizar generalizaciones. Afortunadamente esto resulta simple considerando los efectos de la medida de dimensión de Figuras geométricas similares(Barcellos, s.f).

Consideremos un segmento unitario, cuya longitud se quintuplica, esto quiere decir que es expandido por un factor de cinco (5), este nuevo segmento contiene cinco (5) componentes congruentes ( ya que son copias del mismo segmento original) por lo que se denota  $5 = 5^1$ , este proceso se observa en la Figura 2.4.

De la Figura 2.4 se establece que la dimensión de un objeto puede ser obtenida mediante la ecuación (2.1)

$$N = s^d, \tag{2.1}$$

donde **N** es el número de componentes o elementos congruentes, **s** es el factor de escala y **d** es la dimensión. Lo expuesto anteriormente es cierto para objetos auto-semejantes (Barcellos, s.f).

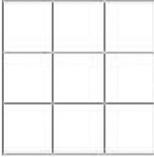
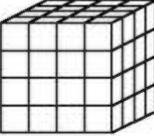
	s	N	$N=s^d$
 Línea	5	5	$5^1$
 Cuadrado	3	9	$3^2$
 Cubo	4	64	$4^3$

Figura 2.4: Dimensión a partir de objetos congruentes. Modificado de (Kraft, s.f)

### 2.2.2. Dimensión y medida de Hausdorff

Las nociones de dimensión son centrales para la geometría fractal, de forma rigurosa la dimensión indica cuanto espacio ocupan los puntos mas cercanos de un conjunto. De la amplia variedad de dimensiones fractales usadas la dimensión de Hausdorff es la mas antigua e importante ya que posee la ventaja de ser definida para cualquier conjunto y matemáticamente conveniente ya que esta basada en “medidas” que son relativamente fáciles de manipular (Falconer, 2003).

#### Medida de Hausdorff

Si  $U$  es un subconjunto no vacío en el espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , el diámetro de  $U$  es definido como se muestra en la ecuación (2.2)(Falconer, 2003),

$$|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}. \quad (2.2)$$

La ecuación anterior define el diámetro de un subconjunto de  $U$  como la mayor distancia que entre un par de puntos de  $U$ . Si  $\{U_i\}$  es una colección contable o finita de conjuntos de diámetro  $\delta$  en su mayoría que cubran  $F$ , por ejemplo  $F \subset \bigcup_i^\infty U_i$  con  $0 \leq |U_i| \leq \delta$  para cada  $i$  se dice que  $\{U_i\}$  es una  $\delta$ -cobertura de  $F$ . Supongase que  $F$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y  $s$  es un número positivo. Para cualquier  $\delta > 0$  se define:

$$H_\delta^s(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es una } \delta\text{-cobertura de } F\right\}. \quad (2.3)$$

De esta forma se definen los recubrimientos de  $F$  por conjuntos de diámetro  $\delta$  y se busca minimizar la sumatoria de potencia  $s$ . De forma tal que mientras  $\delta$  decrece, el número de recubrimientos permisibles de  $F$  son reducidos véase la Figura 2.5. Por lo tanto el infimum valor de  $H_\delta^s(F)$  es aproximado por la ecuación (2.4).

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F). \quad (2.4)$$

Este límite existe para cualquier subconjunto  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  y este puede tomar los valores de 0 ó  $\infty$ . Se denomina  $H^s(F)$  a la medida  $s$ -dimensional de Hausdorff de  $F$ .

**Nota de interés:** La noción concerniente a medida más importante es la medida de Hausdorff  $s$ -dimensional ( $H^s$ ) en un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , donde  $0 \leq s \leq n$ . Esta medida es una generalización de la medida de Lebesgue para dimensiones que no necesariamente son enteras.

### Dimensión de Hausdorff:

Retomando la ecuación (2.3) queda claro que para cualquier conjunto dado  $F \subset \mathbb{R}^n$  y  $\delta < 1$ ,  $H_\delta^s(F)$ , es no creciente con  $s$ . Entonces  $H_\delta^s(F)$  a partir de la ecuación (2.4) es no creciente también. En efecto es cierto que si  $t > s$  y  $\{U_i\}$  es un  $\delta$ -cobertura de  $F$  se tiene que:



Figura 2.5: Dos (2) posibles recubrimientos de un conjunto  $F$ . El ínfimo valor de la sumatoria sobre todos los recubrimientos provee  $H_\delta^s(F)$

$$\sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^{t-s} \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s.$$

Por lo que si se toma el ínfimo valor,  $H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F)$ , dejando  $\delta \rightarrow 0$  se observa que  $H^s(F) < \infty$  entonces  $H^s(F) = 0$  para  $t > s$ . En el gráfico 2.6 de  $H^s(F)$  contra  $s$  muestra el valor crítico de  $s$  para el cual  $H^s(F)$  presenta una discontinuidad abrupta de  $\infty \rightarrow 0$ .

Este valor crítico es llamado Dimensión de Hausdorff de  $F$  y es escrito como  $\dim_H F$  y es definido para cualquier conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$ . (Nótese que en la literatura puede encontrarse como Dimensión de Hausdorff-Besicovitch). Formalmente es definida por la ecuación (2.5).

$$\begin{aligned} \dim_H F &= \inf \left\{ s \geq 0 : H^s(F) = 0 \right\} \\ &= \sup \left\{ s : H^s(F) = \infty \right\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

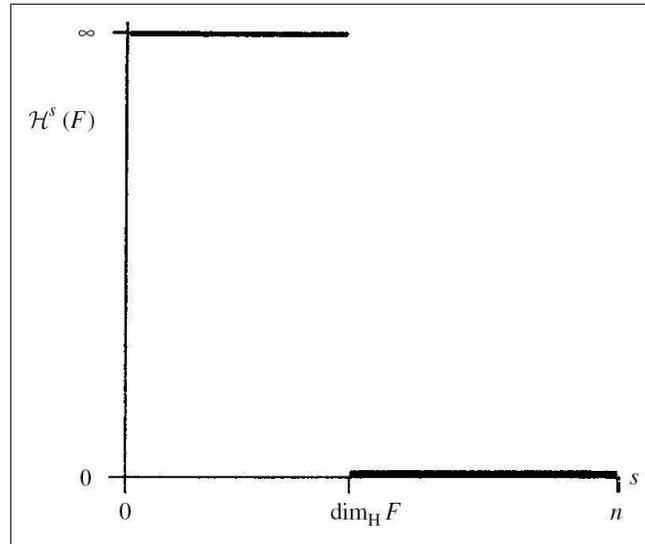


Figura 2.6: Gráfico del  $H^s(F)$  contra  $s$  para un conjunto  $F$ . La dimensión de Hausdorff es el valor en el cual ocurre el “salto” de  $\infty$  a 0

### 2.2.3. Dimensión fractal:

En geometría de fractales, la dimensión fractal,  $\mathbf{D}$  es un número real que generaliza el concepto de dimensión ordinaria para objetos geométricos que no admiten espacio tangente. La dimensión fractal es un exponente que da cuenta de cuán completamente parece llenar un fractal el espacio conforme se amplía el primero hacia escalas más y más finas. No existe una única dimensión fractal sino una serie de dimensiones que frecuentemente resultan equivalentes. Entre estas definiciones está la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, la dimensión de empaquetamiento, la dimensión de homotecia y las dimensiones de Rényi. Ninguna de estas dimensiones deberían ser tratada como universal, ya que a veces la discrepancia entre ellas está asociada a diferencias en la estructura interna del fractal. Sin embargo para un buen número de fractales clásicos los valores de las diferentes definiciones de dimensión fractal coinciden (Mandelbrot, 1982).

Para caracterizar cuantitativamente a un sistema fractal se debe definir en primera instancia lo que se denomina la dimensión de contención  $d_C$  del objeto, que es la menor dimensión euclidiana ( $d_e$ ), o del espacio clásico, en la que un objeto dado puede ser contenido (Mandelbrot, 1982). Por ejemplo si se tiene una línea curvada, como la de la Figura 2.7, se dice que esta línea está contenida en un plano, por lo tanto su dimensión de contención será 2. Una vez determinada la dimensión de contención del fractal es posible medir su dimensión fractal  $d_f$  propiamente dicha. Una forma de medir la  $d_f$ , entre varias posibles, es la siguiente: considere un objeto arbitrario de superficie  $S(l)$ , el cual puede medirse cubriéndose con cajas de tamaño  $l \times l$  y superficie  $l^{d_c}$  como se muestra en la Figura 2.7 considerando que se necesitan  $N(l)$  cajas para cubrirlo, con lo cual se define:

$$S(l) = N(l)l^{d_c},$$

al observar la expresión anterior se tiene que,  $N(l) \propto l^{-d_c}$  dado que la superficie de un objeto no cambia, si se modifica la unidad de medida  $l$ . Por ejemplo, considerando objetos euclidianos tradicionales, tenemos que la superficie del círculo es proporcional al cuadrado de su radio ( $l \propto r^2$ ) la superficie de un cuadrado es proporcional a su lado al cuadrado ( $S \propto l^2$ ), donde el número 2 corresponde al valor de la dimensión euclidiana de estos elementos. Sin embargo para los objetos fractales se observa que:

$$N(l) \propto N(l)l^{-d_f}, \quad (2.6)$$

donde  $d_f$  es un número no entero o fraccionario. A partir de la ecuación (2.6) se obtiene:

$$d_f = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln[N(l)]}{\ln(\frac{1}{l})}. \quad (2.7)$$

Existen muchos métodos para medir la dimensión fractal de un fractal aleatorio. Las más conocidas son el método de conteo de cajas (del ingles “box counting method”) . La elección del mejor método generalmente se determina según la

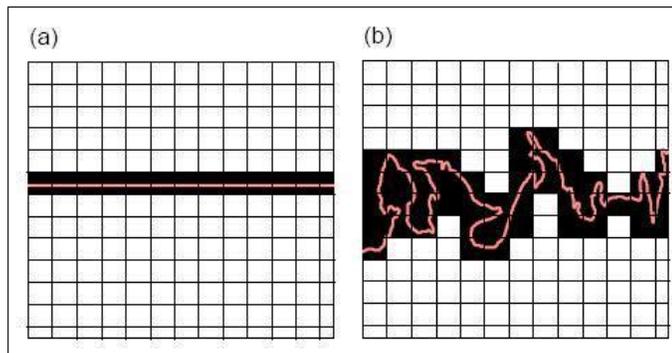


Figura 2.7: Dos líneas a las cuales se les aplica el método de “conteo de caja” para calcular la dimensión fractal. Para la línea de la Figura (a) el valor de la ecuación (2.7) corresponde al valor entero uno (1). Para el caso de la Figura (b) arroja el valor fraccionario  $d_f = 1,2$  (tomado de (Hurgo, 2011))

situación experimental o numérica particular, o según la naturaleza de los datos.

#### 2.2.4. Tipos de dimensión fractal

Segun (Wikipedia, s.f) se tienen las siguientes aseveraciones:

$$D_T \leq D_{HB} \leq D_{MB} \leq D_E \leq D_C,$$
$$D_2 \leq D_1 \leq D_0,$$

donde:

$D_T$  : Dimensión topológica que es siempre un entero.

$D_{MB}$  : Dimensión de Minkowski-Bouligand o de conteo de cajas, a veces llamada dimensión de Hausdorff.

$D_E$  : Dimensión de empaquetado.

$D_{HB}$  : Dimensión de Hausdorff-Besicovitch que para los fractales clásicos suele ser un número irracional.

$D_C$  : Dimensión del espacio euclídeo que contiene al fractal que también es un número entero.

$D_2$  : Dimensión de entropía o dimensión de Kolmogórov.

$D_1$  : Dimensión de correlación.

$D_0$  : Equivale a la dimensión de Hausdorff-Besicovitch para conjuntos cerrados.

Algunas características:

- La primera desigualdad  $D_T \leq D_{HB}$  se conoce como desigualdad de Szpilrajn y es uno de los principales resultados de la geometría fractal.
- Las desigualdad  $D_2 \leq D_1 \leq D_0$  son desigualdades entre las dimensiones de Rényi, que son iguales para un fractal autosimilar a todas las escalas y difieren en el caso de multifractales.

### 2.3. Conjuntos auto-afines:

Un conjunto auto-similar es un espacio métrico resultante de la unión de las versiones a escala de sí mismo, con factor de escala menor que uno (Roinestad, 2007). En matemáticas, un objeto auto-similar es exactamente o aproximadamente similar a una parte de sí mismo (es decir, el conjunto tiene la misma forma que una o más de las partes). Muchos objetos en el mundo real, tales como las costas, son estadísticamente auto-similares, parte de ellos muestran las mismas propiedades estadísticas en muchas escalas. La auto-similitud es una propiedad que caracteriza a los fractales.

La invariancia de escala es la forma más exacta de la auto-similitud, ya que cualquier ampliación de una pieza más pequeña del objeto que es similar a el conjunto en totalidad (Wikipedia, s.f).

Un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es auto-similar si se trata de la unión de subconjuntos disjuntos  $S_1, \dots, S_k$  que se pueden obtener a partir de  $S$  mediante escalamientos, traslaciones y rotaciones. Esta auto-similitud a menudo implica una multiplicación infinita de detalles, lo que crea estructuras irregulares (Mallat, 1999). Matemáticamente la definición estricta es como sigue: Sea  $f$  una función continua de soporte compacto  $S$ . Se dice que  $f$  es auto-similar si existen subconjuntos disjuntos tal que el grafo de  $f$  restringido a cada  $S_i$  es una transformación afín de  $f$ . Esto significa que existe una escala  $l_i > 1$ , una traslación  $r_i$ , un peso  $p_i$  y una constante  $c_i$  tal que:

$$\forall t \in S_i, f(t) = c_i + p_i f(l_i(t - r_i)). \quad (2.8)$$

Si una función es auto-similar, su transformada ondícula también lo es. Sea  $g$  una transformación afín de  $f$ :

$$g(t) = pf(l(t - r)) + c.$$

Su transformada ondícula será:

$$\begin{aligned} T_\psi[g](u, s) &= \int_{\mathbb{R}} g(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt. \\ &= \int_{\mathbb{R}} \{pf(l(t-r)) + c\} \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt. \\ &= p \int_{\mathbb{R}} f(l(t-r)) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt + c \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \xrightarrow{0} \\ &= p \int_{\mathbb{R}} f(l(t-r)) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \\ &= \frac{p}{\sqrt{l}} T_\psi[f](l(u-r), sl). \end{aligned} \quad (2.9)$$

En la demostración anterior el término  $\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$  se hace cero, hecho avalado por la ecuación (2.26) (Nota: Una descripción más heurística se detalla en los apéndices).

Suponiendo que  $\psi$  posee un soporte compacto en  $[-k, k]$ . La relación de invariancia (2.8) de  $f$  sobre  $S_i = [a_i, b_i]$  produce una afinidad invariante para todas las ondículas con soporte incluido en  $S_i$  para cualquier  $s < \frac{b_i - a_i}{K}$  y cualquier  $u \in [a_i + Ks, b_i - Ks]$ ,

$$T_\psi[f](u, s) = \frac{p_i}{\sqrt{l_i}} T_\psi[f](l_i(u - r_i), sl_i).$$

La auto-similitud de la transformada ondícula implica que los valores de su módulo máximo son auto-afines también.

En la Figura 2.8 se muestra una estructura auto-similar conocida como es la curva de Koch, la cual es una de las primeras curvas fractales que se han descrito y junto a esta se muestra su transformada ondícula, la cual como se ha desarrollado anteriormente también presenta un comportamiento auto-afín.

## 2.4. Multifractales

Una distribución de la masa  $\mu$  puede ser extendida sobre una región de tal manera que la concentración de masa sea muy irregular y heterogénea. De hecho, el conjunto de puntos donde la concentración de masa local obedece a una ley de

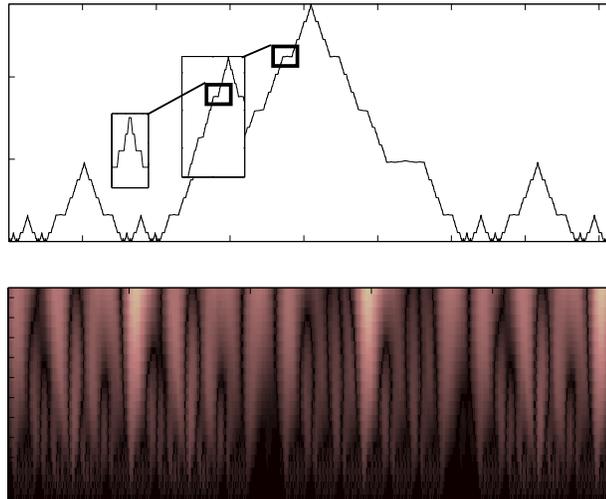


Figura 2.8: Superior: Curva de Koch, inferior: Transformada ondícula de la curva de Koch. Ambas presentan una estructura auto-afín, como era de esperarse de acuerdo a la deducción (2.9)

potencia de índice  $\alpha$ , por ejemplo  $\mu(B(x, r)) \simeq r^\alpha$  para  $r$  pequeños, puede determinar un fractal diferente para valores diferentes de  $\alpha$ . Así, una amplia gama de fractales pueden surgir de una sola medida.

Una medida  $\mu$  con una estructura rica se conoce como una medida multifractal o simplemente un multifractal. Al igual que con fractales, una definición precisa de “multifractal” tiende a ser evitada.

Medidas multifractales se han observado en muchas situaciones físicas, por ejemplo, en la turbulencia del fluido, la distribución de las precipitaciones, la distribución de masa a través del universo, digitación viscosa, redes neuronales, precios de las acciones, **series de tiempo geofísicas**(Mediciones de temperatura, precipitaciones, niveles de ozono, velocidad del viento, eventos sísmicos, patrones de vegetación y dinámica del clima ) y en muchos otros fenómenos (Falconer, 2003), (Kantelhardt, 2010).

### 2.4.1. Medida y distribución de masa

Uno de los términos más comunes en las matemáticas de los fractales es el de “medida” en una forma u otra.

Por otra parte, este término es desarrollado en la Teoría de la medida, más para las aplicaciones comunes de fractales unas pocas ideas son necesarias y dichas son concernientes a los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Estos elementos de la teoría de las medidas son a menudo familiarizadas con las distribuciones de masa o la carga de la física básica.

Básicamente, una medida es sólo una manera de atribuir un valor numérico “tamaño” de conjuntos, de tal manera que si un conjunto se descompone en un número finito o denumerable de las piezas de una manera razonable, entonces el tamaño del conjunto es la suma de las dimensiones de las piezas.

Denótese por  $\mu$  una medida sobre  $\mathbb{R}^n$  si  $\mu$  asigna un número no negativo, posible-

mente  $\infty$ , para cada subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  tal que:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(A) \leq \mu(B)$  si  $A \subset B$
- Si  $A_1 \cdots A_n$  es una secuencia denumerable o finita de conjuntos entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \quad (2.10)$$

de forma equivalente se tiene que si  $A_i$  es un conjunto disjunto de Borel (Falconer, 2003):

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \quad (2.11)$$

El soporte de una medida es el conjunto en el que la medida es concentrada. Formalmente, el soporte de  $\mu$ , escrito  $spt\mu$ , es el menor conjunto cerrado  $X$  tal que  $\mu(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0$ . El soporte de una medida es siempre cerrado y  $X$  ha de estar en el soporte si y sólo si  $\mu(B(x, r)) > 0$  para todo radio positivo  $r$ . Se dice que  $\mu$  es una medida en un conjunto  $A$  si  $A$  contiene el soporte de  $\mu$

Una medida en un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$  para el cual  $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$  será llama distribución de masa y dicha medida  $\mu(A)$  será la masa del conjunto  $A$ .

## Ejemplos de medida y distribución de masa

**Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ :** La medida de Lebesgue  $\mathcal{L}^1$  es una extensión de la idea de “longitud ” para una amplia colección de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  tal que

incluye los conjuntos de Borel. Para intervalos abiertos y cerrados se toma la media de **Lebesgue** como  $\mathcal{L}^1(a, b) = \mathcal{L}^1[a, b] = b - a$ . Si  $A = \bigcup_i [a_i, b_i]$  es un conjunto finito o contable de intervalos disjuntos, se tiene entonces que  $\mathcal{L}^1(A) = \sum (b_i - a_i)$  será la longitud de  $A$ . Esto conduce a la definición de la medida de Lebesgue  $\mathcal{L}^1$  de un conjunto arbitrario  $A$  indicada en la ecuación (2.12).

$$\mathcal{L}^1 = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \right\}. \quad (2.12)$$

Esta idea de medida llevada a  $\mathbb{R}^n$  tiene la forma mostrada en la ecuación (2.13) tomando en consideración que  $vol^1$  es la longitud,  $vol^2$  representa el área y  $vol^3$  es el volumen.

$$\begin{aligned} vol^n &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) \\ \mathcal{L}^1 &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} vol^n(A) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

**Distribución uniforme de masa en un segmento de línea:** Sea  $L$  un segmento de línea de longitud unitaria en el plano. Se define  $\mu(A) = \mathcal{L}^1(L \cap A)$  (por ejemplo la longitud de la intersección de  $A$  con  $L$ ). Entonces  $\mu$  es una distribución de masa con soporte  $L$ , donde  $\mu(A) = 0$  si  $L = \phi$ .

## 2.5. Series de tiempo Multifractales

Antes de definir las series de tiempo como conjuntos multifractales es necesario indicar ciertas características de las mismas.

## **Series de tiempo**

Una serie de tiempo es un conjunto numérico de valores que representa los cambios en tiempo de cualquier variable, estas se caracterizan por presentar discontinuidades, componentes con ciertas tendencias, una o más componentes periódicas y componentes estocásticas.

Una cuestión importante en relación con series de tiempo es la ergodicidad. Si una serie de tiempo es ergódica, un promedio en un momento dado sobre un gran número de realizaciones de la serie de tiempo es totalmente equivalente al promedio en tiempo de una sola realización. En general, la ergodicidad de series de tiempo prácticas es supuesta, aunque a menudo es difícil de probar (Turucutte, 1997).

## **Series de tiempo multifractales**

Muchas de las series de tiempo no muestran un comportamiento simple de escalamiento monofractal, que puede ser explicada por un exponente de escala único. Los elementos que caracterizan una serie de tiempo (nombrados en el párrafo anterior) pueden ser descritos con exponentes de escala diferentes. En estos casos, el comportamiento de escala es más complicado, y los diferentes exponentes de escala son necesarios para diferentes partes de la serie. En los casos más complicados, una gran cantidad de exponentes de escala son necesarios para una completa descripción del comportamiento de la serie de tiempo, y el análisis multifractal debe aplicarse (Kantelhardt, 2010).

- Métodos para el análisis fractal de series de tiempo estacionarias:
  1. Análisis de funciones de auto correlación.
  2. Análisis espectral.
  3. Análisis de Hurst de rango-rescaldado.

#### 4. Análisis de fluctuación (FA)

- Métodos para el análisis fractal de series de tiempo no estacionarias:
  1. Análisis ondícula.
  2. Análisis de fluctuación sin tendencia.
  3. Detección de tendencias con DFA.

**Métodos para el análisis multifractal de series de tiempo:** El tipo más simple de análisis multifractal está basado en una función de partición estándar, la cual ha sido desarrollada para la caracterización multifractal normalizada de medidas estacionarias. Por desgracia, este formalismo normal no da resultados correctos para las series temporales no estacionarias que son afectadas por componentes con tendencias o que no pueden ser normalizadas. Así, a principios de 1990 un mejora de multifractal el formalismo ha sido desarrollado, la transformada ondícula módulo máximo (Kantelhardt, 2010).

## 2.6. Introducción a la transformada ondícula

En la siguiente sección se pretende establecer una base teórica del análisis espectral y su evolución desde el análisis síntesis de Fourier a la transformada ondícula de J. Morlet y A. Grossman.

### 2.6.1. Análisis espectral de Fourier

No es intuitivamente óbvio que se puedan construir o representar funciones transitorias y bien localizadas en tiempo Figura 2.9, como combinación de senos y cosenos partiendo de que estas funciones trigonométricas con periodos múltiples de un periodo fundamental forman una secuencia ortogonal y por ende pueden ser usadas como bases para la representación de otras funciones. La posibilidad de representar funciones matemáticas en términos de senos y cosenos de diferentes

frecuencias (armónicos), es la base del análisis espectral de Fourier, el cual permite describir una señal que se encuentra en el dominio del tiempo o espacio en términos de sus componentes cosenoidales en el dominio de la frecuencia o número de onda respectivamente.

### Series de Fourier

El teorema de J.B. Fourier (1807) dice que dada una función  $f(t)$  puede ser representada por la serie infinita conocida como serie de Fourier, cuya estructura se muestra en la ecuación (2.14),

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ a_j \cos\left(2\pi \frac{j}{T}t\right) + b_j \sin\left(2\pi \frac{j}{T}t\right) \right\}, \quad (2.14)$$

donde  $a_j$  y  $b_j$  son constantes y  $T$  es un periodo fundamental, para poder representar funciones de esta forma deben satisfacer las condiciones de Dirichlet, la cual es satisfecha por las señales de interés geofísico (Nava y Alejandro, 2002).

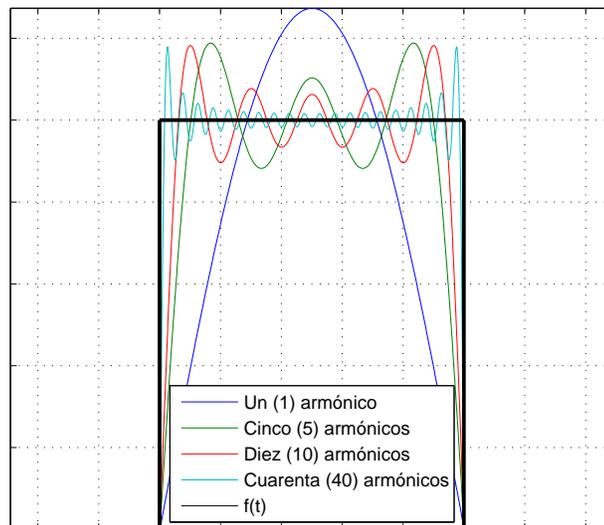


Figura 2.9: Construcción de una señal  $f(t)$  a partir de combinaciones de distintas funciones monocromáticas (armónicos)

La representación en series de Fourier supone que  $f(t)$  es periódica con periodo  $T$ . Si no lo es, pero está definida en un dominio finito, la serie de Fourier converge a ella sobre dicho dominio y fuera de este representa repeticiones de  $f(t)$  es decir la hace periódica.

### Transformada de Fourier

Esta herramienta permite extender el análisis y la síntesis de una función en términos de senoidales a funciones (no patológicas) de cualquier tipo con dominio sobre los reales y por lo tanto con la posible presencia de componentes con cualquier frecuencia.

Si  $f(t)$  en el dominio de  $t$  su transformada es definida por la ecuación (2.15).

$$F(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i2\pi st} dt, \quad (2.15)$$

donde  $F(s)$  es una función (generalmente compleja) en el dominio de  $s$  (donde  $s$  es una variable real cuyas unidades son las reciprocas de  $t$ ).

Una definición alternativa utiliza  $\omega = 2\pi s$  en vez de  $s$  por lo que requieren del empleo de normalizaciones como se muestra en la ecuación (2.16),

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.16)$$

#### 2.6.2. Espectrograma

El espectro obtenido de  $f(t)$  mediante la ecuación (2.14), indica que tanto contiene una señal de cada frecuencia mas no indica si la componente espectral se encuentra a lo largo de la señal o solo en intervalos de tiempo.

El conocer tanto el tiempo de llegada como el contenido de frecuencias de los paquetes de energía es importante, para el estudio del comportamiento temporal de las fuentes y acerca de procesos dispersivos que afectan la propagación de la energía, entre otros métodos para estimar la distribución de tiempo y frecuencia

de una señal observada (Nava y Alejandro, 2002) se tienen los bancos de filtros y análisis de ventana móvil, a continuación se describe el análisis de ventana móvil el cual es una introducción a la transformada ondícula.

## 2.7. Espectrograma de análisis de ventana móvil o transformada seccional de Fourier

El análisis de ventana móvil o AVM consiste en obtener el contenido espectral de una señal  $f(t)$  contenida en una ventana  $\xi(t)$  centrada sobre  $\tau$  y de largo  $\lambda$  (esto último quiere decir que la ventana es distinta de cero únicamente en el intervalo  $[\tau - \frac{\lambda}{2}, \tau + \frac{\lambda}{2}]$  ).

Este análisis es realizado a través de la ecuación (2.17):

$$F(s) \equiv F(s, \tau) \int_{\mathbb{R}} \xi\left(\frac{t - \tau}{\lambda}\right) f(t) e^{-i2\pi st} dt. \quad (2.17)$$

Tanto  $t$  como  $\tau$  representan el tiempo, más  $\tau$  caracteriza el tiempo al cual es asignada la transformada.

### Ventanas temporales para AVM

Mientras más angosta sea la ventana más localizado en tiempo estará el espectro, pero estará restringido a las altas frecuencias, el muestreo a su vez será pobre o limitado a periodos ligeramente menores que la longitud de la ventana y no reproducirá información alguna con respecto a periodos mayores a dicha longitud. Mientras más ancha sea la ventana es mejor y más amplio el muestreo, pero aumenta la incertidumbre temporal.

Un compromiso entre la resolución y el muestreo consiste en usar ventanas largas pero disminuyendo la incertidumbre temporal seleccionando ventanas cuya forma en el resultado de cada transformada sea más representativo de lo que ocurre cerca

del punto determinado usualmente el centro de la ventana. Un ejemplo de esto es la transformada con una ventana en forma de coseno entre  $-\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{\pi}{2}$ , cero fuera de este rango. En la ecuación (2.18) se muestra el ejemplo anterior,

$$F(s)_\tau \equiv F(s, \tau) = \int_{\tau-\frac{\lambda}{2}}^{\tau+\frac{\lambda}{2}} f(t) \cos\left(\frac{t-\tau}{\lambda}\right) e^{-i2\pi st} dt. \quad (2.18)$$

Se pueden usar muchas formas de ventanas, usualmente concentradas en su centro, una ventana muy popular es la Gaussiana (Nava y Alejandro, 2002) .

### **Ventana rectangular**

En el caso de que  $\xi(t)$  sea una ventana rectangular de amplitud unitaria y largo  $\lambda$  se extraen segmentos de  $f(t)$  de dicho largo, para cada uno de los diferentes tiempos  $\tau$  a lo largo de la señal y se obtiene su correspondiente espectro mediante la ecuación (2.19)

$$F(s)_\tau \equiv F(s, \tau) = \int_{\tau-\frac{\lambda}{2}}^{\tau+\frac{\lambda}{2}} f(t) e^{-i2\pi st} dt. \quad (2.19)$$

Este espectro tiene como frecuencia mínima  $s_0 = \lambda^{-1}$ .

El resultado del análisis de ventana móvil usualmente se representa como una configuración bidimensional mediante colores o isolíneas de la amplitud  $|F(s)|$  o la intensidad  $|F(S)^2|$ .

### **AVM con ventana variable**

Otra manera de lidiar con la incertidumbre en la localización temporal de cada frecuencia consiste en ajustar el largo de la ventana según la frecuencia  $\lambda = s^{-1}$ , de manera que abarque un ciclo de las cosenoides, como se muestra en la ecuación

(2.20)

$$F(s, \tau) = [\sqrt{s}] \int_{\tau - \frac{s-1}{2}}^{\tau + \frac{-s}{2}} f(t) e^{-i2\pi st} dt, \quad (2.20)$$

donde el término entre corchetes es un término optativo de normalización por el largo de la ventana.

### 2.7.1. Relación tiempo-frecuencia

El principio de incertidumbre establece que la propagación de la energía de una función y su transformada de Fourier no pueden ser ambas arbitrariamente pequeñas, motivado por la mecánica cuántica en 1946 el físico Gabor definió átomos de tiempo-frecuencia elementales como formas de onda que tienen una mínima dispersión en el plano tiempo-frecuencia.

### 2.7.2. Relación entre la transformada de Fourier y las funciones de Gabor

Los átomos de Gabor son construidos mediante una ventana trasladada en tiempo y frecuencia como se muestra en la ecuación (2.21)

$$g_{u,\xi}(t) = g(t - u) e^{i\xi t}. \quad (2.21)$$

La energía de  $g_{u,\xi}$  esta concentrada en la vecindad de  $u$  sobre el intervalo de tamaño  $\sigma_t$  medida por la desviación estándar de  $|g|^2$ . Su transformada de Fourier es una traslación por  $\xi$  de la transformada de Fourier  $\hat{g}$  de  $g$ , mostrada en la ecuación (2.22)

$$\hat{g}_{u,\xi}(t) = \hat{g}(t-u)e^{iu(\omega-\xi)} \quad (2.22)$$

La energía de  $g_{u,\xi}$  esta concentrada en la cercanía de la frecuencia  $\xi$  sobre el intervalo de tamaño  $\sigma_\omega$ , el cual es medido en el dominio donde  $\hat{g}(\omega)$  no es despreciable. En el plano  $(t, \omega)$  la dispersión de energía del átomo  $g_{u,\xi}$  es simbólicamente representado por los rectángulos de Heisenberg ilustrados en la Figura 2.10.

Estos rectángulos están centrados en  $(u, \xi)$  y con un ancho de  $\sigma_t$  y  $\sigma_\omega$  en tiempo y frecuencia respectivamente. El principio de incertidumbre provee que el área de estas cajas” satisface la ecuación (2.23)

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}. \quad (2.23)$$

Esta área es mínima cuando  $g$  es una Gaussiana, en cual caso el átomo  $g_{u,\xi}$  es llamado función de Gabor.

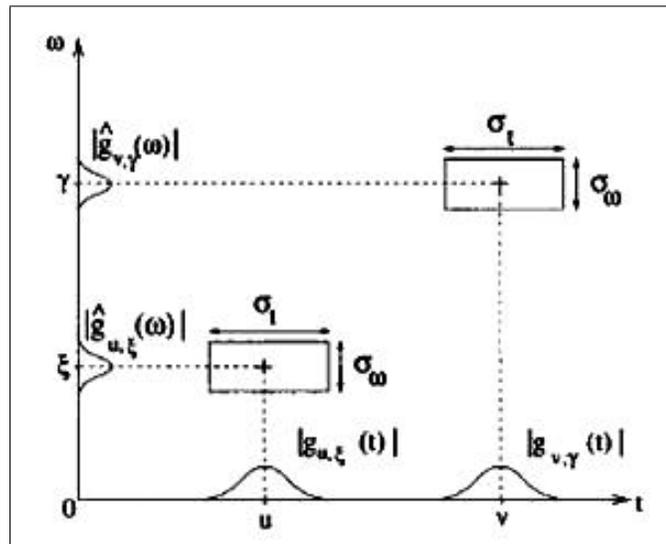


Figura 2.10: Cajas tiempo-frecuencia (Rectángulos de Hesienberg) representando la dispersión de energía de dos átomos de Gabor.

### 2.7.3. Transformada ondícula

El análisis espectral en términos de funciones de extensión infinita es perfectamente adecuado para el estudio de señales estacionarias, pero presenta serios problemas de indeterminación en el tiempo para señales con componentes episódicas (Nava y Alejandro, 2002), estos problemas sugirieron la introducción del análisis ondicular desarrollado por Morlet y Grossmann casi 40 años después que Gabor. Al igual que la transformada seccional de Fourier o transformada de Fourier por ventanas la transformada ondícula puede medir las variaciones tiempo-frecuencia de componentes espectrales pero con una resolución diferente mediante la expresión mostrada en la ecuación (2.24).

$$T_{\psi}[f](u, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\psi_{u,s}^* dt. \quad (2.24)$$

La transformada ondícula correlaciona  $f$  con  $\psi_{u,s}$  siendo  $\psi_{u,s}$  una ondícula dilatada en  $u$  y trasladada en  $s$  denominada “ondícula madre”, en la ecuación (2.25) se muestra dicho elemento.

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{s}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right), \quad (2.25)$$

para la cual  $\psi$  es una función de promedio cero (Mallat, 1999), como se muestra en la ecuación (2.26), esta función es conocida como ondícula madre.

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0. \quad (2.26)$$

Siguiendo el teorema de Parseval denotado por la ecuación (2.27),

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)h^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\hat{h}^*(\omega)d\omega. \quad (2.27)$$

La transformada ondícula puede ser escrita como una integración en frecuencia, como se indica en la ecuación (2.28),

$$T_{\psi}[f](u, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{\psi}_{u,s}^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\hat{\psi}_{u,s}^*(\omega)d\omega \quad (2.28)$$

Los coeficientes  $T_{\psi}[f](u, s)$  dependen de los valores de  $f(t)$  y  $\hat{f}(\omega)$  en las regiones tiempo-frecuencia donde la energía de  $\psi_{u,s}$  y  $\hat{\psi}_{u,s}$  es concentrada, variaciones en los armónicos es detectada a partir de la posición y escala de las máximas amplitudes de los coeficientes ondícula.

A partir de la ecuación (2.25), se tiene que su transformada de Fourier es caracterizada por la ecuación (2.29),

$$\hat{\psi}_{u,s}(\omega) = e^{-iu\omega} \sqrt{s} \hat{\psi}(s\omega), \quad (2.29)$$

donde  $\psi_{u,s}$  es la transformada de Fourier de  $\psi$  para la cual se establece que  $\hat{\psi}(\omega) = 0$  para  $\omega < 0$  la energía es concentrada en intervalos positivos de frecuencia centrados en  $\eta$ , la energía de  $\psi_{u,s}(\omega)$  esta concentrada sobre un intervalo positivo de frecuencias centrado en  $\frac{\eta}{2}$  cuyo tamaño es escalado por  $\frac{1}{s}$ . En el plano tiempo-frecuencia una ondícula  $\psi_{u,s}$  es simbólicamente representada por un rectángulo centrado en  $(u, \frac{\eta}{2})$  como se muestra en la Figura 2.11.

Nótese que a medida que la escala decrece, el soporte en tiempo es reducido y por ende mejor localizado pero la frecuencia posee mayor dispersión y cubre un intervalo que es desplazado hacia las frecuencias más altas.

Una vez construida una familia de ondículas a partir de una ondícula madre, las cuales conforman una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$  (Mallat, 1999) se define en el plano tiempo frecuencia donde se muestran las distintas resoluciones del análisis multiescala.

### Aproximación multiescala

La transformada ondícula puede detectar características episódicas con un procedimiento de acercamiento a lo largo de las escalas, donde los coeficientes ondículas  $|T_\psi[f](u, s)|$  miden las variaciones de  $f$  en la vecindad de  $u$  cuyo tamaño es pro-

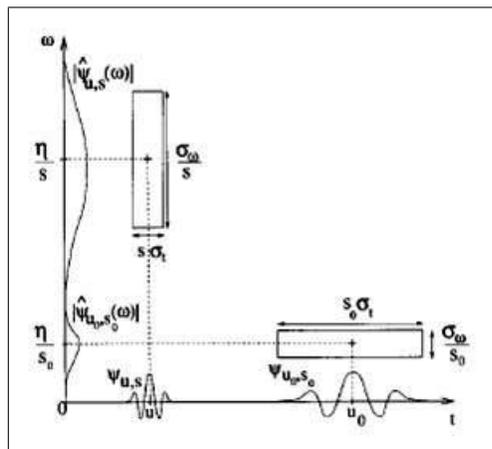


Figura 2.11: “Cajas ” en el plano tiempo-frecuencia de dos ondículas  $\psi_{u,s}$  y  $\psi_{u_0,s_0}$ .

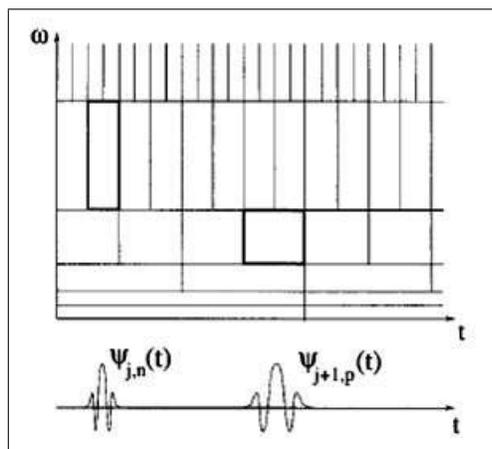


Figura 2.12: “Cajas ” en el plano tiempo-frecuencia de una base de ondículas.

porcional a  $s$ .

La capacidad de poder estudiar una señal en sus estructuras más finas a partir de las variaciones de escala de la transformada ondícula no solo permite caracterizar elementos singulares sino también señales de mayor complejidad como lo son las señales multifractales las cuales poseen singularidades no aisladas.

Mandelbrot fue el primero en reconocer la existencia de multifractales en cada rincón de la naturaleza. Escalando una sección del multifractal se produce una señal que es estadísticamente similar al resto de la misma, esta auto-similitud es evidenciada en la transformada ondícula con modificaciones en el análisis de escala. A partir del decaimiento global de los coeficientes ondícula se puede medir la distribución de singularidades de un multifractal (Mallat, 1999).

Dichos puntos singulares son detectados siguiendo los máximos de la transformada ondícula a lo largo de las escalas.

## 2.8. Singularidades en una función

Una singularidad es un cambio rápido en los valores de una variable para un intervalo de tiempo muy corto (Khan y Fadzil, 2007),(Khan et al, 2007).

Matemáticamente se define como un punto  $t_0$  en el cual una función  $f(t)$  no es diferenciable.

Una función  $f(t)$  en el análisis matemático típico es continua y también posee derivadas continuas, por lo tanto se puede aproximar en la vecindad de un punto  $t_i$  por una serie de Taylor o serie de potencias. A diferencia, la mayoría de las series de tiempo  $f(t)$  encontradas en la vida real se encuentran ruidosas (véase Figura 2.13-a). Por lo tanto los puntos en tiempo no pueden ser aproximados ni por serie de Taylor ni por series de Fourier, por otra parte para algunos tiempos  $t_i$ , la serie  $f(t)$  muestra un comportamiento singular, con esto se quiere decir que en los tiempos  $t_i$ , la expansión para la aproximación de la señal posee componentes de potencia no enteros como se muestra en la ecuación (2.30) que aparecen

como singularidades tipo paso o cúspide (véase Figura 2.13), demostrando así un comportamiento fractal (Physionet, s.f),

$$f(t) = a_0 + a_1(t - t_i) + a_2(t - t_i)^2 + \dots + a_h(t - t_i)^h, \quad (2.30)$$

donde  $t$  está en la vecindad de  $t_i$  y  $h_i$  es un número no entero que cuantifica la singularidad de  $f(t)$  en  $t = t_i$ .

## 2.9. Regularidad de Lipschitz

En función de caracterizar una estructura singular en una señal, es necesario precisar cuantitativamente la regularidad local de dicha señal, para esto se cuenta matemáticamente con un elemento denominado exponente de Lipschitz.

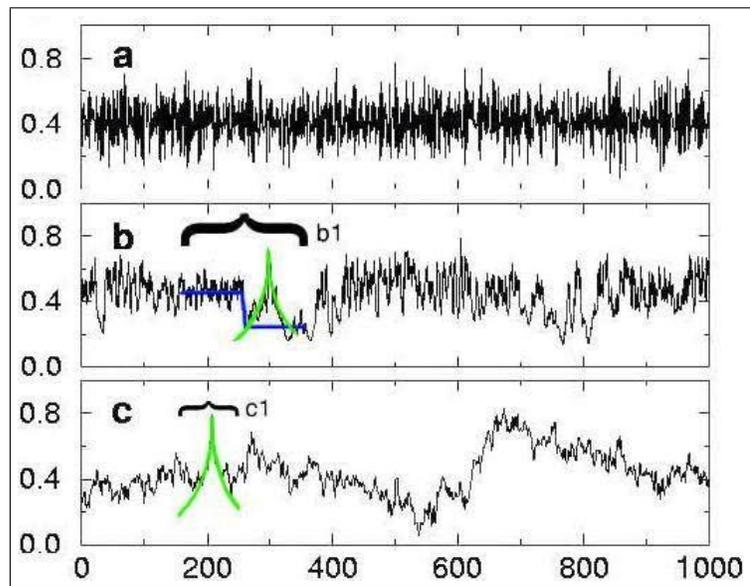


Figura 2.13: Ejemplificación de singularidades en una señal real (Modificado de (Physionet, s.f)), singularidad tipo paso (azul) y tipo cúspide (verde)

### 2.9.1. Exponente de Lipschitz

Este elemento es capaz de suministrar información acerca de la regularidad de una señal tanto en un intervalo de tiempo como en un punto  $t_i$ . Teniendo en cuenta que una singularidad es aquel punto en el cual  $f(t)$  no es diferenciable, el exponente de Lipschitz caracteriza dicho comportamiento singular.

#### Diferenciabilidad y exponente de Lipschitz

A partir de la serie de Taylor se relaciona la diferenciabilidad de una señal con un polinomio de aproximación, suponiendo que  $f(t)$  es  $m$  veces diferenciable en el intervalo  $[t_i - h, t_i + h]$ , se tiene que  $P_{t_i}$  es el polinomio de Taylor en la vecindad de  $t_i$ , como se muestra en la ecuación (2.31).

$$P_{t_i} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(t_i)}{k!} (t - t_i)^k, \quad (2.31)$$

teniendo un error de aproximación de:

$$\epsilon_{t_i} = |f(t)_{t_i} - P_{t_i}|. \quad (2.32)$$

Que satisface las siguientes consideraciones:

$$\forall t \in [t_i - h, t_i + h], |\epsilon_{t_i}(t)| \leq \frac{(t - t_i)^m}{m!} \sup_{u \in [t_i - h, t_i + h]} |f^{(m)}(u)|. \quad (2.33)$$

El orden  $m$  de diferenciabilidad de  $f(t)$  en la vecindad de  $t_i$  produce un límite superior en el error  $\epsilon_{t_i}(t)$  cuando  $t$  tiende a  $t_i$ , la regularidad de Lipschitz permite refinar el límite superior con un exponente no entero.

### Definición de Lipschitz

A la usanza de (Falconer, 2003), una función  $f: X \rightarrow Y$  es llamada función *Hölder* de exponente  $\alpha$  si:

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad (x, y \in X),$$

con una constante  $c \geq 0$ . Una aplicación perceptible de esta condición se observa en la Figura 3.26.

La función  $f$  es llamada **Lipschitz** si  $\alpha$  toma un valor próximo a 1, esto es:

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \quad (x, y \in X) \tag{2.34}$$

y es **bi-Lipschitz** si:

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y| \quad (x, y \in X).$$

Para el caso particular Lipschitz se tiene que: El exponente de Lipschitz puntualmente puede variar, por lo que se puede construir una función multifractal con singularidades no aisladas, donde  $f$  tiene una regularidad de Lipschitz diferente en cada punto (Mallat, 1999).

- Una función  $f(t)$  es uniformemente Lipschitz  $\alpha$  sobre el intervalo  $[a, b]$  si satisface la condición 2.34 para todo  $t_i \in [a, b]$  con una constante  $K$  la cual es independiente de  $t_i$ .
- La regularidad de Lipschitz de  $f$  en  $t_i$  sobre el intervalo  $[a, b]$  es la mínima cota superior de  $\alpha$  tal que  $f$  sea Lipschitz  $\alpha$ .

Una función que es acotada pero discontinua en  $t_i$  es Lipschitz  $\alpha = 0$  en  $t_i$ , si la regularidad de Lipschitz es  $\alpha < 1$  en  $t_i$  entonces  $f$  es no diferenciable en  $t_i$  y  $\alpha$  caracteriza el tipo de singularidad.

## 2.10. Momentos cero de una ondícula

Para medir la regularidad local de una señal se toman en cuenta dos (2) factores como lo son el soporte compacto de frecuencias el cual no posee mayor relevancia y el número de momentos cero, este último si es crucial. Si la ondícula posee  $n$  momentos ceros, entonces la transformada ondícula puede interpretarse como un operador diferencial de orden  $n$ , lo que proporciona una primera relación entre la diferenciabilidad de  $f$  y el decaimiento de la transformada ondícula a escalas finas (Mallat, 1999).

### 2.10.1. Supresión del comportamiento polinomial

Con mucha frecuencia son las singularidades, cambios rápidos, discontinuidades y transeptos en frecuencia características de interés en las series de tiempo y no el comportamiento regular. Por lo tanto se pretende demostrar que las ondículas son excelentes para abordar aspectos singulares en el análisis de series de tiempo en las tendencias locales, como se ha descrito anteriormente la fuerza de una singularidad es caracterizada por el exponente de *Hölder*.

La ecuación (2.34) es válida aun si no existe una expansión de Taylor (Struzik, 1999), recordemos que el polinomio  $P_{t_i}$  está asociado a dicha expansión.

En aras de demostración, se asume que  $f$  puede ser caracterizada por el exponente de *Hölder*  $\alpha(t_i)$  en  $t_i$  y dicha función puede ser descrita localmente como:

$$f(t)_{t_i} = c_0 + c_1(t - t_i) + \dots + c_n(t - t_i)^n + C|t - t_i|^{\alpha(t_i)}. \quad (2.35)$$

De la ecuación (2.35) se pueden identificar los siguientes elementos, extrapolados de la ecuación (2.32).

$$f(t)_{t_i} = \overbrace{c_0 + c_1(t - t_i) + \cdots + c_n(t - t_i)^n}^{\text{Comportamiento polinomial}} + \overbrace{C|t - t_i|^{\alpha(t_i)}}^{\text{Comportamiento singular}}. \quad (2.36)$$

En función a la ecuación (2.36) y al hecho de que una ondícula con  $n$  momentos ceros es ortogonal a un polinomio de grado  $n - 1$  (Mallat, 1999), por lo tanto  $\alpha < n$ , indica que el polinomio  $P_{t_i}$  posee  $n - 1$  momentos ceros.

A partir de la definición de **Lipschitz** se tiene que:

$$\begin{aligned} f(t)_{t_i} &= P_{t_i}(t) + \epsilon_{t_i} \\ T_\psi[f](u, s) &= T_\psi[P_{t_i}](u, s) + T_\psi[\epsilon_{t_i}](u, s) \\ &= \int_{\mathbb{R}} P_{t_i}(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt + \int_{\mathbb{R}} \epsilon_{t_i}(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt. \end{aligned} \quad (2.37)$$

La ecuación (2.37) puede ser reescrita usando la notación de producto interno aplicada a la transformada integral.

$$T_\psi[f](u, s) = \langle P_{t_i}(t), \psi_{u,s} \rangle + \langle \epsilon_{t_i}(t), \psi_{u,s} \rangle. \quad (2.38)$$

Ahora bien tomando en cosideración la propiedad descrita en (Mallat, 1999), una ondícula con  $n$  momentos ceros es ortogonal a un polinomio de grado  $n - 1$  se tiene que:

$$\begin{aligned} T_\psi[f](u, s) &= \cancel{\langle P_{t_i}(t), \psi_{u,s} \rangle}^{\mathbf{0}} + \langle \epsilon_{t_i}(t), \psi(u, s) \rangle \\ &= T_\psi[\epsilon_{t_i}](u, s). \end{aligned} \quad (2.39)$$

De la ecuación (2.39) queda demostrado como la transformada ondícula elimina el comportamiento polinomial de  $f(t)$ .

### 2.10.2. Operador diferencial multiescala y relación entre el decaimiento de la transformada ondícula y la regularidad

Una ondícula de  $n$  momentos ceros puede ser rescrita como la derivada de orden  $n$  de una función  $\theta$  resultando así la transformada ondícula como un operador diferencial multiescala, para el cual se propone una ondícula que decaiga rápidamente lo que significa que para cualquier exponente de decaimiento  $m$  existe un  $C_m$  tal que:

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\psi(t)| \leq \frac{C_m}{1 + |t|^m} \quad (2.40)$$

**Teorema 1** *Una ondícula  $\psi$  con decaimiento rápido tiene  $n$  momentos ceros si y solo si existe una función  $\theta$  con un decaimiento rápido tal que (Mallat, 1999):*

$$\psi(t) = (-1)^n \frac{d^n \theta(t)}{dt^n}. \quad (2.41)$$

*Consecuentemente:*

$$T_\psi[f](u, s) = s^n \frac{d^n}{du^n} (f \star \bar{\theta}_s)(u), \quad (2.42)$$

donde  $\bar{\theta}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \theta\left(\frac{-t}{s}\right)$ , además  $\psi$  no tiene más de  $n$  momentos ceros si y solo si:

$$\int_{\mathbb{R}} \theta(t) dt \neq 0. \quad (2.43)$$

**Prueba:** El rápido decaimiento de  $\psi$  implica que  $\hat{\psi}$  (siendo esta la transformada de Fourier de  $\psi$ ) es  $\mathbf{C}^\infty$  (infinitamente diferenciable), de acuerdo con la siguiente proposición:

Una función  $f$  es acotada y  $p$  veces continuamente diferenciable con derivadas acotadas si:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)| (1 + |\omega|^p) d\omega < +\infty, \quad (2.44)$$

donde  $f = \hat{\psi}$ . La integral de la función es igual a su transformada de Fourier evaluada en  $\omega = 0$ .

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = (i)^k \hat{\psi}^k(0) = 0. \quad (2.45)$$

Por lo tanto se puede realizar la factorización:

$$\hat{\psi}(\omega) = (-i\omega)^n \hat{\theta}(\omega), \quad (2.46)$$

$\hat{\theta}\omega$  es acotada. El decaimiento rápido de  $\theta$  es mostrado a partir de la inducción de  $n$ . Para  $n = 1$  se tiene:

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^t \psi(u) du = \int_t^{\infty} \psi(u) du, \quad (2.47)$$

y el decaimiento rápido de  $\theta$  derivado de la ecuación (2.40). Se puede entonces comprobar que el aumento por un (1) orden de integración hasta  $n$  mantiene el decaimiento rápido de  $\theta$ . La transformada de Fourier de la ecuación (2.41) tiene como resultado la ecuación (2.46) lo que implica que

$\hat{\psi}^k(0) = 0$  para  $k < n$ . Siguiendo la relación mostrada en la ecuación (2.45) se tiene que  $\psi$  posee  $n$  momentos ceros.

La transformada ondícula puede ser escrita de la siguiente forma:

$$T_\psi[f](u, s) = f \star \bar{\psi}_s(u) \text{ con } \bar{\psi}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{-t}{s}\right). \quad (2.48)$$

Se puede establecer de la ecuación (2.41) que:

$$\bar{\psi}_s(t) = s^n \frac{d^n \bar{\theta}_s(t)}{dt^n}. \quad (2.49)$$

Rescribiendo la ecuación (2.48) en función de la ecuación (2.49) se obtiene:

$$T_\psi[f](u, s) = s^n f \star \frac{d^n \bar{\theta}_s(t)}{dt^n}(u) = s^n \frac{d^n}{du^n} (f \star \bar{\theta}_s)(u). \quad (2.50)$$

Se tiene un valor de  $K = \int_{\mathbb{R}} \theta(t) dt = 0$  entonces la convolución  $f \star \bar{\theta}_s(t)$  puede ser interpretada como un promedio ponderado de  $f$  con un Kernel dilatado por el factor de escala  $s$ . Por lo tanto a partir de la ecuación (2.42) se tiene que la transformada ondícula es una derivada de orden  $n$  de un promedio proporcional a  $s$ . La transformada ondícula resultante es la derivada de  $f$  promediada en la vecindad de  $u$  con un kernel gaussiano dilatado en  $s$ . Si  $\theta$  es de decaimiento rápido se puede verificar que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\theta}_s = K \delta, \quad (2.51)$$

eso significa que para cualquier  $\phi$  que sea continua en  $u$ ,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \phi \star \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\theta}_s(u) = K\phi(u). \quad (2.52)$$

Si  $f$  es  $n$  veces continuamente diferenciable en la vecindad de  $u$  entonces la ecuación (2.42) implica que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_\psi[f](u, s)}{s^{n+\frac{1}{s}}} = \lim_{s \rightarrow 0} f^{(n)} \star \frac{1}{\sqrt{s}} \hat{\theta}_s(u) = Kf^{(n)}(u). \quad (2.53)$$

Si  $f$  posee un límite de diferenciabilidad de orden  $n$  ( $f$  es de clase  $\mathbf{C}^n$ ) se tiene que:

$$|T_\psi[f](u, s)| \sim s^{n+\frac{1}{2}}. \quad (2.54)$$

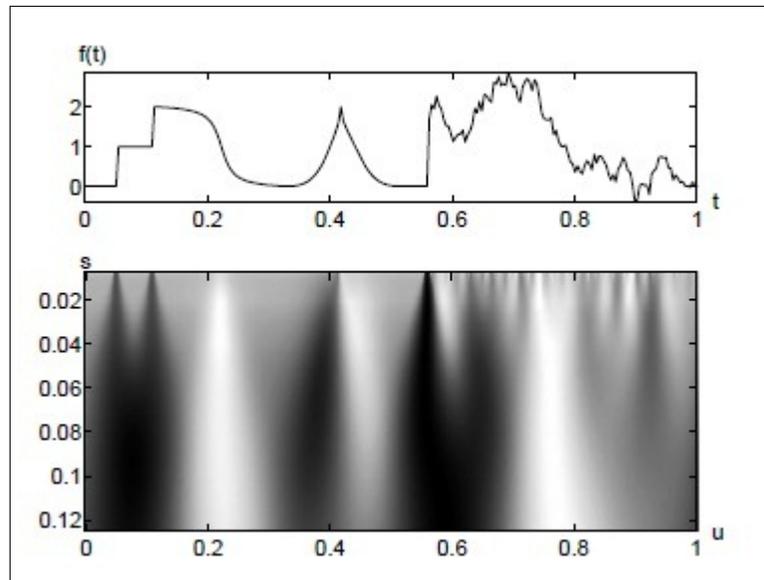


Figura 2.14: Transformada ondícula calculada con  $\psi = -\theta'$  donde  $\theta$  es una Gaussiana, la señal evaluada se muestra en la parte superior (Modificado de (Mallat, 1999))

Siendo la ecuación (2.54) la primera relación entre el decaimiento de  $|T_\psi[f](u, s)|$  cuando  $s$  decrece y la regularidad de  $f$ .

## 2.11. Transformada ondícula módulo máximo

El teorema 1 prueba que la regularidad de Lipschitz en la vecindad de un punto  $t_i$  es proporcional al decaimiento de los coeficientes de la transformada ondícula a escalas finas. Medir este decaimiento directamente en el plano tiempo-escala  $(u, s)$  no es necesario ya que este comportamiento es caracterizado por sus máximos locales. Las líneas que conectan los puntos máximos en el plano tiempo-escala son llamadas líneas máximas.

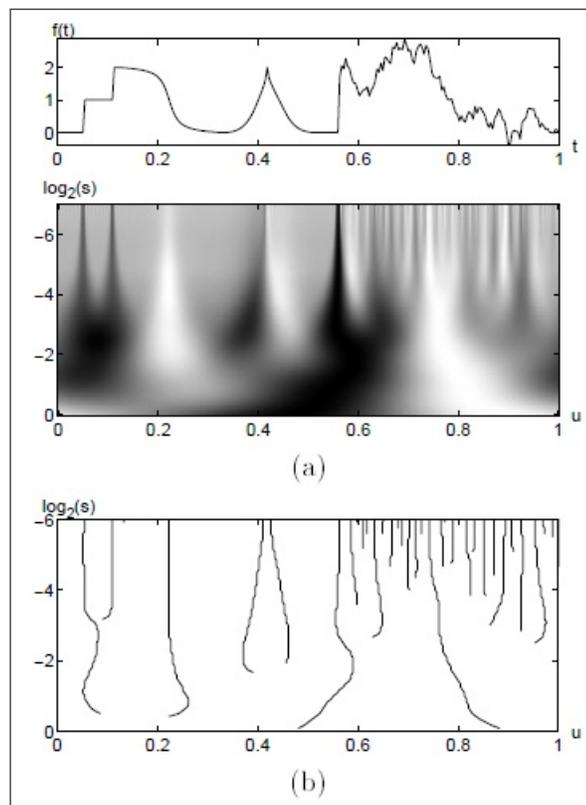


Figura 2.15: a) Transformada ondícula  $T_\psi[f](u, s)$ , b) Transformada ondícula módulo máximo (líneas máximas)

### 2.11.1. Detección de singularidades

Las singularidades son halladas en las abscisas en las cuales las líneas máximas convergen. Para un mejor entendimiento de esto la transformada ondícula es definida como un operador diferencial multiescala como se demuestra en el teorema 1.

Retomando la ecuación (2.42), se establece que si la ondícula posee solo un (1) momento cero, el módulo máximo de la transformada ondícula será el máximo de la primera derivada de  $f$  suavizada por  $\bar{\theta}_s$ , como se muestra en la Figura 2.16.

En la Figura 2.16 el análisis multiescala módulo máximo es usado para localizar singularidades y bordes en imágenes.

El teorema 2 establece que si  $|T_\psi[f](u, s)|$  no posee máximos en las escalas más finas entonces  $f$  es localmente regular.

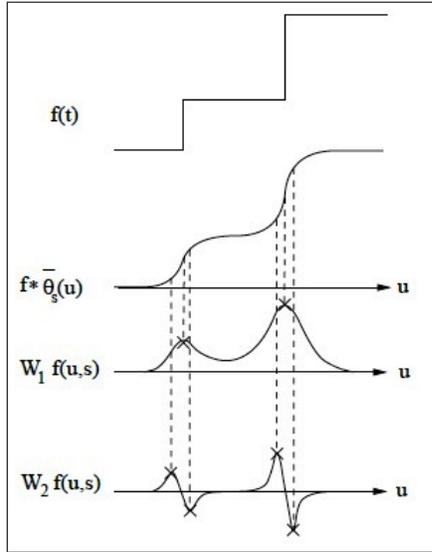


Figura 2.16: La convolución  $f \star \bar{\theta}_s(u)$  promedia a  $f$  en un dominio proporcional a  $f$ . Si  $\psi = -\bar{\theta}$  entonces  $W_1 f(u, s) = s \frac{d}{du} (f \star \bar{\theta}_s)(u)$  tiene un módulo máximo en los puntos de variaciones agudas en  $f \star \bar{\theta}_s(u)$ . Si  $\psi = \theta^n$  entonces el módulo máximo de  $W_2 f(u, s) = s^2 \frac{d^2}{du^2} (f \star \bar{\theta}_s)(u)$  corresponde a los puntos locales de máxima curvatura.

**Teorema 2 (Hwang, Mallat)** (Mallat, 1999) *Supongamos que  $\psi$  es  $\mathbf{C}^n$ , de soporte compacto y  $\psi = (-1)^n \theta^n$  con  $\int_{\mathbb{R}} \theta(t) \neq 0$  teniendo  $f \in \mathbf{L}^1[a, b]$ . Si existe un  $S_0 > 0$  tal que  $|T_\psi[f](u, s)|$  no posee valores máximos para  $u \in [a, b]$  y  $s < s_0$  entonces  $f$  es uniformemente Lipschitz  $n$  en  $[a + \epsilon, b - \epsilon]$  para cualquier  $\epsilon < 0$ . Esto implica que  $f$  puede ser singular (Lipschitz  $\neq 1$ ) en el punto  $t_i$  solo si existe una secuencia de puntos obtenidos de los máximos de los coeficientes ondículas  $(u_p, s_p)_{p \in \mathbb{N}}$  que convergen a  $t_i$  en finas escalas:*

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = t_i \quad \text{y} \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} s_p = 0.$$

*Los puntos del módulo máximo pueden o no estar en la misma línea máxima. Este resultado garantiza que todas las singularidades son detectadas siguiendo los valores máximos del módulo de la transformada ondícula a las escalas finas.*

**Prueba:** Para poder probar el teorema2 es necesario introducir la siguiente proposición (Mallat, 1999):

**Proposición ( $P_n$ ):** Se tiene  $\psi(x)$  la cual puede ser escrita como  $\psi(x) = \frac{d^n \phi}{dx^n}$ , donde  $\phi(x)$  es una función continua de soporte compacto.  $f(x)$  es una función y supone que para cualquier  $\epsilon > 0$  existe una constante  $K_\epsilon$ , tal que para todas las escalas  $s$  se tiene que:

$$\int_{a-\epsilon}^{b+\epsilon} |f \star \phi(x)| dx \leq K_\epsilon. \quad (2.55)$$

Si  $T_\psi[f](x, s)$  no tiene máximos para  $x \in ]a, b[$  y  $s < s_0$ , entonces para cualquier  $\epsilon > 0$  existe una constante  $A_{\epsilon, n}$  tal que para cualquier  $x \in$

$]a + \epsilon, b - \epsilon[$  y  $s < s_0$ :

$$|T_\psi[f](x, s)| \leq A_{\epsilon, n} s^n. \quad (2.56)$$

Si se modifica  $f(x)$  multiplicándola por el indicador de la función de  $[a, b]$ , no se modificaría su regularidad en cualquier intervalo  $[a + \epsilon, b - \epsilon]$ . Por lo que se supone que  $f(x) = 0$  para  $x \notin [a, b]$ . En primer lugar se demuestra la ecuación (2.55) es satisfecha puesto que  $f(x) \in \mathbf{L}^1[a, b]$  y  $f(x) = 0$  para  $x \notin [a, b]$ .

$$\int_{\mathbb{R}} |f \star \phi_s| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \int_{\mathbb{R}} |\phi_s| dx, \quad (2.57)$$

realizando el cambio de variable:

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi_s| dx = \int_{\mathbb{R}} |\phi(x)| dx. \quad (2.58)$$

Con el cambio de variable en la integral se obtiene que  $\int_a^b |f \star \phi_s(x)| dx$  es acotada por una constante independiente de la escala  $s$ . En orden de probar la proposición  $(P_n)$  se introducen dos (2) lemas:

**lema 1:** Se tiene un intervalo  $[c, d] \in \mathbb{R}$ , permitiéndose una constante  $K$  positiva para la cual se tiene una función  $g(x)$  que satisface:

$$\int_c^d |g(x)| dx < K, \quad (2.59)$$

de tal manera que  $|\frac{dg(x)}{dx}|$  no posee máximos locales en  $[c, d]$ , permitien-

do así que  $\beta > 0$  y  $\beta < \frac{(d-c)}{4}$ . Entonces existirán dos (2) constantes  $B_\beta$  y  $C_\beta$  tal que:

$$\forall x \in [c + \beta, d - \beta] \quad , \quad |g(x)| < B_\beta \quad (2.60)$$

$$\forall x \in [c + \beta, d - \beta] \quad , \quad \left| \frac{dg(x)}{dx} \right| < C_\beta. \quad (2.61)$$

Las constantes  $B_\beta$  y  $C_\beta$  solo dependen de  $\beta, d - c$  y  $K$ .

**lema 2:** Se tiene un intervalo  $[a, b] \in \mathbb{R}$ , permitiéndose una constante  $K$  positiva para la cual se tiene una función  $g(x)$  que satisface la ecuación (2.59). De tal manera que  $\left| \frac{d^2g(x)}{dx^2} \right|$  no posee máximos locales en  $[c, d]$ , permitiéndose así que  $\beta > 0$  y  $\beta < \frac{(d-c)}{4}$ . Entonces existirán una (1) constante  $D_\beta$  que solo depende de  $\beta, c - d$  y  $K$  tal que:

$$\forall x \in [c + \beta, d - \beta], \left| \frac{d^2g(x)}{dx^2} \right| < D_\beta. \quad (2.62)$$

A partir de los lemas anteriores probados en (Mallat y Liang, 1992) se demuestra la proposición  $P_n$  que permite establecer la siguiente ecuación:

$$\left| \frac{d^n f}{dx^n} \star \theta_s(x) \right| \leq A_{\epsilon, n}. \quad (2.63)$$

La proposición  $P_n$  implica que para cualquier  $\epsilon > 0$  existe una constante  $A_{\epsilon, n}$  tal que para cualquier  $x \in ]a + \epsilon, b - \epsilon[$  y  $s < s_0$  se satisface la ecuación anterior puesto que la integral de  $\theta(x)$  no se anula, la ecuación (2.63) implica que  $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$  es una función acotada por  $A_{\epsilon, n}$  sobre el intervalo  $]a + \epsilon, b - \epsilon[$ , por lo tanto  $f(x)$  es Lipschitz  $n$  sobre el intervalo  $]a + \epsilon, b - \epsilon[$ .

## 2.12. Espectro de singularidad

Encontrar la distribución de singularidades en una señal  $f$  multifractal es particularmente importante para analizar sus propiedades. El espectro de singularidades mide la distribución global de las singularidades que poseen diferente regularidad Lipschitz .

Por definición se tiene que si  $S_\alpha$  es un conjunto de todos los puntos  $t \in \mathbb{R}$  donde la regularidad local de Lipschitz de  $f$  es igual a  $\alpha$ . El espectro de singularidad  $D(\alpha)$  de  $f$  es la dimensión fractal de  $S_\alpha$ . El soporte de  $D(\alpha)$  es el conjunto de  $\alpha$  tal que  $S_\alpha$  no sea vacío (Mallat, 1999),(Harte, 2001).

La dimensión fractal muestra que si se hace un cubrimiento disjunto del soporte de  $f$  con intervalos de tamaño  $s$  entonces el número de intervalos que intercepta  $S_\alpha$  es:

$$N_\alpha(s) \sim s^{-D(\alpha)}. \quad (2.64)$$

El espectro de singularidad provee una proporción de las singularidades  $\alpha$  que aparecen a cada escala  $s$ . Se dice que una señal multifractal  $f$  es homogénea si todas sus singularidades tienen el mismo exponente de Lipschitz  $\alpha_0$  lo que significa que el soporte de  $D_\alpha$  esta restringido a  $\alpha_0$ . El movimiento Browniano es un ejemplo de un multifractal homogéneo.

Por otra parte se puede definir el espectro de singularidad como la medición global de una señal que no solo captura la jerarquía de las singularidades presentes sino también permite obtener la dimensión fractal de la señal (Khan et al, 2007),(Gómez y Poveda, 2008).

### 2.12.1. Función de partición

No se puede calcular la regularidad puntual de Lipschitz de una señal multifractal ya que las singularidades no están aisladas y por motivos de resolución numérica

dichas singularidades no pueden ser discriminadas. Sin embargo es posible medir el espectro de singularidades de una señal multifractal a partir de la transformada ondícula módulo máximo, usando una función de partición global introducida en (Murzy, Bacry y Arneodo, 1994).

Se tiene una ondícula  $\psi$  con  $n$  momentos ceros, como se demostró anteriormente  $f$  es puntualmente Lipschitz  $\alpha_0 < n$  en  $t_i$  entonces la transformada ondícula  $T_\psi[f](u, s)$  posee una secuencia de valores máximos que convergen alrededor de  $t_i$  en escalas finas. El conjunto de máximos a escala  $s$  puede ser interpretados como un recubrimiento del soporte singular de  $f$  con ondículas de escala  $s$ .

Si  $\{u_p(s)\}_{p \in \mathbb{Z}}$  son las posiciones de los máximos locales de  $|T_\psi[f](u, s)|$  a escalas fijas  $s$ . La función de partición  $Z(q, s)$  mide la suma a potencias  $q$  de todos los máximos y es obtenida mediante la ecuación (2.65).

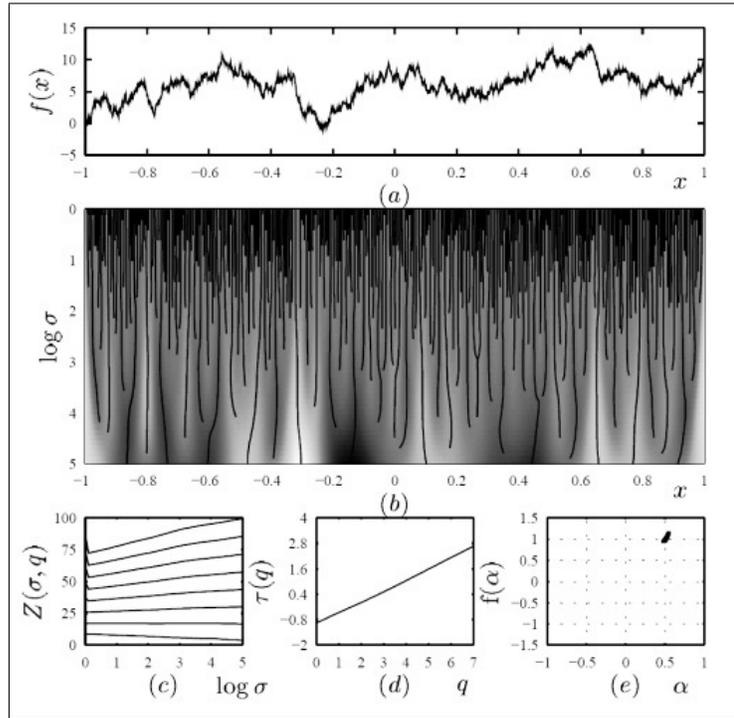


Figura 2.17: a) Movimiento Browniano, b) Transformada ondícula módulo máximo, c) Función de partición, d) Exponente de escalamiento y e) Espectro multifractal

$$Z(q, s) = \sum_p |T_\psi[f](u_p, s)|^q. \quad (2.65)$$

A cada escala  $s$ , cualquier dos (2) máximos consecutivos  $u_p$  y  $u_{p+1}$  de los cuales se supone están separados por una distancia  $|u_{p+1} - u_p| < \epsilon s$  para  $\epsilon > 0$  de forma tal que la función de partición es protegida del producto de máximos muy cercanos por oscilaciones rápidas.

Para cada  $q \in \mathbb{R}$  el exponente de escalamiento  $\tau(q)$  mide el decaimiento asintótico de  $Z(q, s)$  a escalas finas  $s$  a partir de la ecuación (2.66).

$$\tau(q) = \liminf_{s \rightarrow 0} \frac{\log[Z(q, s)]}{\log(s)}. \quad (2.66)$$

Típicamente esto significa lo demostrado en la relación (2.67).

$$Z(q, s) \sim s^{\tau(q)}. \quad (2.67)$$

### 2.12.2. Transformada de Legendre

A continuación se enuncia un teorema con el cual se relaciona el exponente de escalamiento  $\tau(q)$  con la transformada de Legendre de  $D(\alpha)$  para funciones autoafines.

**Teorema 3 (Arneodo, Barcy, Jaffard, Muzy)** *Si  $\Lambda = [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$  es el soporte de  $D(\alpha)$  y se tiene que  $\psi$  es una ondícula de  $n > \alpha_{max}$  momentos ceros. Si una señal  $f$  es auto-similar se tiene la ecuación (2.68) (Mallat, 1999).*

$$\tau(q) = \min_{\alpha \in \Lambda} \left( q \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) - D(\alpha) \right). \quad (2.68)$$

*La prueba detallada de la ecuación (2.68) es bastante extensa, por lo que se realiza una explicación un poco más intuitiva:*

**Prueba:** La suma mostrada en la ecuación (2.65) sobre la posición de todos los máximos es remplazada por la integral sobre el parámetro Lipschitz, en la escala  $s$ . La ecuación (2.64) indica la densidad de valores máximos que recubren una singularidad con exponente de Lipschitz  $\alpha$  proporcional a  $s^{-D(\alpha)}$  en la locación donde  $f$  tiene una regularidad Lipschitz  $\alpha$ , el decaimiento de los valores de la transformada ondícula es aproximado por la relación 2.69.

$$|T_\psi[f](u, s)| \sim s^{\alpha + \frac{1}{2}}. \quad (2.69)$$

Por consiguiente se tiene la relación 2.70:

$$Z(q, s) \sim \int_{\Lambda} s^{q(\alpha + \frac{1}{2})} s^{-D(\alpha)} d\alpha. \quad (2.70)$$

Cuando  $s$  tiende a cero (0) se deriva que  $Z(q, s) \sim s^{\tau(q)}$  para  $\tau(q) = \min_{\alpha \in \Lambda} (q(\alpha + \frac{1}{2}) - D(\alpha))$  con este teorema se demuestra como a partir de la transformada de Legendre del exponente de escalamiento  $\tau(q)$  se obtiene  $D(\alpha)$ , mas es necesario invertir dicha transformada para recobrar el espectro de singularidad  $D(\alpha)$ .

## 2.13. Dimensiones Generalizadas de Rényi

### Entropías generalizadas

En presencia de un proceso aleatorio no es posible predecir con certeza el resultado del mismo. No obstante, esto no significa que se esté en una situación de

completa ignorancia y no se pueda afirmar nada acerca del proceso. Es posible asociar a éste una distribución de probabilidad en la que quede codificado todo el conocimiento con respecto a dicho proceso y que se pueda utilizar para inferir propiedades del sistema (de Vicente Majúa, 2008).

**Definición:** La entropía de información de Shannon (de Vicente Majúa, 2008) (o, simplemente, entropía) asociada a una distribución de probabilidad discreta  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  se define como:

$$H(\mathcal{P}) = - \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i).$$

De acuerdo con el teorema de Shannon la entropía de información constituye la única medida cuantitativa rigurosa de la incertidumbre asociada a un proceso aleatorio regido por una determinada distribución de probabilidad. La base del logaritmo es arbitraria, siendo las elecciones más habituales:

- base= 2, unidad de información corresponde a **bits**
- base=  $e$ , unidad de información corresponde a **nats**
- base= 10, unidad de información corresponde a **Hartleys**

El término entropía se debe a la conexión de esta magnitud con la entropía de la dinámica y la mecánica estadística (de Vicente Majúa, 2008). Como el propio Shannon señalaba  $H$  es, por ejemplo, la  $H$  del célebre teorema  $H$  de Boltzmann cuando  $\mathcal{P}$  representa la probabilidad de que un sistema de partículas se encuentre en cualquiera de sus microestados accesibles. El término información responde a una de las posibles interpretaciones de la entropía.

Existen autores que han relajado la axiomática de Shannon para una medida de

la incertidumbre, lo que ha dado lugar a un abanico más amplio de medidas que se conocen como entropías generalizadas. Básicamente, estas medidas explotan la libertad a la que da lugar la Schur-concavidad (véase la definición en el Apéndice) como única restricción para una medida de incertidumbre. Si bien las entropías generalizadas, no poseen todas las buenas propiedades matemáticas que caracterizan a la entropía de Shannon y que le otorgan un lugar central en Teoría de la Información, su interés y utilidad resultan incuestionables.

Existen autores que han relajado la axiomática de Shannon para una medida de la incertidumbre, lo que ha dado lugar a un abanico más amplio de medidas que se conocen como entropías generalizadas. Básicamente, estas medidas explotan la libertad a la que da lugar la Schur-concavidad como única restricción para una medida de incertidumbre. Si bien las entropías generalizadas, no poseen todas las buenas propiedades matemáticas que caracterizan a la entropía de Shannon y que le otorgan un lugar central en Teoría de la Información, su interés y utilidad resultan incuestionables (de Vicente Majúá, 2008).

**Definición** Las entropías de Rényi de una distribución de probabilidad discreta

$\mathcal{P} = p_1, p_2, \dots, p_n$  se definen como:

$$H_q(\mathcal{P}) = \frac{1}{1-q} \log \left( \sum_{i=1}^n (p_i)^q \right), (q \geq 0)$$

$H_q(\mathcal{P})$  es cóncava si  $0 < q \leq 1$  (si  $n = 2$  la concavidad también se cumple para  $0 < q \leq 2$ ), mientras que para  $q > 2$   $H_q(\mathcal{P})$  no es ni cóncava ni convexa. Como rasgo positivo de estas entropías, cabe señalar que para  $q > 1$  están libres de problemas de continuidad que sufre la entropía de Shannon cuando se permite un conjunto infinito de posibles sucesos.

## Capítulo III

### MARCO METODOLÓGICO

#### 3.1. Síntesis

En el párrafo siguiente se plantea una visión global de lo que corresponde a la descripción metodológica de la presente investigación, visión que en el desarrollo de este capítulo se hará más específica para cada segmento de procedimientos y métodos realizados.

El presente trabajo de investigación constó en primera instancia de una fase de recopilación de información, en la cual se tenía como objetivo desarrollar habilidades y conocimientos con respecto a las distintas herramientas involucradas en el análisis multifractal, posterior a esto en una segunda fase se definieron los distintos conjuntos de datos con los cuales la evaluación del análisis multifractal y su posible relación con el contenido de fluidos de yacimiento se llevaría a cabo, seguidamente en la tercera fase se planteó el algoritmo para el cálculo del espectro multifractal a partir de la transformada ondícula módulo máximo, descrito en (Mallat, 1999), por último en una cuarta fase, a partir de los datos de salida se generan distintos gráficos cruzados de forma tal que se permita evidenciar en forma clara la posible relación entre el contenido de fluidos y el análisis multifractal. En la Figura 3.1 se representa de forma esquemática la metodología establecida.

### 3.2. Variables de entrada

Se desarrollaron tres (3) tipos de sismogramas sintéticos, de forma tal que cada tipo de sismograma ejemplificara condiciones de interés para la investigación, dichos datos son:

- Modelos teóricos del subsuelo a partir de velocidades y densidades, características de fluidos de yacimiento.
- Modelo a partir de registros de pozo con validación de contenido de fluido (gas).
- Modelos teóricos a partir de la sustitución de fluidos por medio de la ecuación de Gassman.

En el cálculo de los sismogramas sintéticos, se genera una señal de salida o respuesta (sismograma sintético) a partir de la convolución de una señal de entrada o excitación (ondícula) y un sistema lineal continuo e invariante en tiempo (serie de reflectividad), dicho procedimiento es definido como modelado directo, véase la Figura 3.2.

Los diferentes modelos sintéticos generados, comparten la idea expuesta ante-

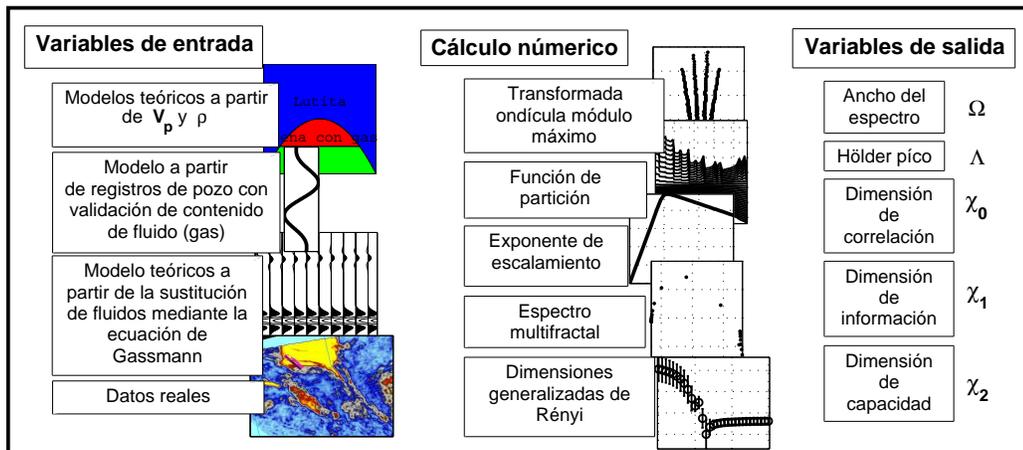


Figura 3.1: Esquema de la metodología utilizada

riormente de modelado directo y han de diferenciarse solo en la naturaleza de los valores de **densidad** y **velocidad de onda P**. Dicha naturaleza se expone a continuación:

- Los modelos del subsuelo a partir de  $V_p$  y  $\rho$ , son obtenidos de valores experimentales descritos en (Robert y Wrolstad, 1993)
- Para el modelo a partir de registros de pozo con validación de contenido de fluido (gas), se cuenta con dos(2) pozos, Pozo 1 el cual resulto productor y Pozo 2, siendo este último seco. Conforme a evidenciar, a partir de datos geofísicos el hecho de que el pozo Pozo 1 resultase productor de gas, se

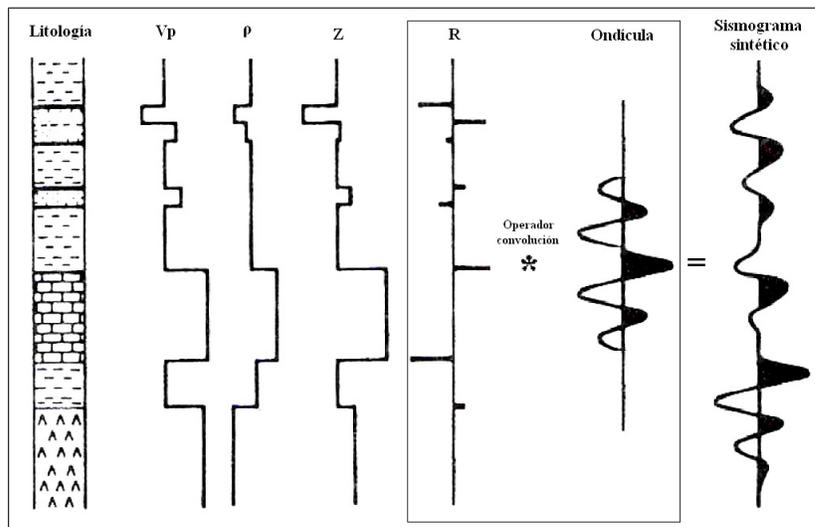


Figura 3.2: Modelado directo Modificado de (Tearpock et al, 1991)

Tabla 3.1: Valores de  $V_p$  y  $\rho$  tomados de (Robert y Wrolstad, 1993)

Roca	$V_p (\frac{m}{s})$	$\rho (\frac{Kg}{cm^3})$
Lutita	2249	2139
Arena saturada de agua	2771	2182
Arena saturada de gas	2458	1886
Arena saturada de petróleo liviano	2537	2089
Arena saturada de petróleo pesado	2779	2146

muestra la Figura 3.3, como existe una inflexión entre las curvas de densidad (RHOB) y porosidad neutrón (NPHI), efecto característico en zonas con presencia de gas (Peters, 2006).

- En los modelos teóricos a partir de la sustitución de fluidos por medio de la ecuación de Gassman, se parte de condiciones iniciales de una roca seca a la cual se varia su contenido de fluidos y esto a su vez altera los módulos elásticos de la roca, dicha sustitución se tratara más adelante, a continuación en la Tabla 3.2 se definen las condiciones iniciales tomadas de (Mavko, Mukerji y Dvorkin, 1998):

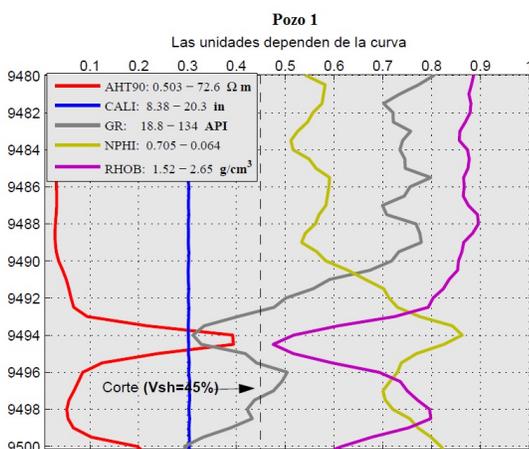


Figura 3.3: Efecto de presencia de gas, en registros geofísicos de pozo

Tabla 3.2: Valores de condiciones iniciales para la sustitución de fluidos tomado de (Mavko, Mukerji y Dvorkin, 1998)

Porosidad de la roca	20 %
Módulo de volumen de la roca seca	12GPa
Módulo de volumen del cuarzo	36GPa
Módulo de corte del cuarzo	44GPa
Módulo de volumen del gas	0, 133GPa
Módulo de volumen del agua	3, 013GPa
Densidad del agua con salinidad de 500000 ppm	1055 $\frac{Kg}{m^3}$
Densidad del gas a $T = 80^{\circ}C$ y $P = 300bar$	336 $\frac{Kg}{m^3}$
Densidad del cuarzo	2650 $\frac{Kg}{m^3}$

De los valores anteriores se generan los sismogramas sintéticos, con ciertas consideraciones que se verán más detalladamente en las secciones respectivas.

### 3.2.1. Modelos teóricos del subsuelo a partir de velocidades y densidades, características de fluidos de yacimiento

A partir de la Tabla 3.1 se proponen los siguientes modelos monofásicos:

**Modelo 1:** Lutita, Arena saturada de agua, Lutita.

**Modelo 2:** Lutita, Arena saturada de gas, Lutita.

**Modelo 3:** Lutita, Arena saturada de petróleo liviano, Lutita.

**Modelo 4:** Lutita, Arena saturada de petróleo pesado, Lutita.

A partir de los modelos monofásicos anteriores se pueden combinar ciertas fases, teniendo las consideraciones respectivas relacionadas al contacto entre fases físicamente posible. Es decir si  $\rho_a > \rho_b$  entonces la  $fase_a$  debe estar bajo la  $fase_b$  y de esta forma se proponen los siguientes modelos bifásicos:

**Modelo 5:** Lutita, Arena saturada de agua, Arena saturada de gas, Lutita.

**Modelo 6:** Lutita, Arena saturada de agua, Arena saturada de petróleo liviano, Lutita.

Tabla 3.3: Modelos monofásicos del subsuelo

	Capa 1	Capa 2		Capa 3
Modelo 1		2771	2182	
Modelo 2	$V_p = 2249 \frac{m}{s}$	2458	1886	$V_p = 2249 \frac{m}{s}$
Modelo 3	$\rho = 2139 \frac{Kg}{m^3}$	2537	2089	$\rho = 2139 \frac{Kg}{m^3}$
Modelo 4		2779	2146	
		$V_p (\frac{m}{s})$	$\rho (\frac{Kg}{m^3})$	

**Modelo 7:** Lutita, Arena saturada de agua, Arena saturada de petróleo pesado, Lutita.

**Modelo 8:** Lutita, Arena saturada de petróleo liviano, Arena saturada de gas, Lutita.

**Modelo 9:** Lutita, Arena saturada de petróleo pesado, Arena saturada de gas, Lutita.

Los modelos bifásicos quedan tabulados como se muestra en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4: Modelos bifásicos del subsuelo

	Capa 1	Capa 2		Capa 3		Capa 4
Modelo 5	$V_p = 2249 \frac{m}{s}$	2771	2182	2458	1886	$V_p = 2249 \frac{m}{s}$
Modelo 6		2771	2182	2537	2089	
Modelo 7		2771	2182	2779	2146	
Modelo 8	$\rho = 2139 \frac{Kg}{m^3}$	2537	2089	2458	1886	$\rho = 2139 \frac{Kg}{m^3}$
Modelo 9		2779	2146	2458	1886	
		$V_p(\frac{m}{s})$	$\rho(\frac{Kg}{m^3})$	$V_p(\frac{m}{s})$	$\rho(\frac{Kg}{m^3})$	

### 3.2.2. Modelo a partir de registros de pozo con validación de contenido de fluido (gas)

Para este modelo se cuenta que dos(2) pozos, Pozo 1 y Pozo 2, de los cuales Pozo 1 resulto productor de gas y Pozo 2 no evidencio ningún tipo de hidrocarburo, como se mencionó anteriormente. De forma que para realizar el modelado directo son necesarios los registro de pozo correspondientes a mediciones de densidad y velocidad de onda compresional, en las Figura 3.4 se muestran dichas mediciones más otras adicionales para ambos pozos.

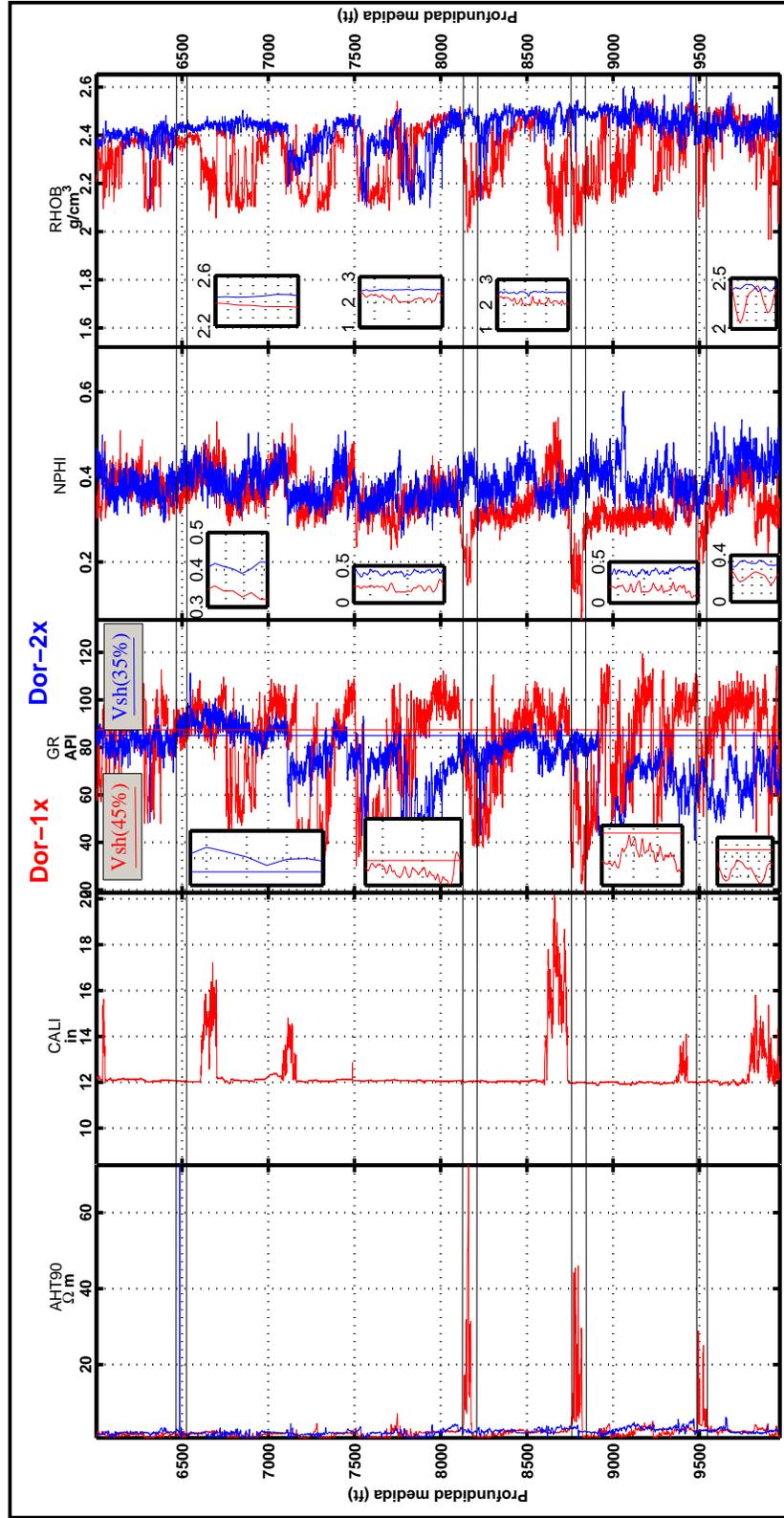


Figura 3.4: Registros de pozo Pozo 1 (Rojo) Pozo 2 (Azul) , donde se indican los intervalos de interés

En función de los registros mencionados anteriormente se estima la serie de reflectividad que hará las veces de sistema lineal e invariante en tiempo y junto a una ondícula Ricker de 30 **Hz** fase cero la cual será la función de entrada ,se generan los sismogramas sintéticos correspondientes a los pozos. Los cuales han de servir como elementos para evaluar el análisis multifractal. En la Figura 3.5 se muestran los sismogramas en una misma ventana de tiempo.

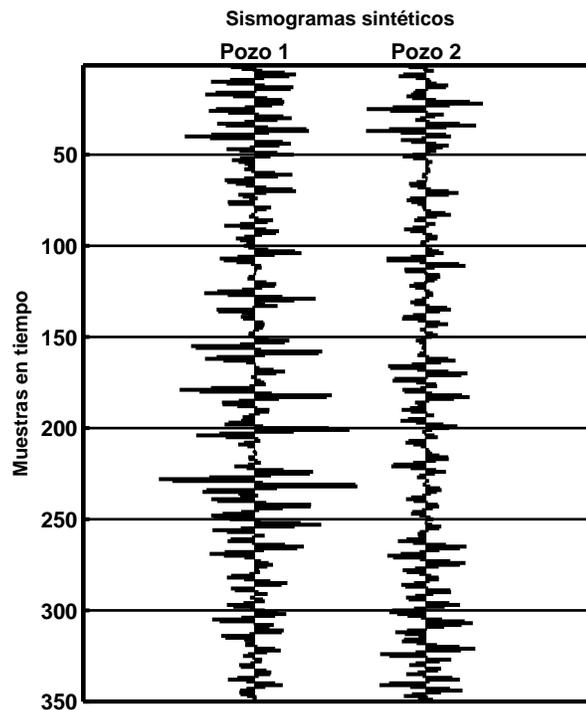


Figura 3.5: Sismogramas sintéticos de los pozos Pozo 1 y Pozo 2

### 3.2.3. Modelos teóricos a partir de la sustitución de fluidos por medio de la ecuación de Gassman

Uno de los problemas más importantes en la física de rocas y análisis de datos sísmicos es la predicción de las velocidades sísmicas en rocas saturadas parcial o totalmente con un fluido . Este problema es conocido como sustitución de fluidos

y satisface la siguiente relación (Mavko, Mukerji y Dvorkin, 1998):

$$\frac{K_{sat}}{K_0 - K_{sat}} = \frac{K_{seco}}{K_0 - K_{seco}} + \frac{K_{fl}}{\phi(K_0 - K_{fl})}, \quad (3.1)$$

$$\mu_{sat} = \mu_{seco} \quad (3.2)$$

donde

$K_{seco}$  = módulo de bulk efectivo de la roca seca.

$K_{sat}$  = módulo de bulk efectivo de la roca con fluido.

$K_0$  = módulo de bulk del mineral de la matriz rocosa.

$K_{fl}$  = módulo de volumen efectivo del fluido.

$\phi$  = porosidad

$\mu_{seco}$  = módulo de corte efectivo de la roca seca.

$\mu_{sat}$  = módulo de corte efectivo de la roca con fluido.

### Limitantes en la sustitución de fluidos

Las siguientes consideraciones son aplicables al uso de la relación de Gassmann.

1. Son asumidas bajas frecuencias en la sísmica ( $< 100 \text{ Hz}$ ) de tal forma que la presión de poro es equilibrada a lo largo del espacio del poro.
2. La roca es isótropa.
3. Todos los minerales que conforman la roca poseen el mismo módulo volumétrico y de cizalla.
4. La roca esta totalmente saturada.

En la presente investigación, se tomaron como variables iniciales para el problema de sustitución de fluidos, las descritas en la Tabla 3.2, en este caso particular se pretende estimar el módulo volumétrico de una roca saturada a relaciones de saturación agua-gas, partiendo de una saturación de agua de uno (1) ( $\mathbf{S}_w = 100\%$ ) hasta cero (0) ( $\mathbf{S}_w = 0\%$ ) con un decremento de 10% para cada parametrización de la relación 3.1.

En primer lugar es necesario estimar el módulo volumétrico de las distintas combinaciones de fases de fluidos (agua-gas), esto es calculado a partir de la fórmula de **Wood** la cual reza de la siguiente forma:

En fluidos en suspensión o mezcla de fluidos, donde las heterogeneidades son de menor tamaño en comparación con la longitud de onda, la velocidad del sonido es dada exactamente por la relación de Wood (1955).

$$V = \sqrt{\frac{K_R}{\rho}}, \quad (3.3)$$

donde  $K_R$  es el promedio de Reuss en iso-esfuerzo de la composición,

$$\frac{1}{K_R} = \sum_i^N \frac{f_i}{K_i}, \quad (3.4)$$

y  $\rho$  es el promedio ponderado de la densidad definido por:

$$\rho = \sum_i^N f_i \rho_i, \quad (3.5)$$

donde  $f_i$ ,  $K_i$ , y  $\rho_i$  son la fracción volumétrica, módulo de volumétrico y la densidad de la fase, respectivamente.

A partir de las ecuaciones 3.4 y 3.5 se estima el módulo volumétrico y densidad de la combinación de fases, en este caso particular dichas variables toman los valores indicados en la Tabla 3.5, estos valores sustituirán el termino correspondiente a  $K_{fl}$  en la relación 3.1

Tabla 3.5: Módulo volumétrico y densidad de la mezcla de fluidos

$S_h$	$S_w$	$K_{fl}(\text{Gpa})$	$\rho(\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3})$
0	1	3,013	1,0550
0,1	0,9	0,9519	0,9831
0,2	0,8	0,5652	0,9112
0,3	0,7	0,0,4019	0,8393
0,4	0,6	0,3119	0,7674
0,5	0,5	0,2548	0,6955
0,6	0,4	0,2153	0,6236
0,7	0,3	0,1865	0,5517
0,8	0,2	0,1644	0,4798
0,9	0,1	0,1471	0,4079
1	0	0,1330	0,3360

Ahora bien es necesario estimar el módulo volumétrico de la mezcla de minerales que conforman la matriz de la roca, para ello se cuenta con los límites de **Voigt** y **Reuss** a partir de la siguiente idea:

Si se desea predecir un módulo elástico efectivo de una mezcla de granos y poros teórica, es necesario especificar:

1. La fracción volumétrica de las distintas fases.
2. Los módulos elásticos.
3. Detalles geométricos como la relación de como están distribuidas las fases relativamente una con respecto a otra.

El **límite superior de Voigt** en iso-deformación de un módulo elástico efectivo cualquiera  $M_v$  de  $N$  fases es :

$$M_v = \sum_i^N f_i M_i. \quad (3.6)$$

El **límite inferior de Reuss** en iso-esfuerzo de un módulo elástico efectivo cualquiera  $M_R$  es (Reuss 1929).

$$M_R = \sum_i^N \frac{f_i}{M_i}, \quad (3.7)$$

donde

$f_i =$  La fracción volumétrica del medio  $i -$  esimo.

$M_i =$  El módulo elástico del medio  $i -$  esimo.

Posterior a la estimación de los límites anteriores estima el promedio de **Hill**, con el cual se concluye el cálculo del módulo de cizalla y volumétrico de la mezcla mineral. El promedio de **Voigt-Reuss-Hill** es simplemente el promedio geométrico de los límites superior e inferior de Voigt y Reuss, respectivamente.

$$M_{VRH} = \frac{M_v + M_R}{2}. \quad (3.8)$$

La roca teórica usada en la presente investigación consta de una matriz rocosa con solo una fase mineral la cual corresponde al cuarzo por lo que la fracción volumétrica corresponde a uno (1), por lo tanto sus valores de módulo de cizalla y volumétrico de la matriz rocosa son los correspondientes al cuarzo únicamente, como se muestra en la siguiente demosttración:

$$M_v = \sum_i^N f_i M_i \rightarrow \overset{1}{f_1} M_1 \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot \mathbf{K}_Q \text{ Para estimar el módulo volumétrico,} \\ 1 \cdot \mu_Q \text{ Para estimar el módulo de cizalla.} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{M_r} = \sum_i^N \frac{f_i}{M_i} \rightarrow \frac{\overset{1}{f_1}}{M_1} \rightarrow M_r = M_i \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_Q \text{ Para estimar el módulo volumétrico,} \\ \mu_Q \text{ Para estimar el módulo de cizalla.} \end{array} \right.$$

A partir de la desmostración anterior y la ecuación (3.8) se tiene que el promedio de **Hill** para estimar los módulos de cizalla y volumétrico es:

$$\begin{aligned} M_{vrh} &= \frac{M_v + M_r}{2} \rightarrow \frac{\overset{(\mathbf{K}_Q)}{\mu_Q} M_v + \overset{(\mathbf{K}_Q)}{\mu_Q} M_r}{2} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_Q \text{ Módulo volumétrico de la matriz rocosa,} \\ \mu_Q \text{ Módulo de cizalla de la matriz rocosa.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

El valor estimado del promedio de Voigt-Reuss-Hill correspondiente al módulo volumétrico de la matriz mineral de la roca, sustituirá al término  $\mathbf{K}_0$  de la relación 3.1. La relación anterior se puede reordenar de la siguiente forma con la finalidad de estimar los distintos módulos volumétricos a las distintas saturaciones de fluidos.

$$K_{sat} = \frac{K_0 \left[ \frac{K_{seco}}{K_0 - K_{seco}} + \frac{K_{fl}}{\phi(K_0 - K_{fl})} \right]}{1 + \frac{K_{seco}}{K_0 - K_{seco}} + \frac{K_{fl}}{\phi(K_0 - K_{fl})}}.$$

Cálculado el módulo volumétrico de la roca a distintas saturaciones, es necesario estimar las distintas densidades de la roca saturada, dicho cálculo es realizado en uso de la ecuación (3.9). Para dicho cálculo es necesario estimar las densidades de la matriz mineral, para ello usamos el limite superior de Voigt.

$$\begin{aligned} \rho_{matriz} &= \sum_i^N f_i \rho_i \rightarrow f_1 \rho_Q \\ &= \rho_Q \end{aligned}$$

Como era de esperarse la densidad de la matriz mineral al estar conformada solo por cuarzo tendrá la densidad del mismo.

$$\rho_{roca} = \rho_{fl} \phi + \rho_{matriz} (1 - \phi). \quad (3.9)$$

Por último es posible estimar a partir de los módulos dinámicos la velocidad de onda compresional mediante la ecuación (3.10)

$$V_p = \sqrt{\frac{K_{sat} + \frac{4}{3} \mu_Q}{\rho_{roca}}}. \quad (3.10)$$

En la Figura 3.6 se evidencia el comportamiento de la velocidad de onda compresional, en función de los distintos valores de saturación de las combinación de fases agua-gas.

En función de los valores de onda compresional y densidad estimados, se proponen los modelos mostrados en la Tabla 3.6.

A partir de la argumentación expuesta anteriormente con respecto a la sustitución de fluidos, se propone el algoritmo 1.

Aplicando el algoritmo 1 con las condiciones iniciales propuestas en la Tabla 3.2

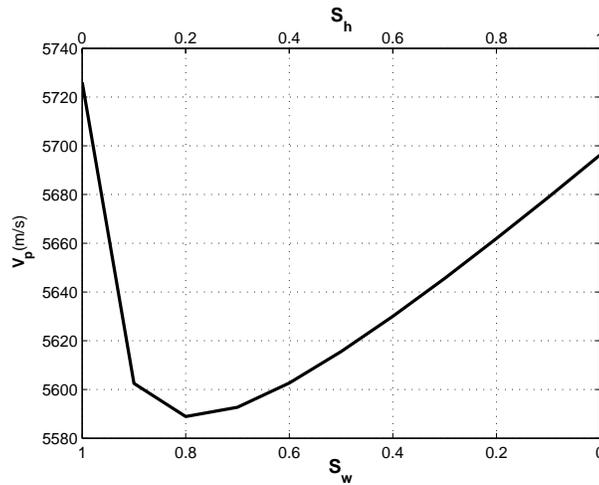


Figura 3.6: Comportamiento de la velocidad de onda p en función de los distintos valores de saturación.

Tabla 3.6: Modelos teóricos a partir de la sustitución de fluidos por medio de la ecuación de Gassman

Modelos	S <sub>w</sub>	S <sub>h</sub>	Capa 1	Capa 2		Capa 3
Modelo 1	1	0	<b>V<sub>p</sub> = 2249 <math>\frac{m}{s}</math></b>  <b><math>\rho = 2139 \frac{Kg}{m^3}</math></b>	5726,1	2331,0	<b>V<sub>p</sub> = 2249 <math>\frac{m}{s}</math></b>  <b><math>\rho = 2139 \frac{Kg}{m^3}</math></b>
Modelo 2	0,9	0,1		5602,5	2316,6	
Modelo 3	0,8	0,2		5588,9	2302,2	
Modelo 4	0,7	0,3		5592,7	2287,9	
Modelo 5	0,6	0,4		5602,7	2273,5	
Modelo 6	0,5	0,5		5615,5	2259,1	
Modelo 7	0,4	0,6		5630,0	2244,7	
Modelo 8	0,3	0,7		5645,6	2230,3	
Modelo 9	0,2	0,8		5661,9	2216,0	
Modelo 10	0,1	0,9		5678,8	2201,6	
Modelo 11	0	1		5696,2	2187,2	
				<b>V<sub>p</sub> (<math>\frac{m}{s}</math>)</b>	<b><math>\rho</math> (<math>\frac{Kg}{m^3}</math>)</b>	

---

**Algoritmo 1** Sustitución de fluidos a partir de la ecuación de Gassmann

---

**Entrada:**  $K_{seco}, K_i^{matriz}, \mu_i^{matriz}, f_i, \phi, K_i^{fluidos}, s_i^{fluido}$ .

**Salida:**  $V_{p,s_i}$

- 1: Cálculo del módulo volumétrico de la mezcla de fluidos,

$$\frac{1}{K_{Ri}} = \sum \frac{s_i^{fluido}}{K_i^{fluidos}}.$$

- 2: Cálculo del módulo de volumétrico y cizalla de la mezcla mineral de la matriz  
 $C_{i,j} = [K_i^{matriz} \mu_i^{matriz}]$

$$\begin{aligned} M_{v\ i,j} &= \sum f_i C_{i,j}, \\ \frac{1}{M_{R\ i,j}} &= \sum \frac{f_i}{C_{i,j}}, \\ M_{vhr\ i,j} &= \frac{M_{v\ i,j} + M_{R\ i,j}}{2}, \\ &= [K_{vhr\ i,j} \mu_{vhr\ i,j}]. \end{aligned}$$

- 3: Cálculo del módulo de volumétrico en función de  $K_{vrh\ i}$  para cada saturación.

$$K_{sati} = \frac{K_{vrh\ i} \left[ \frac{K_{seco}}{K_{vrh\ i} - K_{seco}} + \frac{K_{Ri}}{\phi(K_{hrv\ i} - K_{Ri})} \right]}{1 + \frac{K_{seco}}{K_{vrh\ i} - K_{seco}} + \frac{K_{Ri}}{\phi(K_{hrv\ i} - K_{Ri})}}.$$

- 4: Cálculo de la densidad de la mezcla de fluidos y de la mezcla mineral de la matriz.

$$\begin{aligned} \rho_{fluido\ i} &= \sum s_i^{fluido} \rho_i^{fluido}, \\ \rho_{matriz\ i} &= \sum f_i \rho_i^{mineral}. \end{aligned}$$

- 5: Cálculo de la densidad de la roca en función de las distintas saturaciones.

$$\rho_{roca\ i} = \phi \rho_{fluido\ i} + (1 - \phi) \rho_{matriz\ i}.$$

- 6: Por último se calcula  $V_p$  en función de  $K_{sati}, \mu_{vhr\ i}$  y  $\rho_{roca\ i}$

$$V_{pi} = \sqrt{\frac{K_{sati} + \frac{4}{3} \mu_{vhr\ i}}{\rho_{roca\ i}}}.$$

se generan los modelos sintéticos del subsuelo mostrados en la Tabla 3.6 cuya respuesta sísmica sintética se muestra en la Figura 3.7, para la cual es difícil observar las diferencias de amplitudes, por ello se añade la impedancia acústica de cada modelo (línea roja) que hace más evidente dichas diferencias en la magnitud de las amplitudes.

Retomando el modelado directo, para generar estos modelos sintéticos se toma como función de excitación una ondícula Ricker cuya frecuencia pico es estimada mediante la resolución sísmica vertical ( $f_{pico} = \frac{V_p}{4 \cdot h}$ ).

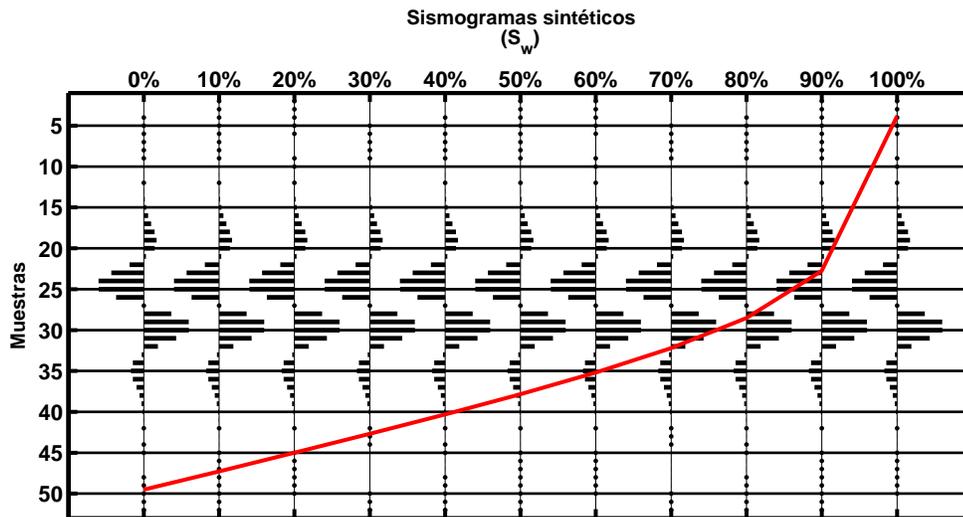


Figura 3.7: Sismogramas sintéticos a partir de la sustitución de fluidos y en rojo la tendencia que cumplen los valores de impedancia acústica ( $S_w = 100\%$  → máxima impedancia acústica)

### 3.2.4. Datos reales

Los datos fueron seleccionados de un área de estudio al norte de Venezuela, considerándose el cubo sísmico migrado y sin pos-procesos de aproximadamente  $59Km^2$  grabado con las siguientes características:

1. Ventana de tiempo: 0-8000ms.
2. Muestreo: 4 ms.

Del volumen sísmico de dicho proyecto se seleccionaron nueve (9) trazas, las cuales poseen una característica de interés para la investigación. Esta característica de interés es representada como anomalías de amplitud resaltadas por una serie de atributos vinculados a la posible presencia de gas. En la Figura 3.8 se indican las trazas sísmicas evaluadas mediante el análisis multifractal.

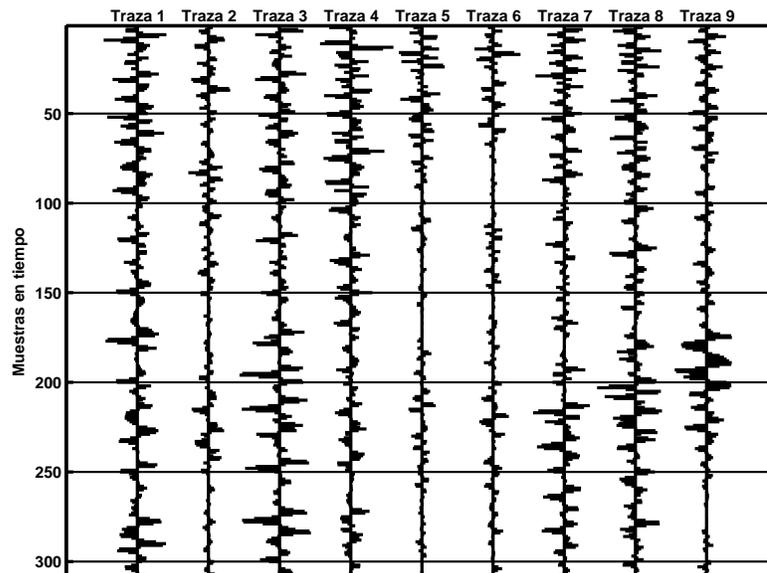


Figura 3.8: Trazas sísmicas, extraídas del cubo sísmico considerado.

### 3.3. Cálculo numérico

#### 3.3.1. Resumen

Para realizar el cómputo del espectro multifractal a partir de la transformada ondícula módulo máximo se procede de la forma siguiente (Mallat, 1999):

1. Cálculo de los máximos relativos del módulo de la transformada ondícula a cada escala, formando así una cadena de máximos.
2. Cómputo de la función de partición.

$$Z(q, s) = \sum_p |T_\psi[f](u_p, s)|^q.$$

3. Definición del exponente de escalamiento a partir de una regresión lineal de  $\log_2 Z(q, s)$  como función de  $\log_2 s$ :

$$\log_2 Z(q, s) \approx \tau(q) \log_2 s + C(q). \quad (3.11)$$

4. Cómputo del espectro.

$$D(\alpha) = q\alpha - \tau(q). \quad (3.12)$$

5. Cálculo de las dimensiones generalizadas de Rényi.

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}. \quad (3.13)$$

#### 3.3.2. Transformada ondícula

Retomando la ecuación (2.24) y considerando que  $\psi \in \mathbb{R}$  se define la transformada ondícula continua de una señal  $f(t)$  por la ecuación (3.14) (Arneodo et al, 1988).

$$T_\psi[f](u, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt. \quad (3.14)$$

En Matlab se encuentra definido el comando '**cwt**' (por sus siglas en inglés 'continuous wavelet transform'). Dicha comando permite calcular la transformada ondícula de una señal, definiendo previamente ciertos parámetros que se muestra a continuación:

$$\mathbf{cwt}(f(t), s, Wn), \quad (3.15)$$

donde  $f(t)$  es la señal a analizar,  $s$  son las escalas de interés y  $Wn$  es la ondícula madre.

### Definición de las escalas de interés

Una de las preguntas más frecuentes en el entorno de la transformada ondícula es: '¿Cómo construir un mapa de ondícula, a partir de: una ondícula madre y el intervalo de muestreo, en el dominio de la frecuencia?' Para dar respuesta a esto es mejor abordar el término pseudo-frecuencia correspondiente a una escala.

De forma tal que para hacer esto es necesario calcular la frecuencia central de la ondícula madre seleccionada y usar la siguiente relación:

$$f_a = \frac{f_c}{s\Delta}, \quad (3.16)$$

donde:

$s$  es la escala.

$\Delta$  es el periodo de muestreo.

$f_c$  corresponde a la frecuencia central de la ondícula madre.

$f_a$  es la pseudo-frecuencia correspondiente a la escala  $s$ , en Hz.

Para estimar la frecuencia central la idea es asociar a una ondícula dada una función periódica de frecuencia  $f_c$ , en Matlab se cuenta con el comando **centfrq** el cual usa como variable de entrada la ondícula de interés.

En la presente investigación se uso como ondícula madre la ondícula Morlet obteniendo una  $f_c$  de 0,8125 Hz, en la Figura 3.9 se observa la aproximación de la función periódica a la ondícula Morlet. Una vez definida la frecuencia cen-

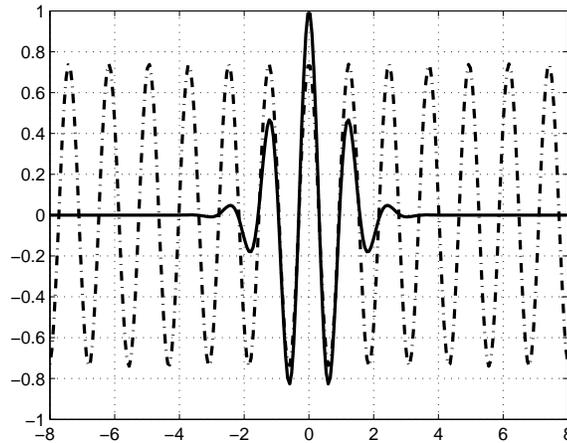


Figura 3.9: Aproximación de una función periódica (trazado interrumpido) a la ondícula Morlet (trazado continuo)

tral de la ondícula madre es posible mediante la relación 3.16 estimar las escalas correspondientes a las frecuencias de interés. Las frecuencias de interés son aquellas contenidas en el ancho de banda de la señal a analizar, en la Figura 3.10 se evidencia el ancho de banda de la señal y sus escalas correspondientes.

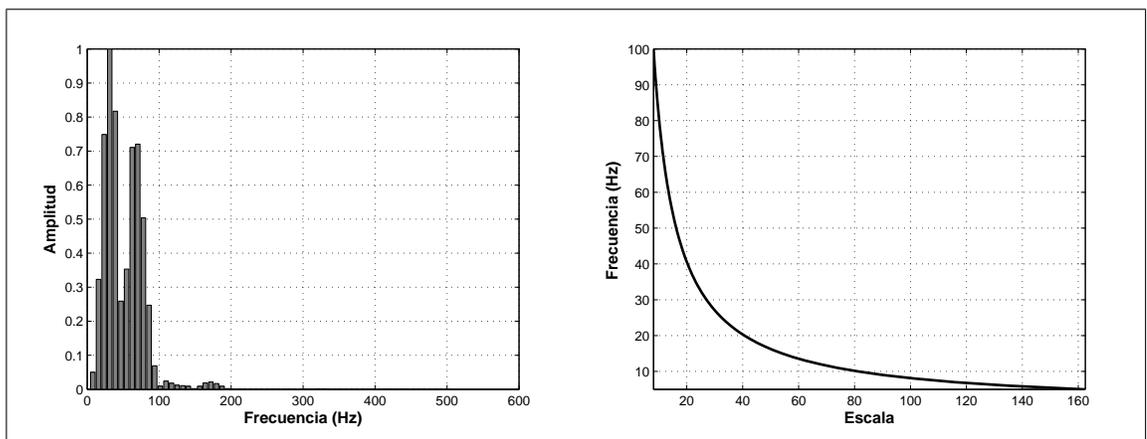


Figura 3.10: Relación entre el contenido de frecuencias y las escalas, espectro de amplitud (derecha) y relación escala frecuencia (izquierda)

### Cómputo de la transformada ondícula

Es posible computar la transformada ondícula continua de la señal  $f(t)$ , en un ancho de banda pertinente, obteniéndose un mapa de ondícula característico del análisis tiempo-frecuencia o tiempo-escala. En la Figura 3.11 se observa el comportamiento de los coeficientes ondícula obtenidos de la transformada de la señal  $f(t)$ .

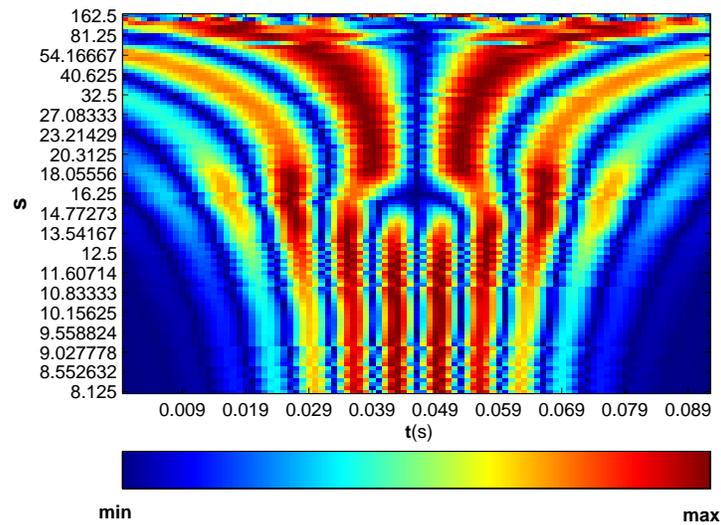


Figura 3.11: Transformada ondícula módulo máximo, en falso color tomando como referencia el máximo valor por escala

### Estimación del error asociado a la transformada ondícula

La estimación del error en la función 3.14, es estimada tomando en cuenta que es una medición indirecta, para la cual la incertidumbre asociada esta definida por la ecuación (3.17) (Milan, 1994):

$$\delta T_\psi[f](u, s) = |\partial_u T_\psi[f](u, s)|\delta u + |\partial_s T_\psi[f](u, s)|\delta s. \quad (3.17)$$

Aplicando la ecuación (3.17) a la ecuación (3.14) se tiene (el cálculo siguiente se puede observar más a detalle en la sección de apéndices:

$$\begin{aligned} \delta T_\psi[f](u, s) &= \left| \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{d\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)}{d\left(\frac{t-u}{s}\right)} \partial_u \left(\frac{t-u}{s}\right) dt \right| \delta u + \dots \\ &\dots + \left| -\frac{1}{2\sqrt{s^3}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \right| \delta s - \dots \\ &\dots - \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{d\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)}{d\left(\frac{t-u}{s}\right)} \partial_s \left(\frac{t-u}{s}\right) dt \Big| \delta s. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para definir una solución numérica, ambos elementos de la ecuación (3.17) pueden ser expresados como transformadas ondícula y de esta forma se aprovecharía el código 3.15 de Matlab, con esta intención la ecuación (3.18) puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta T_\psi[f](u, s) &= \left| \frac{1}{s} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \alpha\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \right| \delta u + \dots \\ &\dots + \left| -\frac{1}{s} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \theta\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \right| \delta s - \dots \\ &\dots - \frac{1}{2s} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \Big| \delta s. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Donde:

$$\alpha\left(\frac{t-u}{s}\right) = \frac{d\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)}{d\left(\frac{t-u}{s}\right)}, \quad (3.20)$$

$$\theta\left(\frac{t-u}{s}\right) = \frac{d\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)}{d\left(\frac{t-u}{s}\right)}\left(\frac{t-u}{s}\right). \quad (3.21)$$

Ahora bien, se pueden definir las siguientes tres (3) matrices  $C_{i,j}$ ,  $D_{i,j}$  y  $E_{i,j}$  haciendo uso del código 'cwt'

$$C_{i,j} = \mathbf{cwt}(f(t), s, \psi_{u,s}), \quad (3.22)$$

$$D_{i,j} = \mathbf{cwt}(f(t), s, \alpha_{u,s}), \quad (3.23)$$

$$E_{i,j} = \mathbf{cwt}(f(t), s, \theta_{u,s}). \quad (3.24)$$

Entonces la incertidumbre en la transformada ondícula puede ser escrita como:

$$\delta T_{\psi}[f](u, s) = \left|\frac{1}{s_i} D_{ij}\right| \delta u + \left|\frac{1}{2s_i} C_{ij} + \frac{1}{s_i} E_{ij}\right| \delta s. \quad (3.25)$$

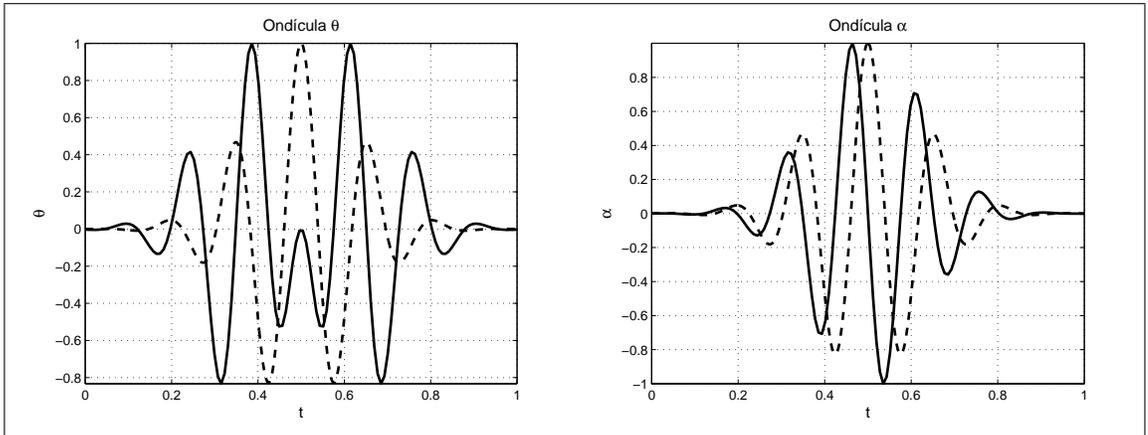


Figura 3.12: Ondícula  $\alpha$  (derecha) y  $\theta$  (izquierda) diseñadas para la solución numérica del error en la transformada ondícula, en trazos la ondícula Morlet y continuo las ondículas respectivas

De la ecuación (3.25) se definen los deltas de las mediciones  $u$  y  $s$  bajo la siguiente lógica:

$\delta u$  es el error asociado en tiempo por lo que esta representado por la mínima medición, la cual corresponde al intervalo de muestreo ( $\Delta t$ ) y  $\delta s$  ha de ser la mínima frecuencia medible, tomando en cuenta que la relación entre la escala y la frecuencia es inversa (véase la ecuación 3.16) se tendría que la menor escala medible es la correspondiente a la máxima frecuencia recuperable, que según el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon, sería  $f_{Ny} = \frac{1}{2\Delta t}$ .

En la Figura 3.13 se observa la distribución de los errores asociados a la transformada ondícula de la señal en cuestión.

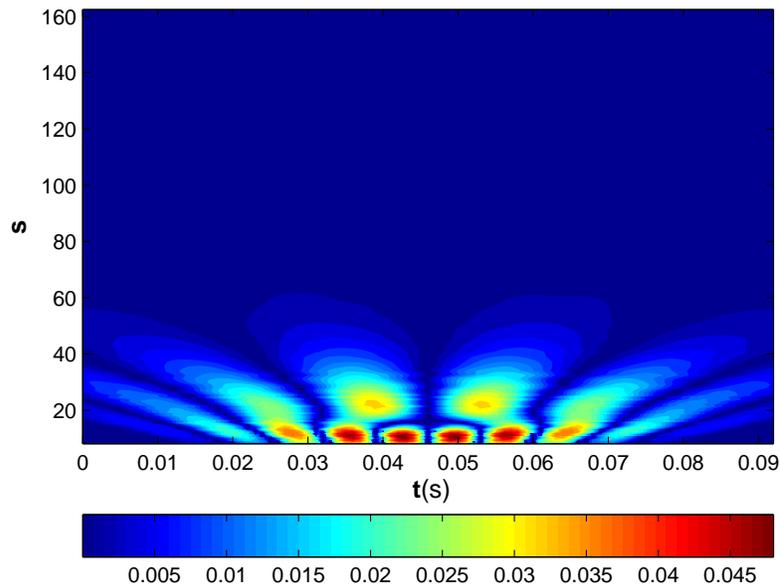


Figura 3.13: Distribución de los errores en la transformada ondícula de la señal  $f(t)$ , en falso color tomando como referencia el máximo absoluto.

## Cómputo de la transformada ondícula módulo máximo

A partir del módulo de los coeficientes ondícula obtenidos de la transformada de la señal  $f(t)$  se ubican los máximos relativos por escala, de forma tal que se definan las líneas máximas, las cuales conformaran el mapa esqueleto, en el cual es posible evidenciar como los máximos convergen en las escalas más finas a los puntos de singularidad.

A continuación se enuncian par de teoremas que permiten establecer una relación entre los máximos relativos y los valores singulares en  $f(t)$ .

**Teorema 4** *Si  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  es uniformemente Lipschitz  $\alpha \leq n$  sobre  $[a, b]$ , entonces existe un  $A > 0$  tal que (Mallat, 1999):*

$$\forall (u, s) \in [a, b] \times \mathbb{R}^+, |T_\psi[f](u, s)| \leq As^{\alpha+\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

**Teorema 5** (JAFFARD) (Mallat, 1999) *Si  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  es Lipschitz  $\alpha \leq n$  en  $v$ , entonces existe un  $A$  tal que:*

$$\forall (u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, |T_\psi[f](u, s)| \leq As^{\alpha+\frac{1}{2}}(1 + |\frac{u-v}{s}|^\alpha). \quad (3.27)$$

*Contrariamente, si  $\alpha \leq n$  no es un entero y existe un  $A$  y  $\alpha' \leq \alpha$  de tal manera que:*

$$\forall (u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, |T_\psi[f](u, s)| \leq As^{\alpha+\frac{1}{2}}(1 + |\frac{u-v}{s}|^{\alpha'}). \quad (3.28)$$

De los teoremas 4 y 5 se prueba que la regularidad local Lipschitz de  $f(t)$  en  $v$  depende del decaimiento a escalas finas de  $|T_\psi[f](u, s)|$  en la vecindad de  $v$ . Medir este decaimiento en todo el plano tiempo frecuencia  $(u, s)$  no es necesario ya que dicho decaimiento es controlado por sus máximos locales. El termino módulo máximo es aplicado para describir cualquier punto  $(u_0, s_0)$  tal que  $|Wf(u, s_0)|$  sea

un máximo local en  $u = u_0$ . Esto implica que:

$$\frac{\partial T_\psi[f](u_0, s_0)}{\partial u} = 0. \quad (3.29)$$

En la Figura 3.14 se muestra el mapa esqueleto el cual esta conformado por los máximos relativos. Numéricamente se estableció el algoritmo 2 para la obtención de los máximos relativos por escala:

A partir del algoritmo 2, es posible seccionar la matriz de coeficientes  $C_{i,j}$  tomando escalas  $s$  fijas o su correspondiente pseudo-frecuencia  $f_a$ , el vector resultado del hecho de dejar una escala fija se le conoce como detalle, en la Figura 3.17 se observa de forma mas práctica el funcionamiento del algoritmo.

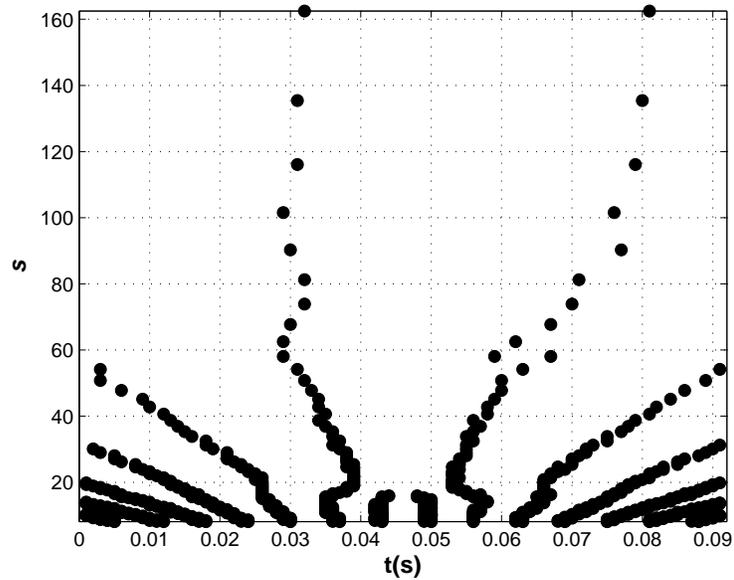


Figura 3.14: Mapa esqueleto

---

**Algoritmo 2** Máximos relativos por escala

---

**Entrada:** Matriz de coeficientes ondícula  $C_{i,j}$  véase código (5.2)

**Salida:**  $K_{i,j}$

```
1: para  $i = 1$  hasta número de filas de  $C_{i,j}$  hacer
2:    $x_{\forall j,1} = C_{i,\forall j}$ 
3:   para  $j = 1$  hasta número de columnas de  $C_{i,j}$  hacer
4:     si  $j = 1$  entonces
5:        $u_{i,j} = x_{j,1} > x_{j+1,1}$ 
6:     si no
7:       si  $j > 1$  y  $j < \text{número de columnas de } C_{i,j}$  entonces
8:          $u_{i,j} = x_{j,1} > x_{j+1,1}$  y  $x_{j,1} > x_{j-1,1}$ 
9:       si no
10:         $u_{i,j} = x_{j,1} > x_{j-1,1}$ 
11:      fin si
12:    fin si
13:    si  $u_{i,j} \neq 0$  entonces
14:       $K_{i,j} = C_{i,j}$ 
15:    si no
16:       $K_{i,j} = 0$ 
17:    fin si
18:  fin para
19:  Borrar  $x_{\forall j,1}$ 
20: fin para
```

---

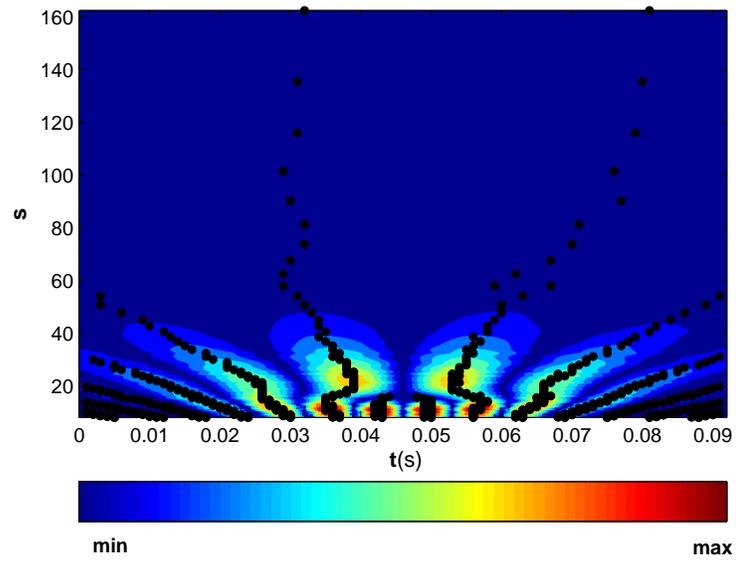


Figura 3.15: Máximos relativos de la transformada ondícula y el error asociado a la misma (fondo)

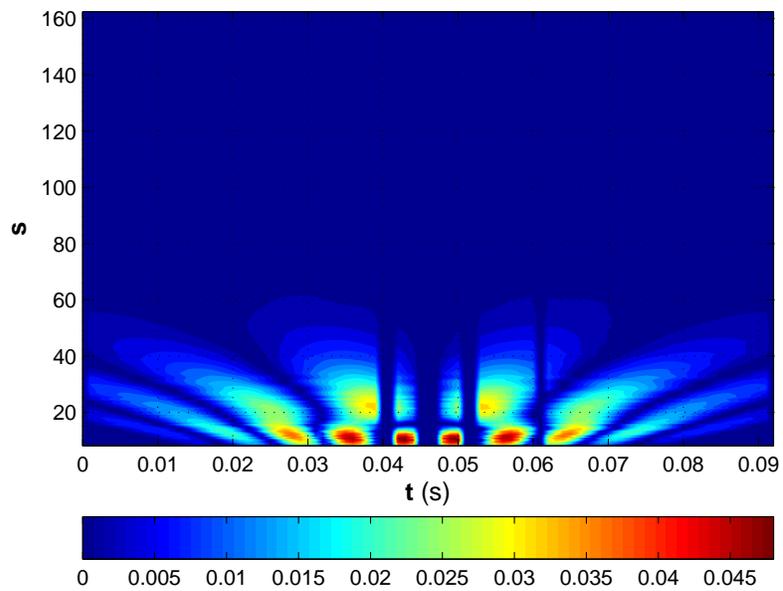


Figura 3.16: incertidumbre asociada a los máximos relativos de la transformada ondícula de la señal  $f(t)$

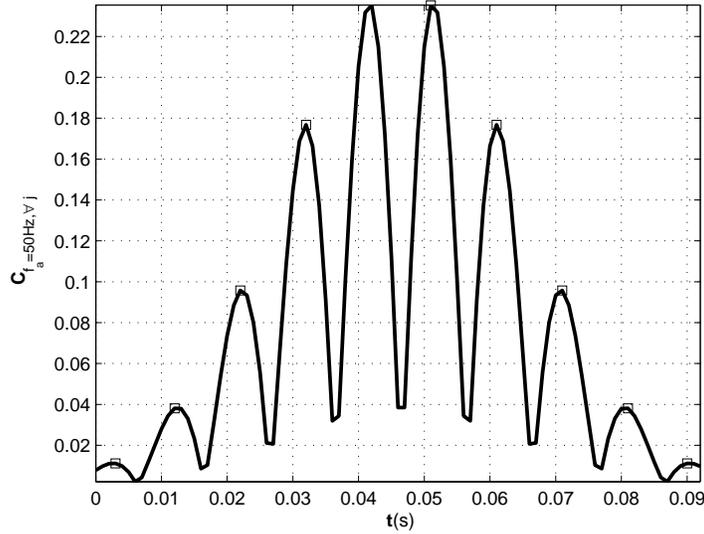


Figura 3.17: Detalle tomado a la pseudo-frecuencia  $50Hz$  (línea continua) y valores que cumplen la condición de la línea 13 del algoritmo 2(cuadrado)

### 3.3.3. Cálculo de la función de partición $Z(q, s)$

No se puede calcular la regularidad de Lipschitz de un multifractal debido a que las singularidades no están aisladas y las soluciones numéricas por más finas que sean no son suficientemente exactas para discriminar dichas singularidades. Sin embargo es posible medir el espectro de singularidades de un multifractal a partir de la transformada ondícula módulo máximo usando una función de partición global descrita por la ecuación (3.11)

#### Cómputo de la función de partición

La función de partición esta definida por la ecuación (3.11), la cual mostramos nuevamente a continuación:

$$Z(q, s) = \sum_p |T_\psi[f](u_p, s)|^q,$$

donde  $\{u_p(s)\}_{p \in Z}$  es la posición de los máximos locales de  $|T_\psi[f](u, s)|$  a escalas fijas  $s$ . La función de partición  $Z$  mide la suma a una potencia  $q \in \mathbb{R}$  de todos los máximos relativos. numéricamente se planteo el algoritmo 3

---

**Algoritmo 3** Función de partición  $Z(q, s)$

---

**Entrada:** Se requiere definir las potencias  $q_m \in \mathbb{R}$  y la matriz  $K_{i,j}$  obtenida del algoritmo 2

**Salida:**  $Z_{i,m}$

```

1: para  $m = 1$  hasta número total de potencias  $q$  hacer
2:   para  $j = 1$  hasta número total de columnas de  $K$  hacer
3:     para  $i = 1$  hasta número total de filas de  $K$  hacer
4:       si  $K_{i,j} \neq 0$  entonces
5:          $f_{i,j,m} = K_{i,j}^m$ 
6:       si no
7:          $f_{i,j,m} = 0$ 
8:       fin si
9:     fin para
10:   fin para
11: fin para
12: para  $n = 1$  hasta número total de potencias  $q$  hacer
13:    $Z_{j,n} = \sum_{p=1}^{\text{número total de columnas de } K} f_{j,p,n}$ 
14: fin para

```

---

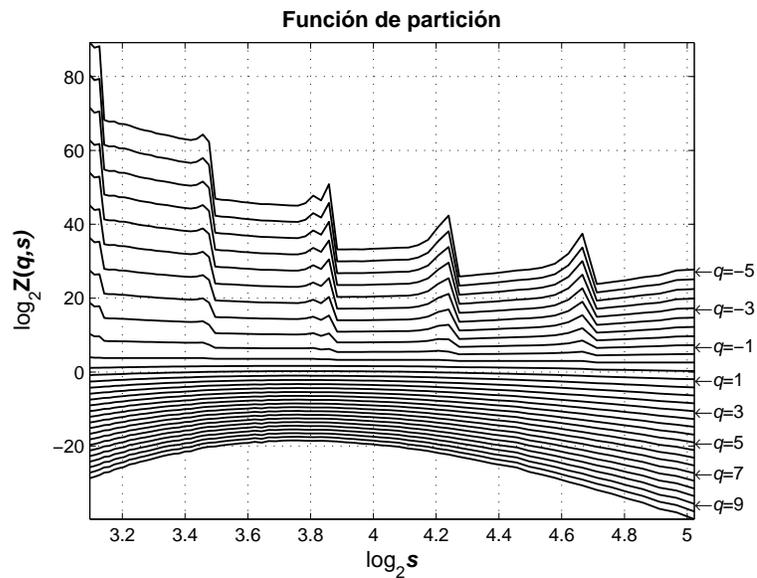


Figura 3.18: Función de partición obtenida mediante el algoritmo 3

### Cálculo de la incertidumbre en la función de partición $Z(q, s)$

Retomando la ecuación (2.32), se evidencia el hecho de establecer para esta investigación una norma igual a uno (1), permitiendo definir una estructura como la mostrada en la ecuación (3.30) para la propagación del error en la función de partición, el desarrollo de esta ecuación se observa con más detalle en la sección de apéndices.

$$\delta Z(q, s) = |\partial_q Z(q, s)| \delta q + |\partial_s Z(q, s)| \delta s ,$$

$$\begin{aligned} \delta Z(q, s) &= \left| Z(q, s) \ln \left[ \sum_p |T_\psi[f](u_p, s)| \right] \right| \delta q + \dots \\ \dots &+ \left| q \frac{Z(q, s)}{\sum_p |T_\psi[f](u_p, s)|} \partial_s \sum_p |W f(u_p, s)| \right| \delta s. \end{aligned} \quad (3.30)$$

En la Figura 3.19 se muestra el comportamiento del error asociado a la función de partición para un  $q = 1$  es decir  $Z(1, s)$

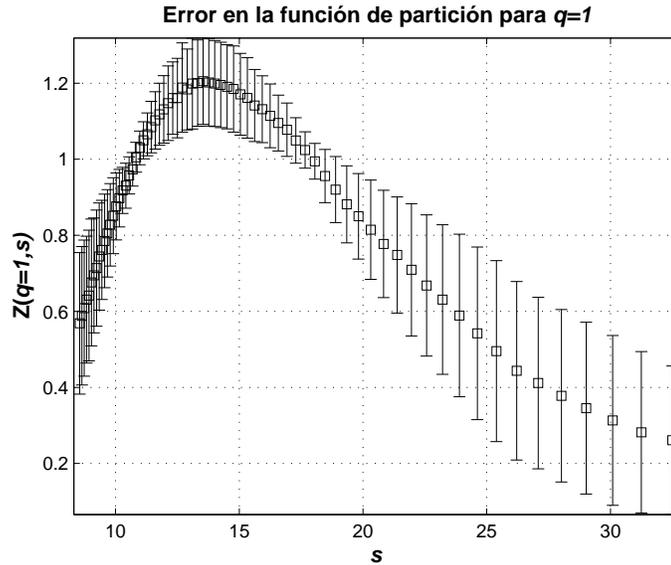


Figura 3.19: Incertidumbre asociada a la función de partición en un valor característico de  $q = 1$ , estimado a partir de la ecuación (3.30)

## Cálculo numérico de la incertidumbre en la función de partición

---

**Algoritmo 4** Incertidumbre asociada a la función de partición  $Z(q, s)$

---

**Entrada:** Se define la variable  $Z_1 = \partial_s |T_\psi[f](u_p, s)|$

**Salida:**  $\delta Z_{i,j}$

- 1: **para**  $j = 1$  hasta *número total de potencias  $q$*  **hacer**
  - 2:   **para**  $i = 1$  hasta *número total de escalas  $s$*  **hacer**
  - 3:      $\delta Z_{i,j} = |Z_{i,j} \log[\sum_p |T_\psi[f](u_p, s)|] \delta q + |q_j \frac{Z_{i,j}}{\sum_p |T_\psi[f](u_p, s)|} Z_1| \delta s$
  - 4:   **fin para**
  - 5: **fin para**
- 

### 3.3.4. Cómputo del exponente de escalamiento $\tau(q)$

Para cada  $q \in \mathbb{R}$  el exponente de escalamiento mide el decaimiento asintótico de la función de partición a escalas finas definido por la ecuación (3.31)

$$\tau(q) = \liminf_{s \rightarrow 0} \frac{\log[Z(q, s)]}{\log(s)}, \quad (3.31)$$

donde  $\tau(q)$  es el exponente de escalamiento,  $Z(q, s)$  es la función de partición y  $s$  es la escala. Lo que típicamente implica al relación mostrada en la ecuación (3.32)

$$Z(q, s) \sim s^{\tau(q)}. \quad (3.32)$$

La ecuación (3.32) indica que la función de partición  $Z(q, s)$  es proporcional a  $s$ , por lo que el exponente de escalamiento es estimado a partir de una regresión lineal de la función de partición a cada valor de  $q$ .

Partiendo de la función de partición mostrada en la Figura 3.18 se tiene que la ecuación (3.11) establece la relación lineal entre dichas variables. A partir de la función de partición se muestra sus aproximaciones lineales en la Figura 3.20.

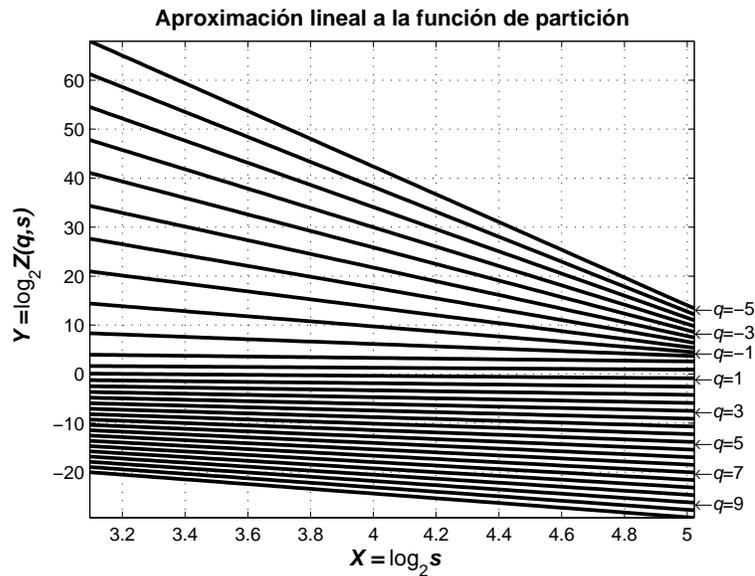


Figura 3.20: Aproximación lineal a la función de partición

### Cálculo numérico del exponente de escalamiento

El algoritmo para la estimación del exponente de escalamiento aprovecha librerías de ajuste polinomial tales como **polyfit** y **polyval**, que permiten estimar el polinomio de grado  $n$  de mejor ajuste y evaluar dicho polinomio en un dominio  $x$  respectivamente.

Para la definición numérica de dicho proceso se estableció el algoritmo 5.

---

**Algoritmo 5** Exponente de escalamiento  $\tau(q)$

---

**Entrada:** Como variable de entrada requiere a la matriz  $Z_{i,j}$  y el vector de escalas  $s$

**Salida:** Variable de salida  $\tau(q)$

- 1: **para**  $j = 1$  hasta *número de columnas de  $Z(q, s)$*  **hacer**
  - 2:  $\eta_{i,j} = \mathbf{polyfit}(Z_{vi,j}, s, n)$  si  $\{n = 1 : y = mx + b\} \rightarrow \eta_j = [m_j \ b_j]$
  - 3:  $\tau_j = \eta_{j,1}$
  - 4: **fin para**
- 

Del algoritmo 5 se calcula el exponente de escalamiento  $\tau(q)$ , el cual se muestra en la Figura 3.21.

El exponente de escalamiento debe ser convexo e incrementa en función de  $q$ .

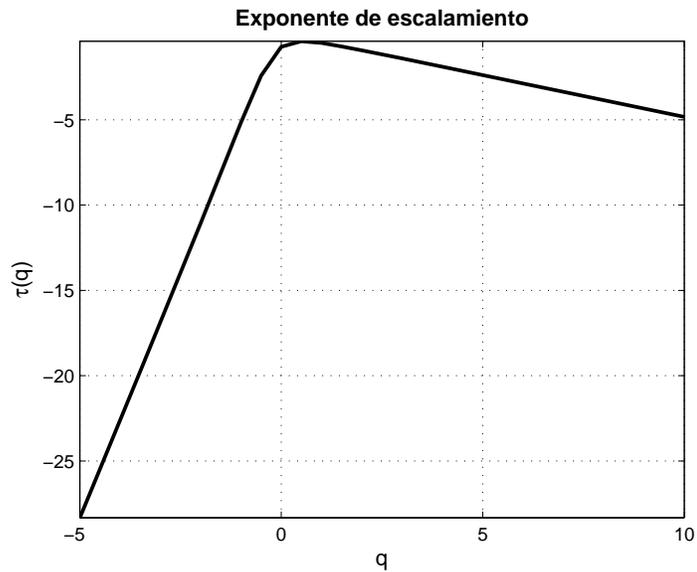


Figura 3.21: Exponente de escalamiento

Nótese que en la Figura 3.21 se evidencia que dicho exponente es una función cóncava más no incrementa en función de  $q$ , hecho que es evidenciado de igual manera en (Herrmann, s.f).

### Cálculo de incertidumbre en el exponente de escalamiento

Nuevamente estamos ante una medida indirecta, más el cálculo de la incertidumbre varía en esta función y es estimado de la siguiente manera: Recordemos que cada curva  $q$  de la función de partición tiene asociado un valor de error característico véase la Figura 3.19 la cual muestra los errores para  $q = 1$ . Una vez hecha esta acotación se procede a:

1. Se transforman los valores de la curva  $q$  de la función de partición  $Z(q, s)$   $\rightarrow \log_2[Z(q, s)]$
2. Al igual que el paso anterior se transforman los valores de cota superior e inferior correspondientes al entorno definido por el error  $\delta Z(q, s)$ . Entiéndase como cota superior a  $Z(q, s) + \delta Z(q, s)$  e inferior como  $Z(q, s) - \delta Z(q, s)$

3. Transformada la medición como su entorno, se determina la recata de mejor ajuste a la medida y consiguientemente a su cota superior e inferior, un ejemplo de este paso se observa en al Figura 3.22.
4. Por último la estimación del error en el exponente de escalamiento es el valor absoluto de la diferencia entre la pendiente de la recta de aproximación a la medición y las pendientes de las cotas respectivamente 3.33.

$$\delta\tau_{ij} = |\tau_i - m_j|. \quad (3.33)$$

En la Figura 3.23 se muestra el exponente de escalamiento y su incertidumbre asociada a partir de la ecuación 3.33.

Para el cálculo de la ecuación (3.33) se diseña el algoritmo 6.

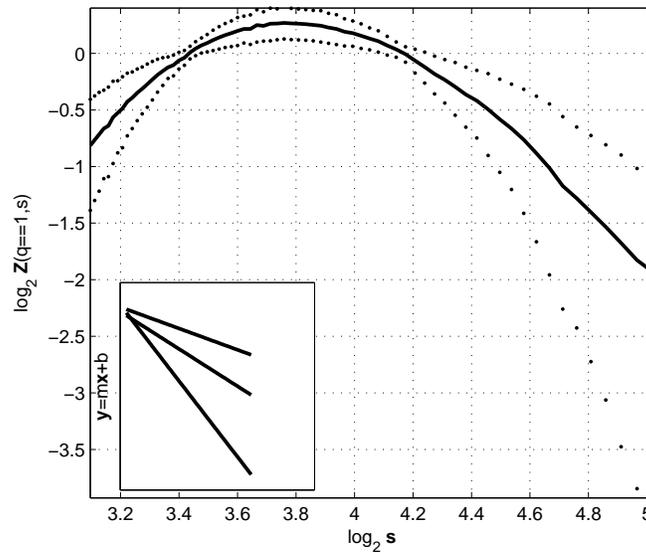


Figura 3.22: Aproximaciones lineales a los errores y a la medición respectivamente. En los ejes mayores se muestra la curva  $q = 1$  de  $\log_2 Z(q, s)$  con sus cotas superior e inferior asociadas a su entorno de certidumbre y en los ejes menores, las aproximaciones lineales correspondientes a dichas cotas y a la medición

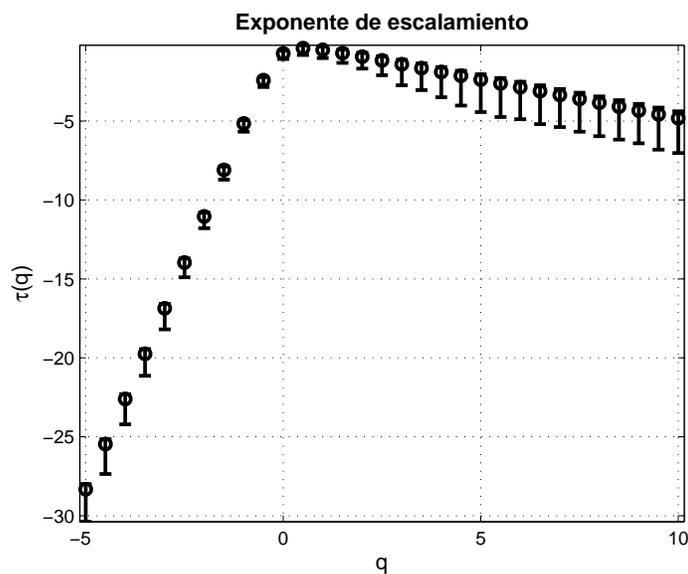


Figura 3.23: Exponente de escalamiento e incertidumbre asociada

---

**Algoritmo 6** Error en el exponente de escalamiento  $\tau(q)$

---

**Entrada:**  $\zeta_{i1}^{inf} = \tau_i - \delta\tau_{i,1}$ ,  $\zeta_{i2}^{sup} = \tau_i - \delta\tau_{i,2}$  y  $\mathbf{s}$

**Salida:**  $\delta\tau_{ij}$

- 1:  $\delta_{ij} = \log_2(\zeta_{ij})$
  - 2:  $[m_{ij}b_{ij}] = \text{polyfit}(\log_2(\mathbf{s}), \delta_{ij}, 1)$
  - 3:  $\delta\tau_{ij} = |\tau_i - m_{i,j}|$
- 

### 3.3.5. Cálculo de el espectro multifractal $D(\alpha)$

Para analizar las propiedades de una señal multifractal es particularmente importante determinar la distribución global de sus singularidades, el espectro multifractal provee una estimación global de las singularidades con diferente regularidad Lipschitz.

El espectro multifractal se obtiene mediante la ecuación (3.12)

$$D(\alpha) = q\alpha - \tau(q).$$

Para calcular el espectro multifractal es necesario estimar el exponente de *Hölder*

$\alpha$ .

### Exponente de Hölder

El exponente de Hölder esta asociado directamente a la regularidad de una función de la siguiente forma:

1. Si  $f$  es discontinua en  $x_0$  entonces  $H(x_0) = 0$ .
2. Si  $f$  es  $C^\infty$  en  $x_0$  entonces  $H(x_0) = +\infty$ .
3. Si  $H(x_0) < 1$  entonces  $f$  no es diferenciable en  $x_0$

### Cálculo numérico del exponente de Hölder

Mediante la ecuación (3.34) es estimado el exponente de Hölder.

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq}. \quad (3.34)$$

Para calcular el operador de derivada se uso el código 7 que se muestra a continuación:

---

#### Algoritmo 7 Derivada numérica de una función

---

**Entrada:**  $f(x)$  y  $x$

**Salida:**  $f(x)'$

- 1:  $l \equiv \text{longitud de } x$
  - 2:  $\Delta x = x_2 - x_1$
  - 3:  $\Delta = \frac{1}{2\Delta x}$
  - 4:  $f'_1 = [-f_3 + 4f_2 - 3f_1]\Delta$
  - 5: **para**  $i = 2$  hasta  $l - 1$  **hacer**
  - 6:    $f_i = [f_{i+1} - f_{i-1}]\Delta$
  - 7: **fin para**
  - 8:  $f'_l = [f_{l-2} - 4 * f_{l-1} + 3 * f_l]\Delta$
- 

Aplicado el algoritmo 7 a  $\tau(q)$  se obtiene  $\alpha$  como se muestra en la Figura 3.24.

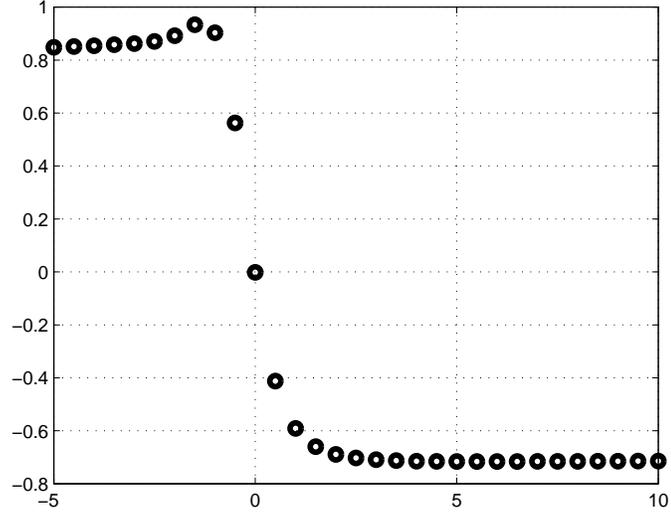


Figura 3.24: Exponente de Hölder

### Cálculo de la incertidumbre en el exponente de Hölder

Al igual que los cálculos anteriores, el exponente de Hölder es una medida indirecta por lo que la incertidumbre es obtenida a partir de la ecuación (3.35)

$$\delta\alpha = \left| \partial_q \frac{\tau(q)}{dq} \right| \delta q. \quad (3.35)$$

### Cálculo numérico de la incertidumbre en el exponente de Hölder

A partir de la ecuación (3.35) y usando el algoritmo 7 se estima la incertidumbre en  $\alpha$  tal y como se muestra en el algoritmo 8.

En la Figura 3.25 se muestra la incertidumbre asociada a  $\alpha(q)$ .

---

#### Algoritmo 8 Incertidumbre de $\alpha(q)$

---

**Entrada:**  $\alpha_i(q)$  y  $q_i$

**Salida:**  $\delta\alpha_i(q)$

- 1: Se aplica el algoritmo 7 con variables de entrada  $\alpha_i(q)$  y  $q$  obteniéndose  $\kappa_i$
  - 2:  $\delta\alpha_i(q) = |\kappa_i| \delta q$
-

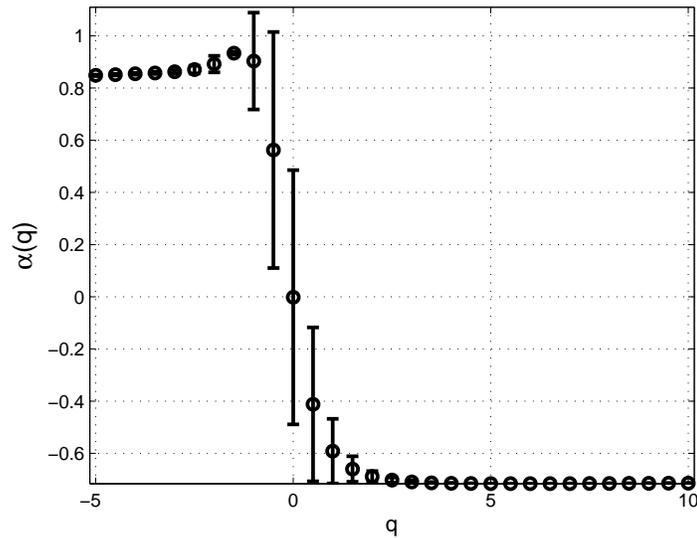


Figura 3.25: Incertidumbre asociada a exponente de Hölder  $\alpha$

### Cálculo numérico del espectro multifractal

Ya definido el exponente de Hölder se cuenta con todas las variables para el cálculo del espectro multifractal o Dimensión de Hausdorff-Besicovich, para dicho cálculo se planteo el algoritmo 9.

---

#### Algoritmo 9 Espectro multifractal

---

**Entrada:**  $\alpha_i(q)$ ,  $q_i$ ,  $\tau_i(q)$

**Salida:**  $Dh_i(q)$

- 1: **para**  $i = 1$  hasta *longitud de q* **hacer**
  - 2:  $Dh_i(q) = q_i \alpha_i - \tau_i(q)$
  - 3: **fin para**
- 

Del algoritmo 9 se genera el espectro multifractal, el cual se observa en la Figura 3.26 junto con la incertidumbre en  $\alpha(q)$ .

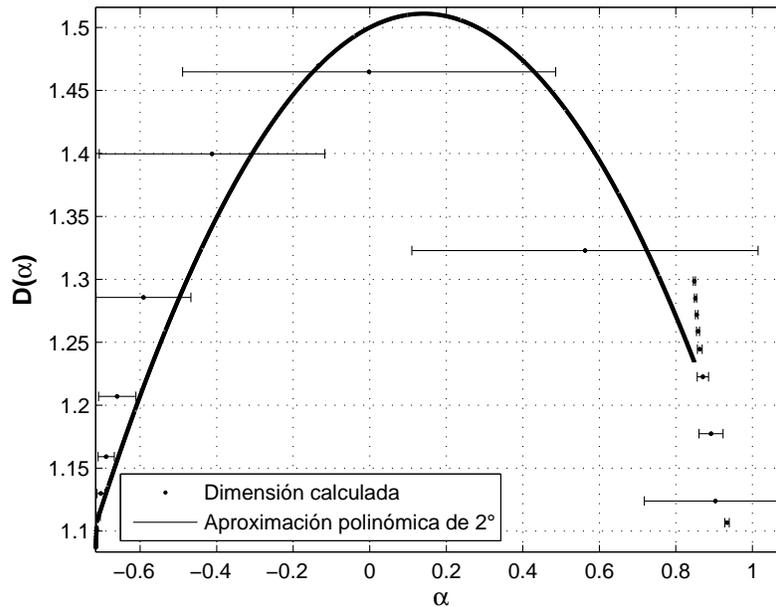


Figura 3.26: Espectro multifractal, en línea continua aproximación polinómica de 2º y valor cálculo en punto con la incertidumbre asociada a  $\alpha$ .

### 3.3.6. Dimensiones generalizadas de Rényi

La naturaleza multifractal de la medida de una variable es caracterizada primeramente por su espectro. Una representación cuantitativa del patrón completo de un fenómeno requiere un número infinito de parámetros. Sin embargo, desde el punto de vista de la aplicación práctica, un modelo multifractal con un número pequeño de parámetros como las dimensiones de Rényi o dimensiones generalizadas puede ser usado (Jiménez, Giráldez y Laguna, 2007).

- $D_0$  es la denominada dimensión de capacidad del soporte geométrico de la medida de una variable.
- $D_1$  es la dimensión fractal de información, la cual proporciona información sobre el grado de heterogeneidad de la medida.
- $D_2$  es la dimensión fractal de correlación y determina la distribución pro-

mediada de la medida.

Las dimensiones de Rényi son calculadas a partir de la ecuación (3.13).

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}.$$

La ecuación (3.13) presenta una indeterminación en  $q = 1$ , por lo que es necesario aplicar la regla de *L'hôpital*, para determinar el valor de  $D_q$  para  $q = 1$ , por lo que su cálculo define mediante la ecuación (3.36):

$$\begin{aligned} D_1 &= \tau'(q) \\ &= \alpha(1). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Numéricamente se presenta el algoritmo 10. Cabe destacar que para las dimensiones generalizadas de Rényi se debe cumplir la condición:

- Si  $q_a > q_b$  entonces  $D(q_a) < D(q_b)$

---

**Algoritmo 10** Dimensiones generalizadas  $D_q$

---

**Entrada:**  $\tau_i(q)$ ,  $\alpha_i$  y  $q_i$ .

**Salida:**  $D_q$

- 1: **para**  $i = 1$  hasta *longitud de q* **hacer**
  - 2:   **si**  $q_i = 1$  **entonces**
  - 3:      $D_i = \alpha_i$
  - 4:   **si no**
  - 5:      $D_i = \frac{\tau_i}{q_i-1}$
  - 6:   **fin si**
  - 7: **fin para**
-

### Estimación de la incertidumbre en las dimensiones generalizadas $D_q$

Nuevamente la medición 3.13 es indirecta, por lo tanto la ecuación (3.37) es usada para la estimación de la incertidumbre.

$$\delta D_q = |\partial_q D_q| \delta q. \quad (3.37)$$

Númericamente se tiene el algoritmo 11 como solución a la ecuación (3.37)

---

**Algoritmo 11** Incertidumbre en las dimensiones generalizadas  $D_q$

---

**Entrada:**  $D_q$  y  $q$ .

**Salida:**  $\delta D_q$

- 1: Se aplica el algoritmo 7 con variables de entrada  $D_q$  y  $q$  obteniéndose  $\gamma_i$
  - 2: **para**  $i = 1$  hasta *longitud de  $q$*  **hacer**
  - 3:    $\delta D_i = |\gamma_i| \delta q$ .
  - 4: **fin para**
- 

Por último se presenta la Figura 3.27, en la cual se observan las dimensiones generalizadas  $D_q$  con su respectiva incertidumbre.

Del algoritmo 10 no se asegura tener valores positivos de dimensiones generalizadas  $D_q$  por lo que es necesario acotarlo en un entorno  $\mathbb{R}^+$  sumando el absoluto del mínimo, si este no es positivo.

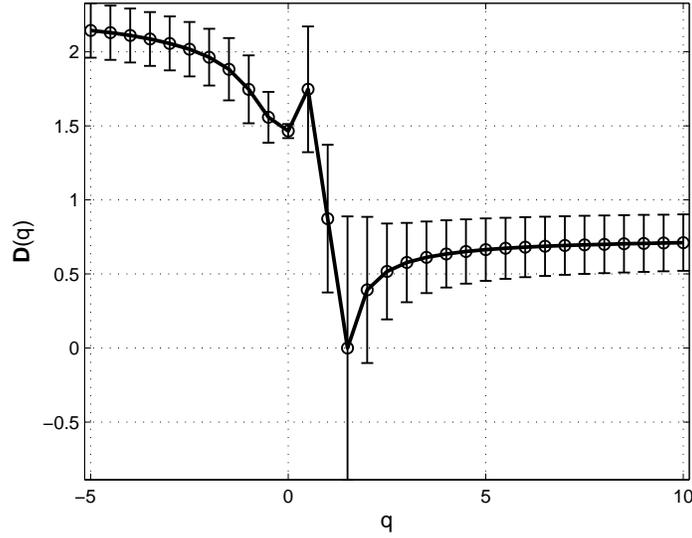


Figura 3.27: Dimensiones generalizadas  $D_q$  y su incertidumbre asociada  $\delta D_q$

### 3.4. Variables de salida

Las variables de salida son catalogadas como atributos, siendo estas, variables que permiten caracterizar un fenómeno. A partir del análisis multifractal es posible extraer de una señal una serie de elementos, que pueden definir el comportamiento de una onda al propagarse por medios de diferentes impedancias acústicas. En esta investigación se tomaron cinco (5) valores característicos definidos mediante el espectro de singularidades y las dimensiones generalizadas.

Al comparar dichos valores se pretende observar la posibilidad de discriminar señales que representen la expresión sísmica de un yacimiento. Estas cinco (5) variables son:

**Ancho del espectro ( $\Omega$ ):** Si  $\omega_a = \min\{D\{[\alpha(q_a)]\}\} \geq 0$  y  $\omega_b = \min\{D\{[\alpha(q_b)]\}\} \geq 0$  tal que  $q_a \neq q_b$  entonces  $\Omega = |w_a - w_b|$ .

**Hölder píco ( $\Lambda$ ):** Si  $D\{[\alpha(q_p)]\} = \max\{D\{[\alpha(q_i)]\}\}$  entonces  $\Lambda = \alpha(q_p)$ .

**Dimensión de correlación ( $\chi_0$ ):** Corresponde al valor de la dimensión generalizada para  $q = 0$ , entonces  $\chi_0 = D_0$ .

**Dimensión de información ( $\chi_1$ ):** Corresponde al valor de la dimensión generalizada para  $q = 1$ , entonces  $\chi_1 = D_1$ .

**Dimensión de capacidad ( $\chi_2$ ):** Corresponde al valor de la dimensión generalizada para  $q = 2$ , entonces  $\chi_2 = D_2$ .

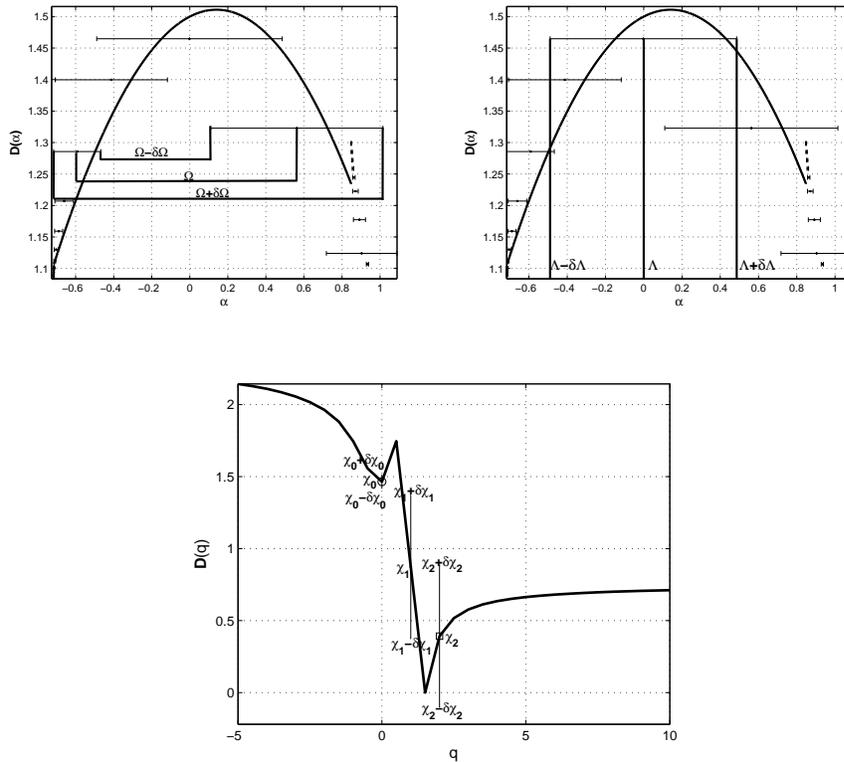


Figura 3.28: Elementos catalogados como atributos en el espectro multifractal y dimensiones generalizadas

## Capítulo IV

### RESULTADOS Y ANÁLISIS

El presente capítulo tiene la finalidad de presentar los resultados obtenidos de la investigación, que mostraron mayor relevancia para la misma. Dichos resultados son analizados con el fin de establecer, los fundamentos para desarrollar opciones de solución al problema que se plantea.

El análisis de resultados esta estructurado por cinco secciones:

- Fundamentación teórica de la herramienta matemática multifractal con los principios físicos de la sísmica de prospección.
- Evaluación del análisis multifractal en modelos teóricos que emulan características de yacimientos ( $\mathbf{V}_p$  y  $\rho$ ).
- Evaluación del análisis multifractal en datos sísmicos sintéticos cuyo contenido de fluidos es validado.
- Evaluación del análisis multifractal en datos sísmicos reales cuyo contenido de fluidos ya sea validado.
- Evaluación del análisis multifractal en una roca con saturaciones variantes de gas y agua (sustitución de fluidos).

Seguidamente se desarrollan las secciones nombradas anteriormente:

## **4.1. Fundamentación teórica de la herramienta matemática multifractal con los principios físicos de la sísmica de prospección**

Con el fin de establecer la relación entre el análisis multifractal y la sísmica de reflexión, se ha realizado el análisis sistemático de los trabajos y contribuciones de Felix J. Herrmann (Herrmann, s.f),(Herrmann, 2000),(Herrmann y Kane, 2002),(Dupuis, 2005) y (Unser y Blu, 2000), de forma tal que se pueda establecer un cimiento matemático del silogismo que conlleva a la relación entre el modelado sísmico, las singularidades y por último el análisis multifractal.

### **4.1.1. Introducción**

El subsuelo de la tierra consiste en disposiciones de diferentes materiales separados por interfaces, estas zonas son denominadas también transiciones, dichas transiciones son características de las regiones en las cuales ocurren variaciones rápidas de las propiedades acústicas en comparación con la escala de la ondícula sísmica.

Dichas variaciones bruscas en las propiedades acústicas del subsuelo forman transiciones y estas a su vez bordes en el medio los cuales ocasionan reflexiones de las ondas mecánicas junto con los diferentes fenómenos de propagación , dichos datos son captados en superficie y conforman las trazas sísmica las cuales posterior al procesamiento solo contara de reflexiones. Estas trazas sísmicas contienen información sobre las relaciones geométricas entre los límites del subsuelo y en algunos casos, características litológicas que normalmente son usadas para construir modelos geológicos con el fin de explicar el origen de las características estratigráficas. Numéricamente estas transiciones en el subsuelo tradicionalmente han sido modeladas como una discontinuidad de orden cero (0), mas actualmente Herrmann en

sus contribuciones en el análisis multiescala de datos de pozo y datos sísmicos de reflexión a partir de ondículas (Herrmann, s.f) ha establecido que el subsuelo tiene un comportamiento multifractal, lo que significa que es un medio constituido por singularidades de orden variable, dejando atrás el modelo de discontinuidades de orden cero (función Heaviside).

#### 4.1.2. Modelado de las transiciones sísmicas

Los cambios repentinos en las propiedades elásticas del subsuelo dentro de la longitud de onda de la ondícula sísmica crean singularidades y hacen que las ondas mecánicas se reflejen entre otros fenómenos, estas singularidades ocurren en la transición entre materiales y típicamente son modeladas por discontinuidades de orden cero (discontinuidades tipo paso), sin embargo estudios recientes han demostrado que el subsuelo a nivel de singularidades está constituido por acumulaciones de singularidades de diferentes órdenes de magnitud, generándose discontinuidades de cualquier orden fraccional.

#### Modelo matemático de las reflexiones sísmicas

Las transiciones en el subsuelo son modeladas como discontinuidades de orden cero mas dicho concepto es extendido a discontinuidades de cualquier orden fraccionario, modelado por splines fraccionarios causales y anti-causales (también llamados “fractional onset function”) y son definidas de la siguiente forma:

$$\chi_+^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\chi_-^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0, \\ \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

donde  $\Gamma$  es la función Gamma definida como:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

El exponente  $\alpha$  caracteriza al spline fraccional de la siguiente forma:

- $\alpha \geq 1$  la función  $f$  es diferenciable.
- $0 > \alpha < 1$  la función  $f$  es no-diferenciable pero se mantiene continua.
- $-1 < \alpha \leq 0$  es discontinua y por ende no diferenciable.
- $\alpha \leq -1$  la función  $f$  deja de ser localmente integrables y se convierten en una distribución temperada.

Los splines fraccionarios causales y anti-causales están asociados mediante la relación 4.4

$$\forall x \in \mathbb{R}, \chi_-^\alpha(x) = \chi_+^\alpha(-x). \quad (4.4)$$

Matemáticamente el exponente fraccionario  $\alpha$  especifica la regularidad del spline fraccional, que a su vez coincide con su exponente de **Lipschitz**. Cada uno de los spline fraccionarios es Lipschitz  $\alpha$  de acuerdo a la definición (2.34).

La selección de splines fraccionarios es motivado a su regularidad e invariancia en escala, por lo que se puede caracterizar la aspereza de una transición independientemente de la escala

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ y } \forall \alpha \geq 0, \sigma > 0, \chi_{\pm}^{\alpha}(\sigma x) = \sigma^{\alpha} \chi_{\pm}^{\alpha}(x).$$

Cada una de estas funciones posee un orden de singularidad  $\alpha$  en particular, como se ha destacado anteriormente. Para  $\alpha \geq 1$  en  $t_i$  la función  $\chi_{\pm}^{\alpha}(t)$  es  $\alpha$  veces diferenciable y posee una singularidad en  $t_i$  con exponente de Lipschitz  $\alpha$ . Sin embargo cuando  $\alpha < 1$  en  $t_i$  la función  $\chi_{\pm}^{\alpha}(t)$  es no diferenciable en  $t_i$  y  $\alpha$  caracteriza este tipo de singularidad.

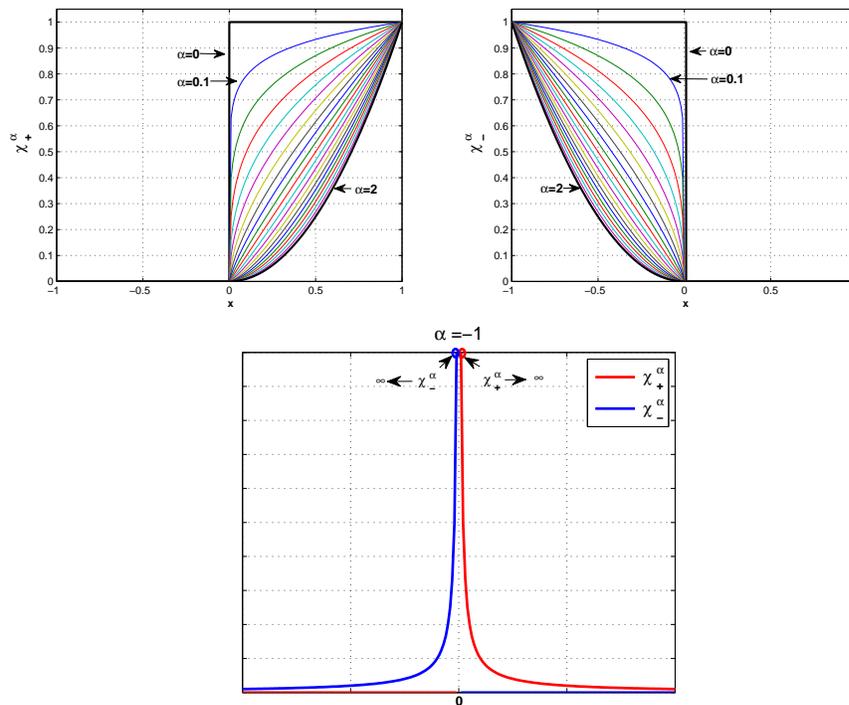


Figura 4.1: En las Figuras superiores se muestran los splines fraccionarios causales y anti-causales respectivamente en un intervalo  $0 \leq \alpha \leq 2$  y en el recuadro inferior se muestra el comportamiento del spline fraccional con  $\alpha = -1$

### 4.1.3. Transiciones y reflectividad

Los modelos 1D del subsuelo  $f(z)$  representan las transiciones del mismo y son definidos a partir de superposiciones de splines fraccionarios como se muestra en la ecuación (4.5).

$$f(z) = \sum_i a_i \chi_{\pm}^{\alpha_i}(z - z_i), \quad (4.5)$$

donde  $z$  corresponde a la profundidad y  $z_i$  la profundidad de la  $i$ -ésima transición en el subsuelo, derivando  $f(z)$  se obtiene la reflectividad sísmica  $r$  dando la relación (4.6).

$$r(z) = \sum_{i \in \Lambda_c} K_i \chi_+^{\alpha-1}(z - z_i) - \sum_{i \in \Lambda_a} K_i \chi_-^{\alpha-1}(z - z_i), \quad (4.6)$$

donde

$$K_i = \frac{\alpha_i a_i \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\alpha + 1)},$$

$\Lambda_c$  y  $\Lambda_a$  son el conjunto de índices para las transiciones con discontinuidades causales y anti-causales respectivamente.

En la Figura 4.2 se muestra una ejemplificación de modelos 1D, aplicada en la presente investigación, tomando como modelo matemático un spline fraccional de orden cero (0), lo que implica una singularidad tipo paso.

## Modelado de la traza sísmica

La señal sísmica se puede obtener mediante la relación (4.7).

$$s(z) \propto (r \star \psi_z)(z), \quad (4.7)$$

donde  $r$  es la conversión tiempo a profundidad de la serie de reflectividad y  $\psi_z$  es la conversión a profundidad de la ondículasísmica. Debido a que el interés está basado en las propiedades de singularidad de la señal sísmica se puede simplificar la notación y omitir la constante de proporcionalidad, por lo que se tendría que la señal  $s(z)$  es obtenida mediante la ecuación (4.8),

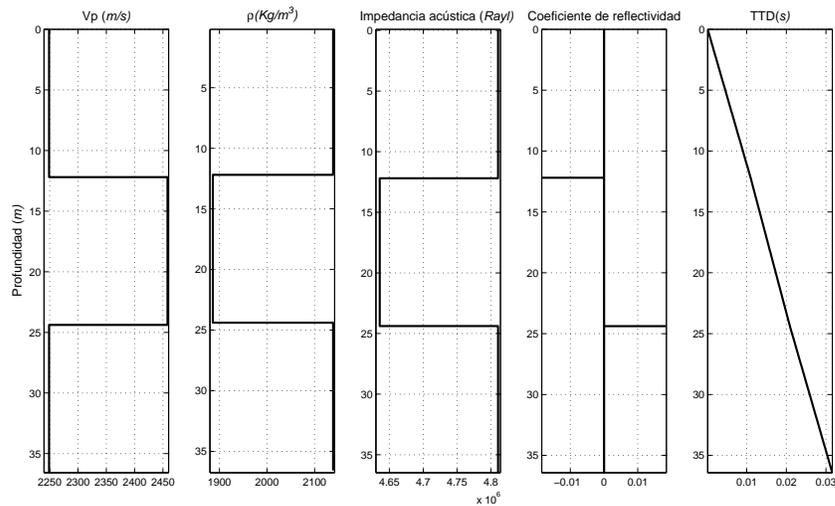


Figura 4.2: Modelo 1D de tres capas del subsuelo (lutita, arena con gas y lutita) utilizado en la presente investigación, como se observa las propiedades de velocidad de onda p, densidad e impedancia acústica son modelados por splines fraccionales de orden cero (0).

$$\begin{aligned}
s(z) &= (r \star \psi)(z) \\
&= \sum_{i \in \Lambda_c} K_i \chi_+^{\alpha_i - 1}(z - z_i) \star \psi(z) - \sum_{i \in \Lambda_a} K_i \chi_-^{\alpha_i - 1}(z - z_i) \star \psi(z). \quad (4.8)
\end{aligned}$$

## Desarrollo del análisis multiescala hasta el análisis de singularidades globales

Retomando algunas ideas expresadas en los marcos metodológicos y teóricos se tiene que considerando una ondícula madre  $\psi$ , donde  $\psi$  es una función normalizada en  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  con promedio cero para la cual se puede crear una familia de ondículas mediante traslaciones y dilataciones tal como se muestra en la ecuación (2.25).

A partir de esta base de ondículas se computan los coeficientes ondícula mediante el producto interno de  $f$  y cada elemento de dicha base como se muestra en la ecuación (4.9).

$$T_\psi[f](u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle. \quad (4.9)$$

Al aplicar la transformada ondícula se debe recordar que la misma es un operador diferencial multiescala cuyos valores al converger, se relacionan con la regularidad de la señal  $f$ , esta aseveración se puede comprobar a partir de los teoremas 3, 4 y 5, cuyas pruebas y relaciones más detalladas pueden encontrarse en este documento.

En consecuencia estos teoremas demuestran que la regularidad local **Lipschitz** de  $f$  en un punto  $t_i$  depende de la tasa de decaimiento a escalas finas de  $|T_\psi[f](u, s)|$  en la vecindad de  $t_i$  y dicho decaimiento es controlado por los máximos locales, como se ha indicado anteriormente.

Seguidamente se tiene que el espectro multifractal o espectro de singularidades permite estimar una proporción de la regularidad Lipschitz  $\alpha$  para cada escala  $s$ . El hecho de tener un valor de singularidad para cada  $s$  es catalogado como un análisis local, cuya estructura respeta la siguiente relación 4.10.

$$\log(|Wf(u, s)|) \leq \log(A) + \alpha \log(s), \quad (4.10)$$

donde  $A$  es una constante positiva, en la Figura 4.3 se observa como la transformada ondícula módulo máximo converge en cualquier punto, esta propiedad muestra que el subsuelo posee un comportamiento multifractal.

Este método de análisis local es apropiado para funciones con singularidades

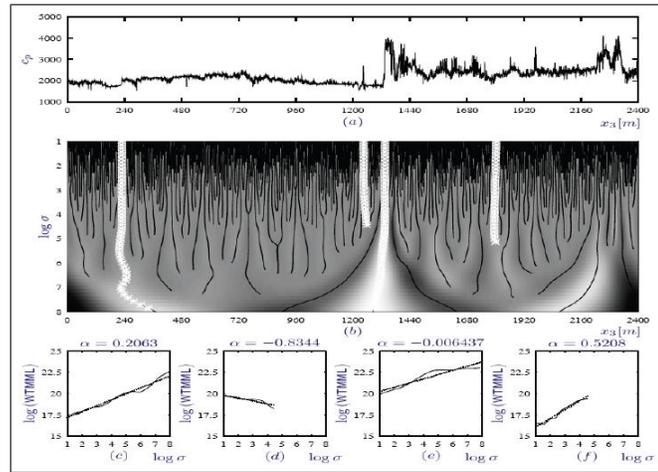


Figura 4.3: Tomada de (Herrmann, 2000), se muestra un ejemplo del análisis local de un registro sísmico de pozo, en la Figura (a) se muestra el registro sísmico, (b) es la transformada ondícula módulo máximo del registro anterior, por último en las Figuras (c)-(f), se estima el exponente de *Hölder* local.

aisladas por su carácter local, sin embargo para funciones con singularidades acumulativas (como es el caso de datos sísmicos), es difícil detectar y caracterizar las singularidades usando el análisis local, por lo que se propone un análisis global.

El análisis global ofrece una estimación para el espectro de singularidades que

provee una “tasa de ocurrencia” de una singularidad en particular  $\alpha$ , por lo que  $D(\alpha)$  y  $\tau(\mathbf{q})$  contiene información global de la diferenciabilidad de una señal  $f$ .

## 4.2. Evaluación del análisis multifractal en modelos teóricos que emulan características de yacimientos ( $V_p$ y $\rho$ ).

Los modelos teóricos propuestos en el capítulo III, están constituidos por fluidos característicos de un yacimiento, de forma tal que se pretende evaluar el par de variables que permitan mediante un gráfico cruzado, discriminar estos fluidos y así señalar ciertas características propias de las señales que representan la respuesta sísmica de estos yacimientos, resaltadas por los atributos estimados.

De estos gráficos cruzados (diez (10) en su totalidad) serán analizados los que cumplan el principal objetivo de discriminar los fluidos.

En la Figura 4.4 se observa el gráfico cruzado producto del par de variables  $\Omega$  y  $\Lambda$  junto con los espectros de singularidad y dimensiones generalizadas de Rényi.

Dicho par de variables son propias del espectro de singularidad ya que retomando las variables de salida del capítulo III se tiene que  $\omega$  es el ancho del espectro y  $\lambda$  es el valor del exponente de Hölder pico. A partir de este atributo podemos separar la población de los nueve (9) modelos propuestos en tres (3) conjuntos. El primer conjunto conformado por los modelos (2,3,6 y 7), (1 y 4) conforman el segundo conjunto y el tercer y último conjunto está constituido por los modelos (9,8,5) (véase la Figura 4.5).

El primer conjunto está caracterizado por los menores valores de  $\Omega$  y  $\Lambda$ , el segundo conjunto valores intermedios ( $\approx(1,6;0,4)$ ) y el tercer conjunto se caracteriza por los valores de mayor magnitud de dicho par de variables en el plano  $(\Omega, \Lambda)$ .

El primer indicador ( $\Omega$ ) mide el grado de multifractalidad de la señal, un alto valor de  $\Omega$  indica que la señal posee irregularidades con valores de exponente de Hölder  $\alpha$  muy distintos (espectro ancho), un valor bajo de este índice indica que

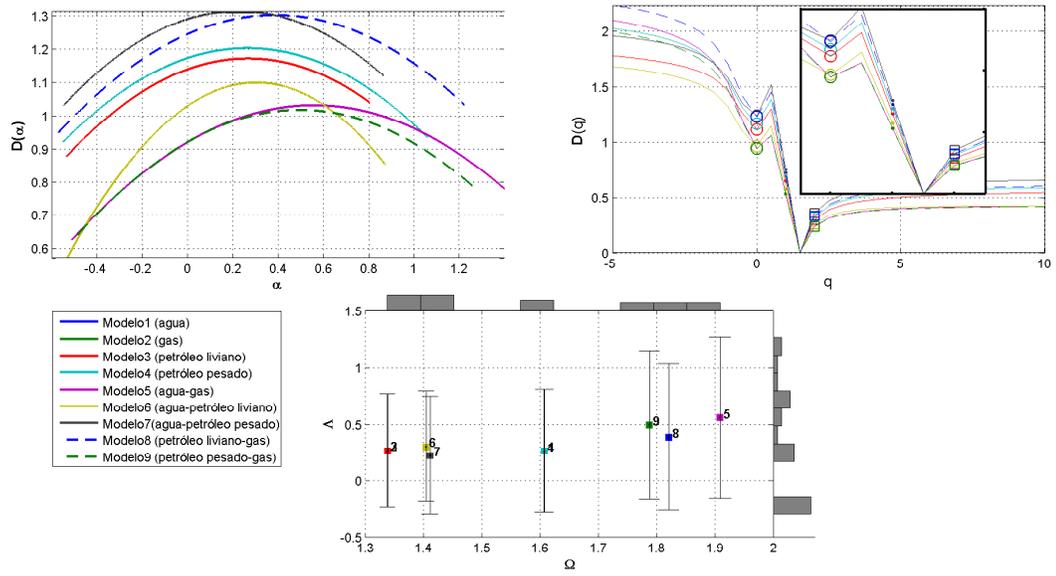


Figura 4.4: Atributo  $\Omega$

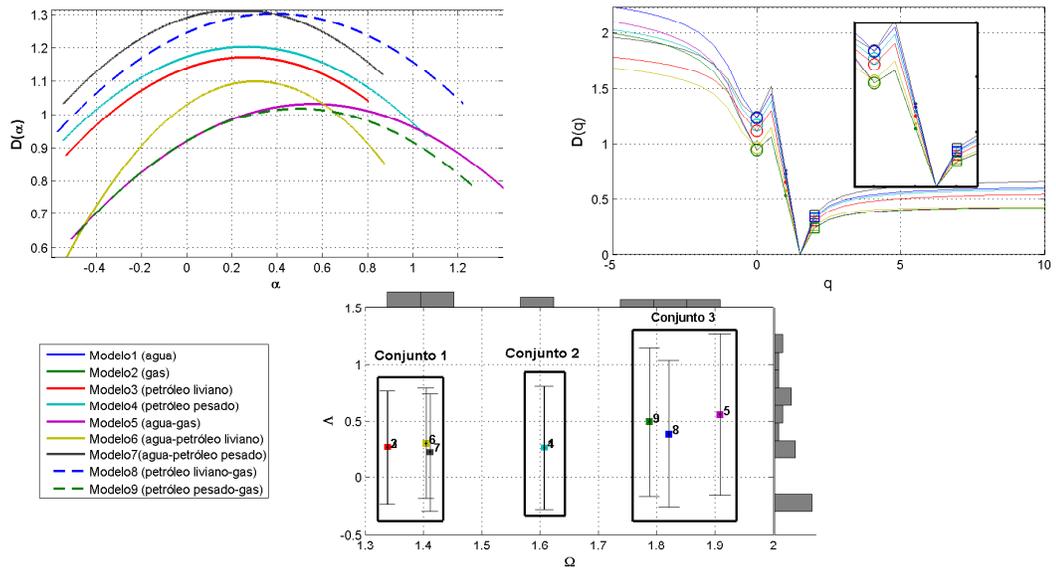


Figura 4.5: Atributo  $\Omega$  y los conjuntos asociados

las irregularidades de la señal poseen exponentes de *Hölder*  $\alpha$  similares (espectro estrecho), el segundo indicador ( $\Lambda$ ) mide el valor de regularidad predominante, un valor cercano a cero indica una señal muy irregular, con fluctuaciones muy abruptas.

tas, un alto valor de este corresponde a señales con irregularidades más suaves (Leonarduzzi, Schlottauer y Torres, 2005).

El hecho de que el conjunto 1 este caracterizado por los valores más cercanos a cero de la variable  $\Lambda$  indica que las señales que representan estos modelos poseen mayor irregularidad que los otros conjuntos.

El conjunto 1 presenta variaciones más abruptas, nótese que en este conjunto se encuentra el modelo 2 el cual imita las características de un yacimiento gasífero, ya que la traza de este modelo es una señal de alta energía, esta consta de transeptos de mayor energía que los que conforman a los conjuntos 2 y 3.

En el conjunto 2 es imposible distinguir los fluidos agua y petróleo pesado lo cual es una particularidad muy común en la prospección sísmica ya que la impedancia de ambos modelos es prácticamente de igual valor numérico por lo tanto sus singularidades y comportamiento multirracial es indiferenciable. En comparación a el conjunto 1 este presenta menos energía asociada a los transeptos mas el ancho de sus espectro es mayor indicando que esta constituido un soporte de singularidades más amplio.

En el conjunto 3 se constituye por singularidades de diferentes órdenes por lo que su soporte de singularidades es mayor al resto de los conjuntos. Nótese que en estos modelos el factor común es la presencia de gas cuyo transepto genera una respuesta de alta energía brindándole a este conjunto una mayor “variabilidad” de exponentes  $\alpha$  en comparación a los otros conjuntos.

El atributo  $\Omega\Lambda$  logra diferenciar los modelos en su mayoría conservando cierta incertidumbre en lo que respecta a fluidos como agua y petróleo pesado. Sin embargo de acuerdo al interés energético que en las empresas de E&P representa cada modelo de respuesta sísmica de fluidos, el atributo  $\Omega\Lambda$  puede separar tres (3) zonas que coinciden con los conjuntos respectivamente.

La zona 1 equivalente al conjunto 1 y la zona 3 equivalente al conjunto 3, son zonas de bajo riesgo, ya que los fluidos cuya respuesta sísmica imitan son hidrocarburos, la zona 2 presenta gran riesgo ya que no se es capas de diferenciar agua

de petróleo pesado.

En la Figura 4.6 se observa el atributo  $\Omega\chi_2$  el cual es capaz de aislar los modelos al igual que el atributo  $\Omega\Lambda$ .

El atributo  $\Omega\chi_2$  comparte la variable  $\Omega$  con el atributo  $\Omega\Lambda$  por lo que mantiene invariante el comportamiento con respecto a esta variable. Ahora bien la variable  $\chi_2$  representa la dimensión fractal de correlación donde esta está relacionada con la distribución promedio de la medida.

En el plano  $\Omega\chi_2$  se observa como existe una mayor dispersión vertical de los modelos de forma tal que se puedan separar en los mismos tres (3) conjuntos en los que se separo el atributo anterior mas dicha dispersión propia de la variable  $\chi_2$  genera menos incertidumbre para discriminar los modelos junto con las mismas “privaciones ” que presenta el atributo  $\Omega\Lambda$  ya que nuevamente no se puede diferenciar entre agua y petróleo pesado.

En cuanto al riesgo asociado a este atributo es de menor grado que el presente en el atributo  $\Omega\Lambda$  ya que en este se aprovecha la dispersión vertical junto con los

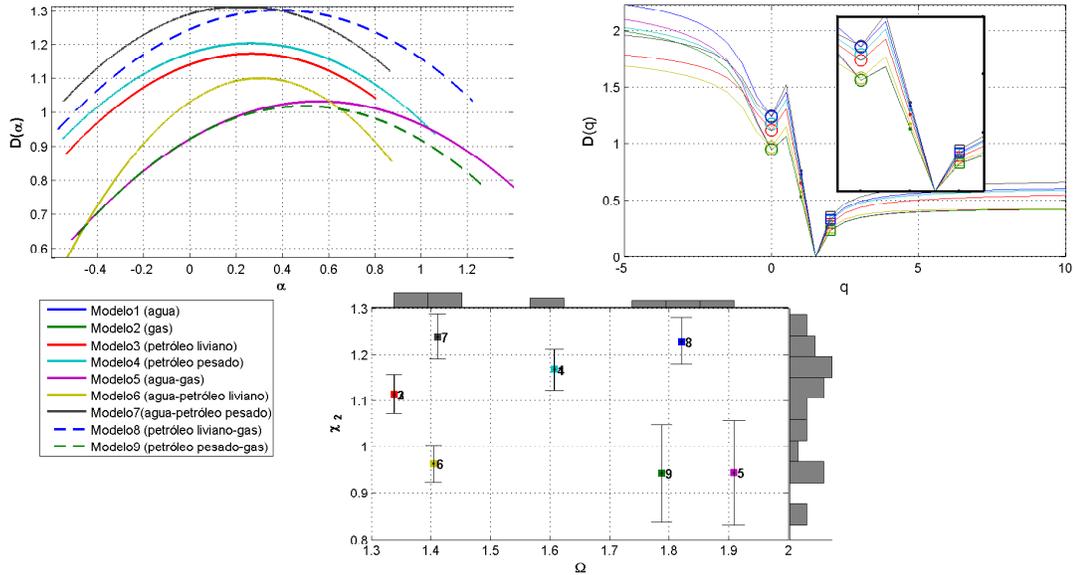


Figura 4.6: Atributo  $\Omega\chi_2$

intervalos de incertidumbre que permiten discriminar los modelos de forma más real, evitando interpretaciones sofistas.

Por ultimo se muestra en la Figura 4.7 el último atributo capas de diferenciar con cierto grado de incertidumbre los modelos de fluidos de yacimiento.

El atributo  $\chi_1\chi_2$  comparte la variable  $\chi_2$  con el atributo anterior ( $\Omega\chi_2$ ) por lo que no existe variación en la dispersión vertical. En este nuevo atributo se combina la variable  $\chi_1$  denominada dimensión fractal de información a y ha de proporcionar información con respecto al grado de heterogeneidad de la medida.

En el atributo  $\chi_1\chi_2$  se observa como la incertidumbre para cada modelo muestra un soporte más amplio generando así polígonos de posibles valores para los modelos, por lo que si dichos polígonos se interceptan como es el caso de este atributo se genera un área de incertidumbre con respecto a la discriminación del par de modelos cuyas áreas se intercepten, debido a esta condición se genera un coeficiente relativo de discriminación el cual es estimado como el cociente entre el área de intersección que comparte un par de modelos y el área resultante de la

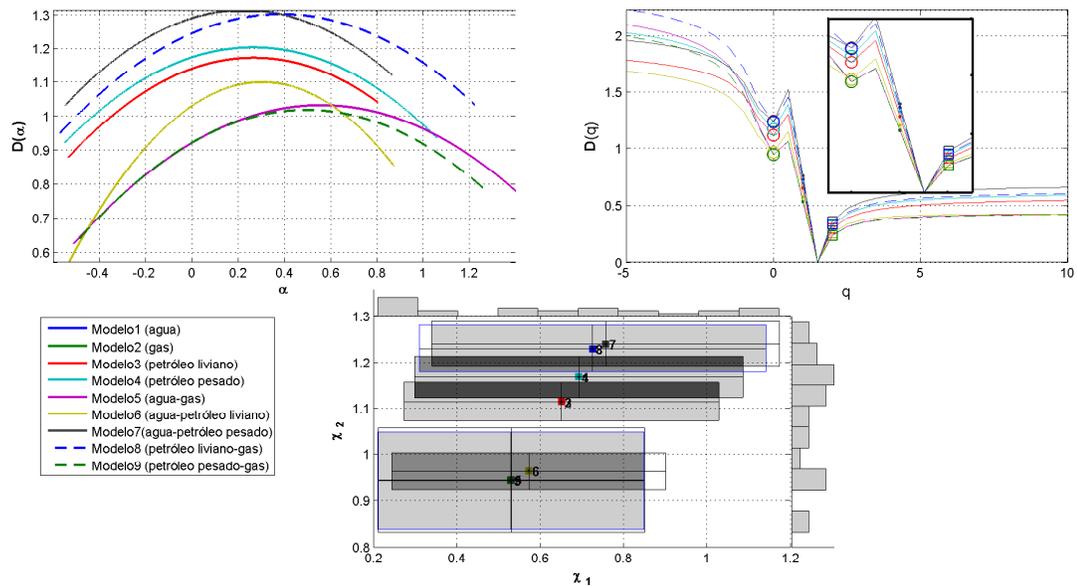


Figura 4.7: Atributo  $\chi_1\chi_2$

unión de los polígonos que representen a dichos modelos.

En la Figura 4.8 se muestra el valor de dicho coeficiente de discriminación, nótese que si se tiene un modelo A y un modelo B interceptados, el coeficiente AB no será igual al coeficiente BA debido a que si  $A \subset B$ , entonces el área de A es menor a la de B por lo que el área de intersección tendrá un valor equivalente a el área total de A y por ende A no se podría diferenciar de B mas como A representa solo una fracción del área de B este último si podrá diferenciarse de A en cierta magnitud.

Esta apreciación se ve referenciada en la Figura 4.8 con el hecho de que no es simétrica la matriz de coeficientes.

Retomando el atributo  $\chi_1\chi_2$  para su descripción se se para en tres (3) conjuntos. El conjunto 1 conformado por los modelos (9,5 y 6), el conjunto 2 por (2,3 y una fracción de 4 y 1) y el conjunto 3 constituido por los modelos (8, 7 y fracción de 4 y 1) (véase la Figura 4.9).

El conjunto 1 se caracteriza por poseer una medida más homogénea en comparación a los otros conjuntos, dicha homogeneidad permite que la medida esta

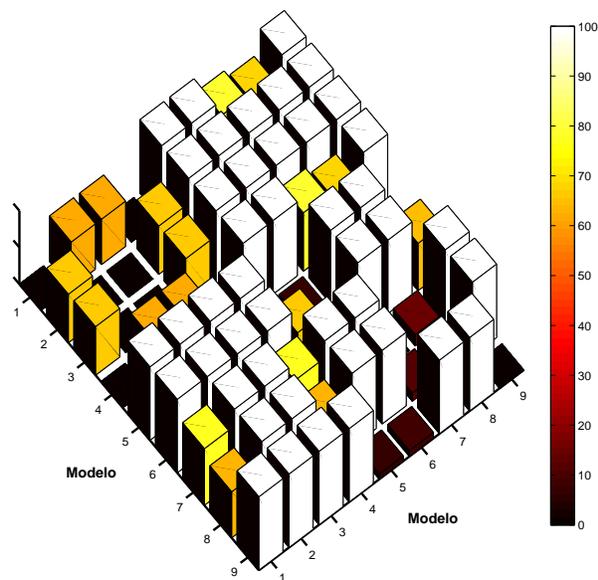


Figura 4.8: Matriz de coeficientes relativos de discriminación del atributo  $\chi_1\chi_2$

distribuida de forma más regular ya que en estos modelos comparten prácticamente la misma distribución de energía asociada a los transeptos.

El conjunto 2 presenta intermedios tanto en homogeneidad como en la distribución de la medida. Nuevamente se produce el fenómeno característico de la capacidad nula para discriminar agua de petróleo pesado.

Por último el conjunto 3 esta caracterizado por poseer una medida más heterogénea por lo tanto irregular, esta irregularidad genera una distribución de medida más “rica”.

En cuanto al riesgo asociado a estos conjuntos de acuerdo a la línea de análisis de lo que catalogamos como “riesgo”. El conjunto 1 es el único conformado por modelos que emulan la respuesta sísmica de hidrocarburos, mientras que los conjuntos 2 y 3 son de alto riesgo ya que comparte una fracción de la incertidumbre entre agua y petróleo pesado.

En la Tabla 4.1 se observa de mejor forma la idea anterior:

A lo largo de este análisis se ha señalado a la energía asociada a los transeptos

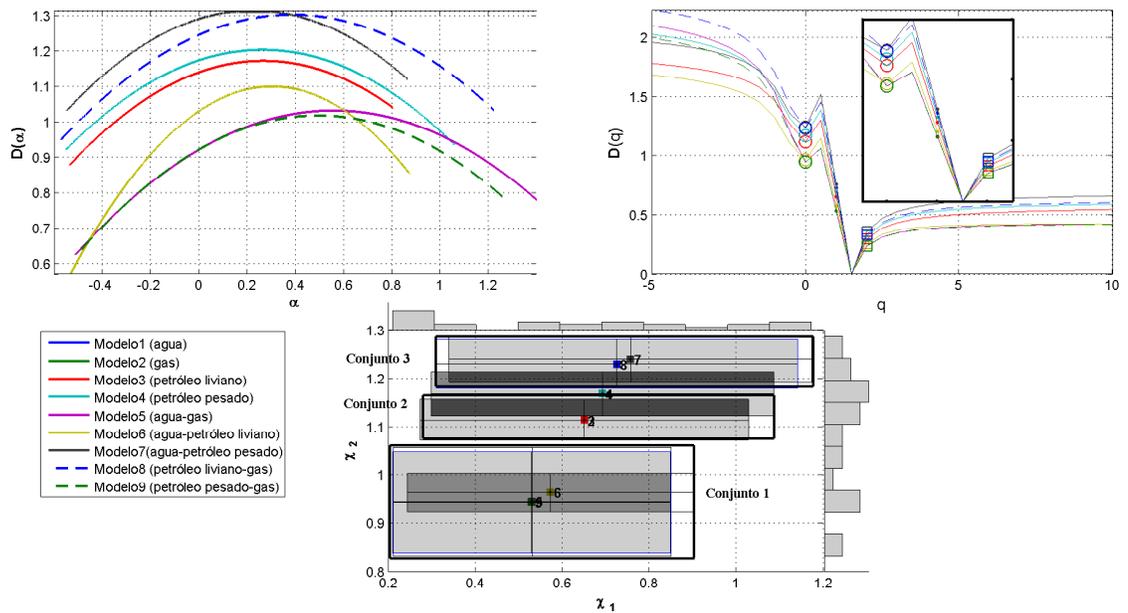


Figura 4.9: Atributo  $\chi_1\chi_2$  y sus conjuntos asociados

Tabla 4.1: Riesgos asociados a la discriminación de fluidos

	Modelos	Fluidos	Riesgo
Zona 1	2-3-6-7	gas, petróleo liviano, agua-petróleo liviano, agua-petróleo pesado	Bajo
Zona 2	1-4	agua, petróleo pesado	Alto
Zona 3	9-8-5	petróleo pesado-gas, petróleo liviano-gas, agua-gas	bajo

refiriéndose a la amplitud de la respuesta sísmica generada por la diferencia de propiedades acústicas en el medio, de forma tal que para evidenciar dicho sustento del análisis se muestra la Figura 4.10 caracterizando la energía en falso color.

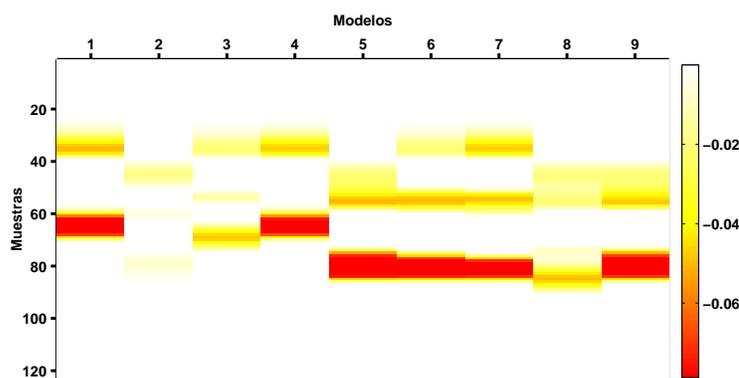


Figura 4.10: Energía asociada a los transeptos de cada modelo teórico

### 4.3. Evaluación del análisis multifractal en datos sísmicos sintéticos cuyo contenido de fluidos es validado

En esta sección se pretende estudiar el espectro de singularidad de los sismogramas sintéticos obtenidos de los pozos 1 y 2, de los cuales el pozo 1 resulto producto de gas mientras que el pozo 2 no evidencio hidrocarburo alguno.

La traza de gas por su naturaleza de ser una señal de alta energía debe tener un comportamiento singular de mayor orden que la traza del pozo 2, cabe la salvedad que este grado de singularidad se evidencia en su valor de *Hölder* pico, mas la tasa

de ocurrencia de singularidades se señala en el ancho del espectro cuantificando el grado de multifractalidad.

Este grado de multifractalidad estaría asociado a los distintos órdenes de singularidad que conforman la señal y no a la magnitud de la misma.

De acuerdo a las presunciones teóricas descritas anteriormente se muestra el espectro de singularidades del pozo 1 y 2 Figura 4.11.

Como era de esperarse el sismograma sintético del pozo 1 presenta un *Hölder* pico más cercano a cero por lo que la señal es más singular. Hecho que es explicado por la variación abrupta de las propiedades acústicas del medio en presencia de fluidos como el gas.

La tasa de ocurrencia de singularidades en el pozo 2 es mayor al pozo 1 por lo que este ocupa una dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch mayor por lo que la señal del pozo 2 presenta una cantidad mayor de singularidades mas no de órdenes superiores que las singularidades encontradas en el pozo 1.

A partir de esto se puede establecer que el ancho y dimensión fractal estarían asociadas a la tasa de ocurrencia de transiciones en el medio por ende es directamente vinculable a la homogeneidad del ambiente deposicional más esta aseveración

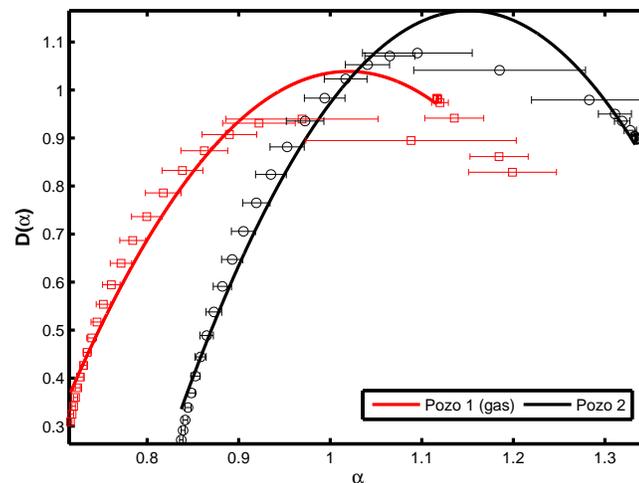


Figura 4.11: Espectros de singularidad de los sismogramas sintéticos del pozo 1 y el pozo 2

no es concluyente.

Los anchos de los espectros de ambos sismogramas sintéticos son aproximadamente iguales por lo que según la hipótesis anterior representan una cantidad de singularidades similares ya que el soporte es similar mas sus *Hölder* pico los diferencia, permitiendo separar un simograma que representa una respuesta de sísmica de rocas saturadas de gas de un simigrama sin presencia alguna de fluidos.

En la Figura 4.12 se muestran los cambios en impedancias acústicas de los cuales se asocian las singularidades, nótese que la energía reflejada por los transeptos en el sismograma del pozo 1 son de mayor magnitud que los presentes en el pozo 2. Brindando así un sustento de la justificación del análisis de las características multifractales de los sismogramas sintéticos.

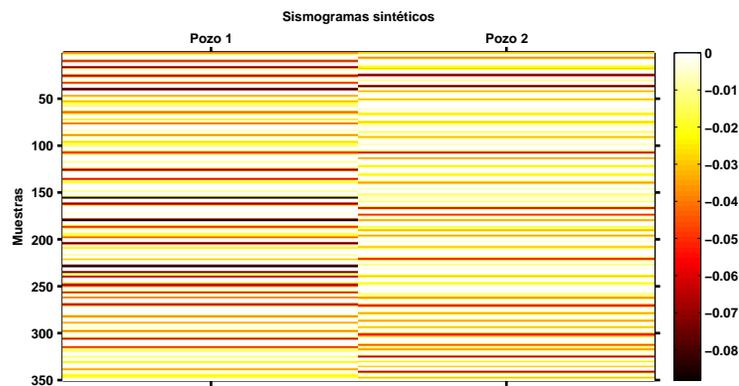


Figura 4.12: Energía asociada a los transeptos de los sismogramas sintéticos del pozo 1 y el pozo 2

#### 4.4. Evaluación del análisis multifractal en datos sísmicos reales cuyo contenido de fluidos ya sea validado

Al analizar los datos reales se tiene especial interés en seguir las características de regularidad de las señales de forma tal que se pueda observar alguna distribución característica.

Con el móvil de caracterizar el comportamiento multifractal de las señales analizadas se estudia el atributo  $\Omega\Lambda$  que ha lo largo de la investigación a brindado los mejores resultados.

De forma tal que definido el atributo con el cual analizar las señales, es necesario limitar el volumen de datos analizar por motivos numéricos se restringe el estudio a nueve (9) trazas distribuidas aleatoriamente.

En la Figura 4.13 se muestra la posición geométrica de las trazas seleccionadas para el análisis.

Durante el análisis de los datos reales, se evidencio cierta peculiaridad numérica

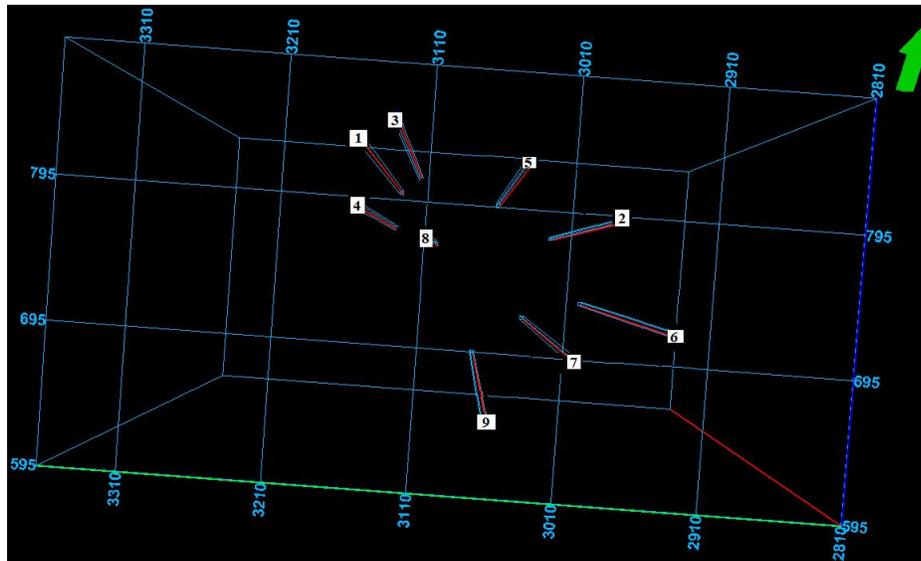


Figura 4.13: Posición geométrica de las trazas a analizar

en relación a las escalas a utilizar para la transformada ondícula modulo máximo esta peculiaridad se le hace referencia en la literatura (Herrmann, s.f) y se basa en

el hecho de que la sísmica es de banda limitada por lo que en un volumen sísmico el soporte de las frecuencias es compacto de cero (0) a cien (100) (Mavko, Mukerji y Dvorkin, 1998) aproximadamente, mas el contenido espectral de cada traza es diferente.

Señalada esta característica se observo de forma empírica como las escalas seleccionadas deben presentar un alto contenido de energía referenciado en la transformada ondícula, de forma tal que el exponente de escalamiento sea una función cóncava y por ende su transformada de Legendre se invertible.

Retomando el interés en el análisis de datos reales en la Figura 4.14 se observa el atributo  $\Omega\Lambda$  y los tres (3) conjuntos en los cuales se subdividen al compartir características de regularidad.

Al momento de aislar las nueve (9) trazas en los tres (3) conjuntos se hace especial

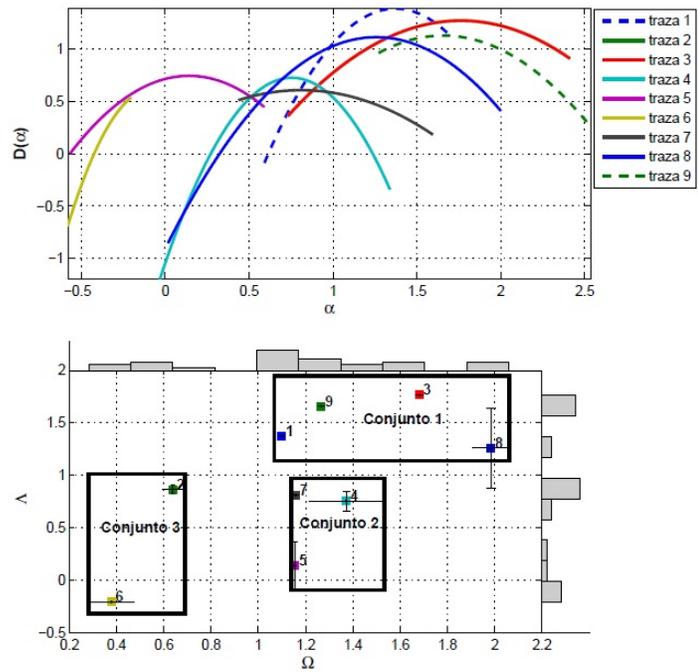


Figura 4.14: Atributo  $\Omega\Lambda$  y los tres (3) conjuntos en los que se subdividieron las trazas analizadas

seguimiento a las trazas uno (1) y dos (2) ya que estas representan la respuesta sísmica del subsuelo en los puntos donde se ubican los pozos 1 y 2 respectivamen-

te y como se ha hecho saber el contenido de fluidos de estos es conocido, nótese que en la Figura 4.15 se señalan las trazas 1 y 2 para las cuales es evidente las anomalías de amplitud en la traza 1 mas dichas anomalías desaparecen hacia la traza 2.

De forma tal que el las trazas asociadas al conjunto 1 presentan características multiractales en común las cuales relacionaremos al el fluido propio en la traza uno (1). En el conjunto 3 se encuentra la traza dos (2) por lo tanto asociaremos a este conjunto el comportamiento de dicha traza y la presencia poca o nula de hidrocarburos, por último el conjunto 2 es el conjunto de mayor incertidumbre ya que no se tiene control alguno de la presencia o no de fluidos, en el medio cuya respuesta sísmica representan las trazas que conforman el mismo.

Tomando en consideración las ideas anteriores es necesario un elemento que de sustento a la interpretación que se le da a estos conjuntos, para ello se calcula una serie de atributos tales como Fuerza de reflexión, Amplitud Rms y Amplitud original, para los cuales se puede observar una anomalías de amplitud las cuales

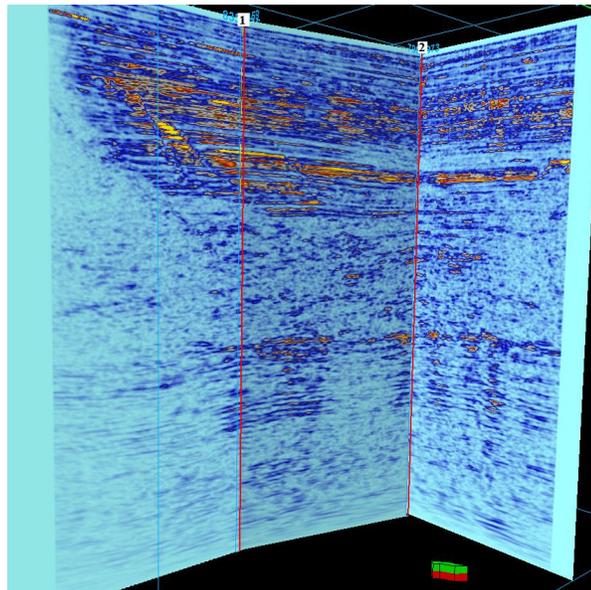


Figura 4.15: Anomalías de amplitud resaltadas por el atributo de fuerza de reflexión en las trazas 1 y 2 junto con una sección entre pozos para el seguimiento de las anomalías entre los pozos

asociamos a presencia de gas, efecto evidente en la anomalía presente en las intermediaciones de la traza 1 4.16.

Haciendo seguimiento a las anomalías de amplitud se puede observar como el conjunto 1 presenta las anomalías de mayor magnitud, el conjunto 2 esta conformado por las trazas que no evidencian anomalía alguna y la zona de mayor incertidumbre la cual esta conformada por el conjunto 3 muestra una ligera anomalía de amplitud de la cual no se puede inferir mayor información con respecto a los fluidos que esta pueda o no representar.

Por consiguiente es posible proponer tres (3) áreas de estudio a partir de la posible presencia de gas, dicha propuesta encuentra sustento tanto en el análisis multifractal de las señales como en la respuesta de amplitud resaltada por la serie de atributos antes mencionados.

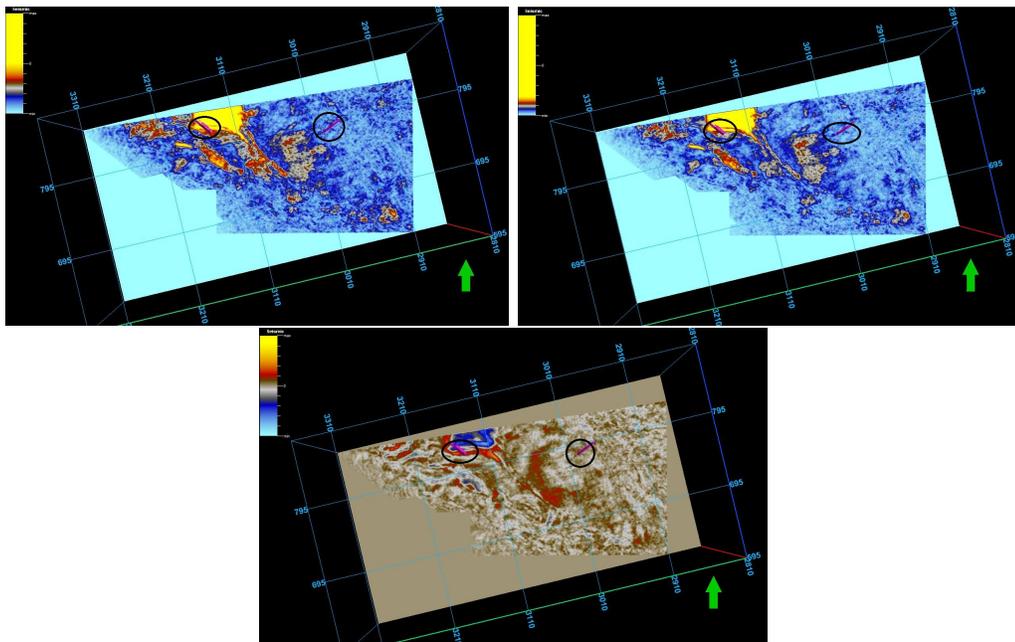


Figura 4.16: Atributos sísmicos de: Amplitud RMS (izquierda), Fuerza de reflexión (derecha) y Amplitud original (abajo)

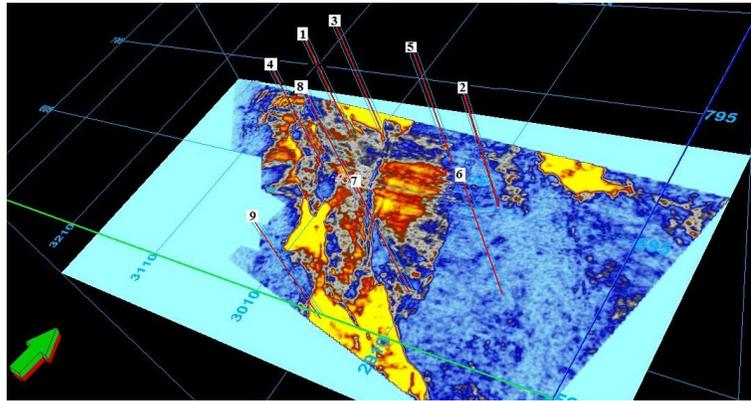


Figura 4.17: Atributo Fuerza de reflexión

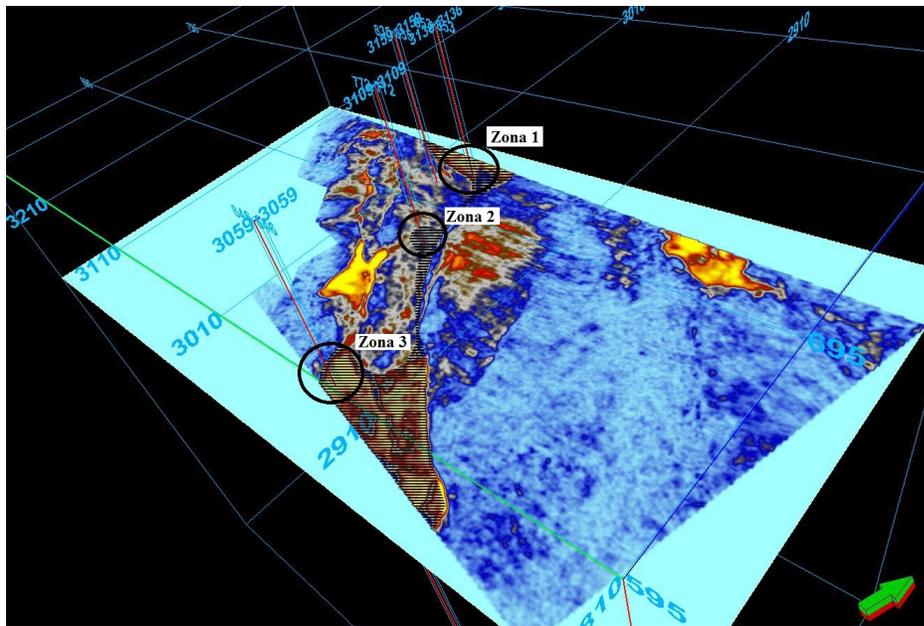


Figura 4.18: Zonas de interés propuestas, asociado a la presencia de gas

#### 4.5. Evaluación del análisis multifractal en una roca con saturaciones variantes de gas y agua (sustitución de fluidos).

Un simple análisis AVO no es capaz de identificar litología o fluidos, para ello esta técnica es respaldada por transformaciones de reflectividad a litología (Lithology Reflectivity Transform) y transformaciones de fluidos a reflectividad (Pore-fluid

Reflectivity Transform) con el fin de predecir amplitudes de reflexión de reservorios saturados de gas.

Se ha demostrado que el análisis AVO no es capaz de distinguir zonas con poca saturación de gas de zonas con una saturación económicamente rentable al presentarse cambios en la porosidad, cementación y litología o si las arcillas sufren cambios de rigidez.

Para respaldar esta aseveración se muestra un ejemplo presentado por Hilterman en (Hilterman,Zhou y Haitao, 2008), con el cual se demuestra como un simple análisis AVO no es capaz de diferenciar entre rocas saturadas parcial o totalmente de gas. En la Figura 4.19 se muestra el ejemplo antes mencionado.

Una vez señalada una de las principales carencias del análisis AVO como herramienta aislada de análisis es evidente el interés de la presente investigación es describir el comportamiento del analisis multifractal en rocas con saturaciones variantes de gas.

Para ello se hace uso del conjunto de datos obtenidos mediante la sustitución de fluidos señalada en el capítulo III. Analizado este conjunto de datos (11 sismogramas sintéticos) se generan los diez atributos correspondientes a la combinación de las variables de salida, en la Figura 4.20 se muestra uno de los atributos como lo es el Atributo  $\Omega\Lambda$ .

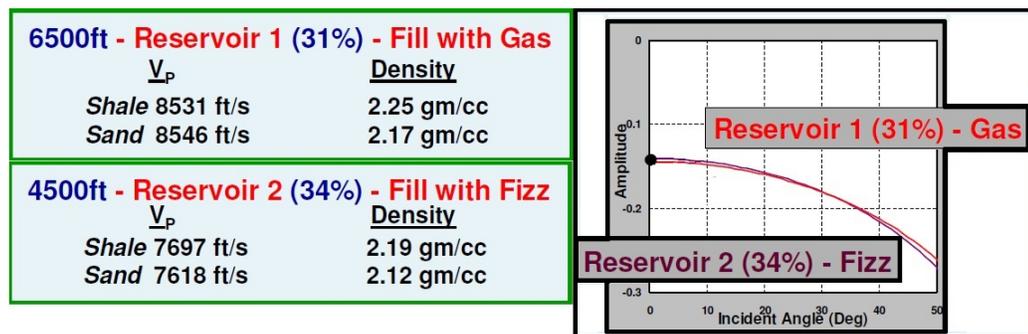


Figura 4.19: Ejemplo modificado de (Hilterman,Zhou y Haitao, 2008), con el cual se muestra la poca capacidad del análisis AVO para discriminar saturaciones de gas.

Como se observa en la Figura 4.20 el atributo  $\Omega\Lambda$  no es capaz de diferenciar los sismogramas sintéticos, hecho que comparten los otros nueve (9) atributos, por lo que a priori el análisis multifractal de las señales al igual que el análisis AVO no son capaces de diferenciar rocas con variaciones de saturación de fluidos, en la Figura 4.21 se observa el coeficiente de discriminación relativo el cual como era de esperarse es prácticamente cero.

Mas el ejercicio que se lleva acabo tiene como primer elemento el sismograma sintético de una roca saturada con agua y el último de estos es una roca saturada con gas, por lo que surge la pregunta, ¿no se esta diferenciando entre agua y gas, mas en el ejercicio de modelos teóricos si se logro diferenciar estos fluidos, que justifica este comportamiento?

Para dar respuesta a esta interrogante primero se debe hacer énfasis en que todos estos modelos presentan la misma energía en sus transeptos como se evidencia en la Figura 4.22 esto es porque la impedancia acústica de la arena cuya saturación se varia es prácticamente la misma y aunado a esto la relación entre la impedancia acústica entre una arena saturada de agua y una de gas en los modelos teóricos

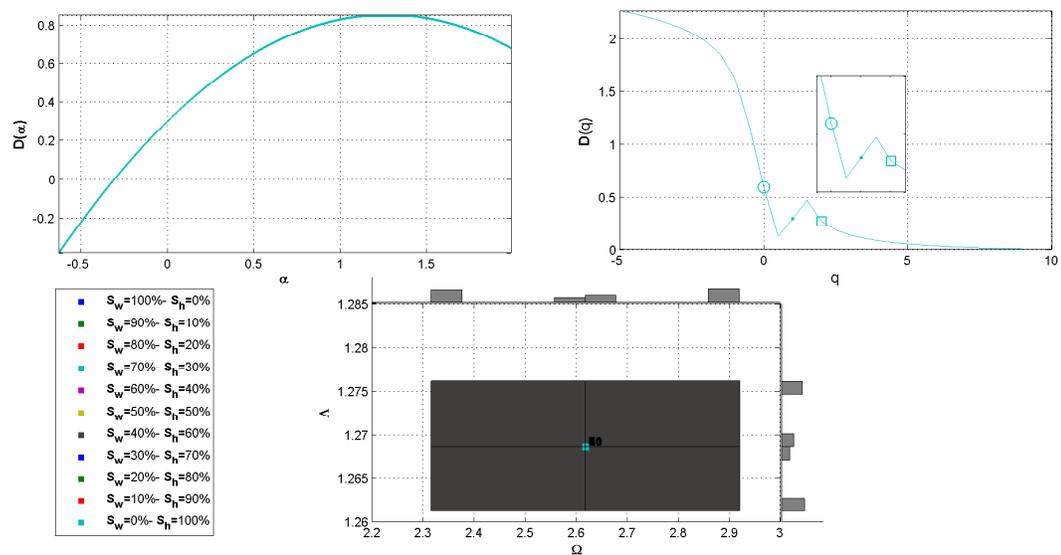


Figura 4.20: Atributo  $\Omega\Lambda$  de los sismogramas sintéticos obtenidos mediante la sustitución de fluidos.

es de 0,1320; mientras que mediante la sustitución de fluidos es de 0,034; como se muestra en la tabla 4.2, por lo que se evidencia que en los modelos teóricos hay una diferencia mucho mayor entre las respuestas sísmicas del agua y gas que en los modelos propuestos por la sustitución de fluidos.

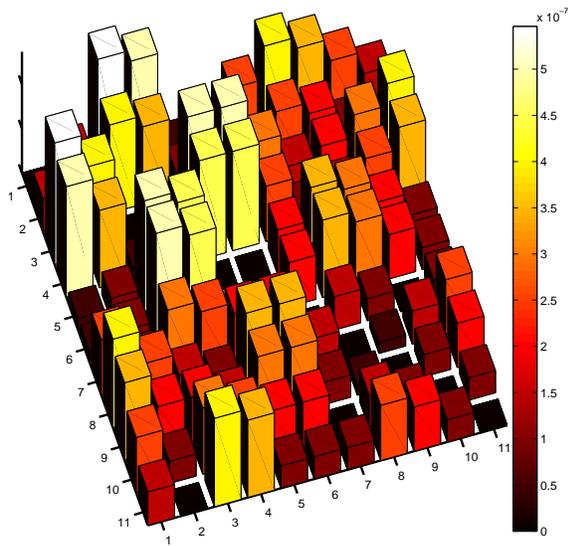


Figura 4.21: Coeficiente de discriminación relativo para el atributo  $\Omega\Lambda$

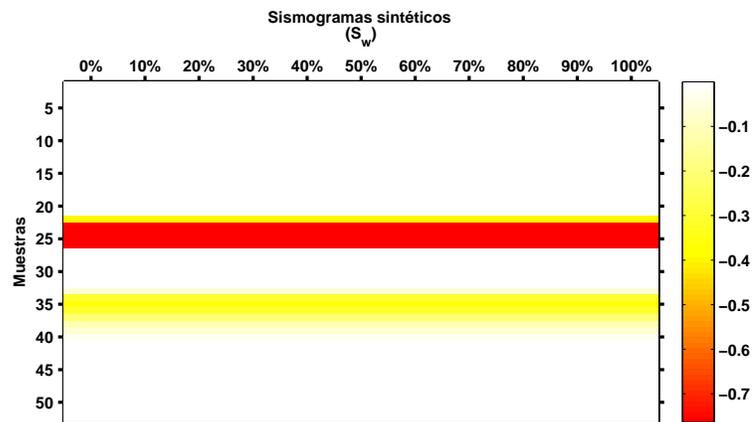


Figura 4.22: Energía asociada a los transeptos de los modelos de la sustitución de fluidos, como se observa es prácticamente la misma para cada modelo

De las evidencias anteriores se propone que bajo las condiciones iniciales del ejercicio planteado el análisis multifractal no es capaz de diferenciar los modelos propuestos con variaciones de saturación de agua y gas, por lo que posiblemente comparta la limitante que presenta el análisis AVO para diferenciar rocas con saturaciones distintas de fluido.

Haciendo énfasis en la idea propuesta anteriormente respecto a que bajo las condiciones iniciales para el problema de sustitución de fluidos el análisis multifractal comparte la limitante de no poder discriminar las distintas saturaciones de gas. Nótese que la variable que domina la sustitución de fluidos en el ejercicio particular es la porosidad ya que, mientras menor espacio poral, menor efecto del fluido en la respuesta sísmica se vera evidenciado. Identificada la variable porosidad como elemento dominante en la sustitución de fluidos se pretende estudiar, las porosidades teóricas de los arreglos cuya porosidad sea mayor a 20 Para una porosidad de 47,6 % el atributo  $\Omega\Lambda$  muestra como es capaz de diferenciar los gas de los modelos en los cuales su saturación varia hasta el agua, dicho comportamiento se puede observar en la Figura 4.23. El comportamiento de estos conjuntos en el mapa  $\Omega\Lambda$  conserva la lógica de análisis que se ha seguido, en la cual se presenta la traza de gas con un comportamiento más irregular (*Hölder* pico más cercano a cero).

Tabla 4.2: Relación entre las impedancias acústicas de los modelos teóricos y sustitución de fluidos

	Modelos Teóricos	Sustitución de fluidos
	Impedancia acústica (Rayl)	
Agua	6046322	$1,3348 \times 10^7$
Gas	4635788	$1,2459 \times 10^7$
Relación $\left(\frac{I_{agua}-I_{gas}}{I_{agua}+I_{gas}}\right)$	0,1320	0,0344

Tabla 4.3: Porosidad según el tipo de empaquetamiento

Tipo de empaquetamiento	$\Phi$ (%)
Cúbico	47,6
Ortorrómbico	39,54

En los modelos con porosidad 39,5% nuevamente se usa como herramienta de análisis, el Atributo  $\Omega\Lambda$ , para el cual la intención de diferenciar los modelos de diferentes saturaciones se lleva acabo con mayor capacidad. En la Figura 4.24 se muestra el Atributo  $\Omega\Lambda$  con el cual se pueden diferenciar dos conjuntos los que presentan saturaciones de agua mayores a 80% y los que presentan saturaciones de agua de 0 a 70%. De las tres porosidades estudiadas (20-47,6 y 39,5%) se

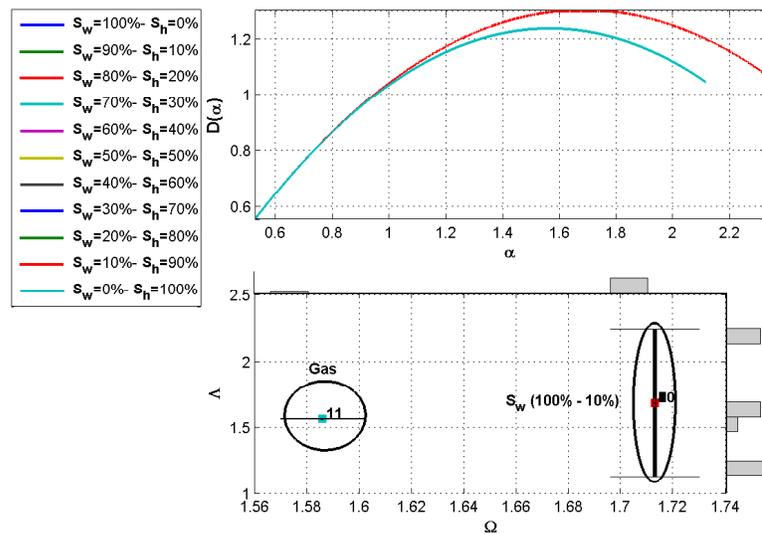


Figura 4.23: Atributo  $\Omega\Lambda$  en modelos con porosidad de 47,6%

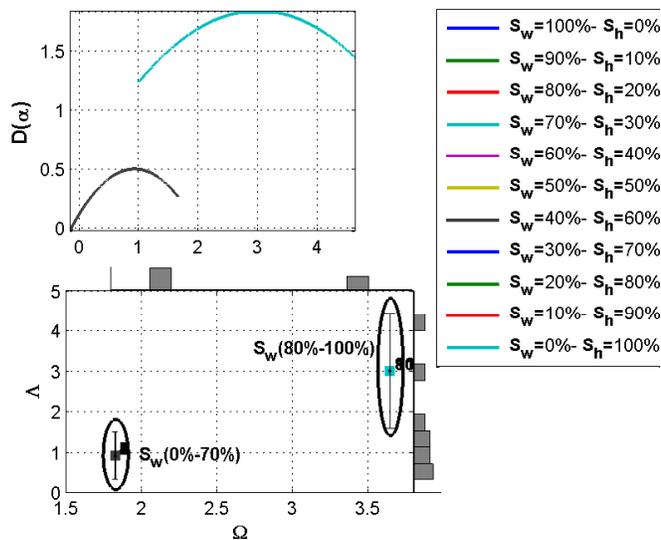


Figura 4.24: Atributo  $\Omega\Lambda$  en modelos con porosidad de 39,5%

observa como a partir de las condiciones iniciales para el problema de sustitución de fluidos el análisis multifractal presenta mayor interés en la discriminación de los modelos con porosidades de 39,5% ya que bajo estas condiciones el análisis multifractal es capaz de diferenciar en cierto rango las diferentes saturaciones de fluidos.

## Capítulo V

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Para comodidad del lector las conclusiones y recomendaciones de la siguiente investigación están enmarcadas de acuerdo a los objetivos específicos de la misma.

#### 5.1. Fundamentación teórica de la herramienta matemática multifractal con los principios físicos de la sísmica de prospección

##### Conclusiones

- El subsuelo tiene un comportamiento multifractal lo que significa que es un medio constituido por singularidades de orden variable.
- Matemáticamente el exponente  $\alpha$  caracteriza la regularidad del spline fraccionario que a su vez coincide con el exponente de Lipschitz.
- La regularidad local Lipschitz de  $f$  en un punto  $t_i$  depende de la tasa de decaimiento a escalas finas de  $T_\psi[f](u, s)$  en la vecindad de  $t_i$  y dicho decaimiento es controlado por los máximos locales.
- $\mathbf{D}(\alpha)$  y  $\tau(\alpha)$  contienen información global de la diferenciabilidad de la señal  $f$ .

## Recomendaciones

- Un modelo más realista del subsuelo se construye a partir de splines fraccionarios causales y anticausales.

### 5.2. Evaluación del análisis multifractal en modelos teóricos que emulan características de yacimientos ( $V_p$ y $\rho$ ).

## Conclusiones

- El atributo  $\Omega\Lambda$  (Ancho del espectro Vs *Hölder* pico) es la herramienta más eficiente del análisis multifractal de modelos teóricos que imitan la respuesta sísmica de fluidos de yacimiento.
- El análisis multifractal no es capaz de diferenciar agua y petróleo pesado mediante ningún atributo estimado.
- El atributo  $\Omega\Lambda$  logra diferenciar los modelos teóricos en su mayoría considerando cierta incertidumbre en lo que respecta a fluidos como agua y petróleo pesado. Sin embargo de acuerdo al interés energético que presentan estos fluidos para las empresas de E&P se asocian estos modelos en tres (3) zonas en función del riesgo que estas representan en la toma de decisiones.
- El atributo  $\Omega\chi_2$  (Ancho del espectro Vs Dimensión de capacidad) presenta un rango de discriminación de mayor magnitud que el atributo  $\Omega\Lambda$  debido a la dispersión vertical, permitiendo agrupar nuevamente en tres (3) conjuntos conservando las limitantes del atributo anterior.

### **5.3. Evaluación del análisis multifractal en datos sísmicos sintéticos cuyo contenido de fluidos es validado**

#### **Conclusiones**

- El sismograma sintético que presenta contenido de gas (Pozo 1) por su naturaleza es una señal de alta energía que presenta una regularidad menor que la evidenciada en el sismograma del pozo 2.
- Los anchos de los espectros de ambos sismogramas son muy similares representando un soporte de singularidades equivalentes, mas el *Hölder* pico es capaz de diferenciar ambos sismogramas.

### **5.4. Evaluación del análisis multifractal en datos sísmicos reales cuyo contenido de fluidos ya es validado**

#### **Conclusiones**

- A partir del atributo  $\Omega\Lambda$  las señales tomadas del cubo sísmico se agrupan en tres (3) conjuntos que comparten las mismas características multifractales. De forma tal que el conjunto 1 esta asociado a la presencia de gas, el conjunto 2 no presenta indicios de presencia de gas y el conjunto 3 es el de mayor incertidumbre ya que no existe un elemento que permita afirmar presencia o no de fluidos. De esa forma se proponen tres (3) zonas de estudio las cuales se ven sustentadas por las anomalías de amplitud resaltadas por el atributo fuerza de reflexión.
- Se observó de forma empírica como las escalas seleccionadas para el análisis deben presentar un alto valor de energía referenciado en la transformada ondícula permitiendo así que el exponente de escalamiento sea una función cóncava y por ende su transformada de Legendre sea invertible.

## Recomendaciones

- Numéricamente se presentan problemas en el análisis multifractal al seleccionar las escalas para el análisis ondícula, por lo que se recomienda evaluar las escalas en las que la señal tiene un alto valor referenciado en la transformada ondícula.

### 5.5. Evaluación del análisis multifractal en una roca con saturaciones variantes de gas y agua (sustitución de fluidos).

## Conclusiones

- A priori el análisis multifractal presenta las mismas limitantes que el análisis AVO. En el ejercicio de sustitución de fluidos con las condiciones iniciales de la Tabla 3.2 aunado a esto no se logra diferenciar agua de gas debido al contraste de impedancias acústicas mas el análisis multifractal puede optimizarse con el objetivo de solventar este problema.
- Variando la porosidad a 47,6 % (porosidad máxima teórica de un empaquetamiento cubico) se logra diferenciar gas de agua.
- Con una porosidad de 39,5 % (porosidad máxima teórica de un empaquetamiento ortorrómbico) se logra separar dos (2) grupos de 0-70 % de saturación de agua y de 80-100

## Recomendaciones

- La discriminación de saturaciones a partir del análisis multifractal no presenta un comportamiento lineal en relación a la porosidad, por lo que se propone la continuación del estudio en este tipo de problemas de forma tal de establecer resultados más concluyentes.

## Bibliografía

- Arneodo A. Audit B., Bacry B., Manneville S.y Roux G.(1988).Thermodynamics of fractal signals based on wavelet analysis application to fully developed turbulence data and DNA sequences.Physica A,24-45.
- Barcellos A.(s.f).The fractal geometry of Mandelbort .
- Belmonte R.(2006).Sistema de reconocimiento de personas mediante su patrón de iris basado en la transformada wavelet.Trabajo especial de grado no publicado.Universidad Politécnica de Madrid.
- Bickel J., R. Gibson y D. McVay.(2006).Decision Analysis Society 2006 practice award submission. WesternGeco: Uses decision analysis to communicate the value of seismic surveys to potential client.
- Castagna, J.y S., Sun.,(2006).Comparision of spectral descomposition method. First break,75.
- de Vicente Majúa Julio I.(2008).Medidas de información, incertidumbre y entrelazamiento en Mecánica cuántica.Universidad Carlos III de Madrid.
- Dopkin, D. y J., Wang.,(2008).Seismic-driven reservoir characterization.Hart Energy Publishing,1-2.
- Dupuis C.(2005).Seismic singularity characterization with redundant dictionaries.The University of British Columbia.

- Falconer K.(2003).Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications.Wiley.
- Gómez J. y Poveda,G.(2008).Estimación del espectro multifractal para series de precipitación horaria en los Andes Tropicales de Colombia. Ciencias de la Tierra.
- Hansen R.(2009).La dimensión de Mendés France. Relación entre su espectro multifractal y el formalismo termodinámico. Aplicación a sistemas tipo Hénon.Departamento de matemática, facultad de ingeniería, Universidad de Buenos Aires.
- Harte,D.(2001).Multifractals. Theory and Applications.CHAPMAN & HALL CRC.
- Herrmann F. y J, Kane.(2002).Fractional Splines, Wavelets and related Basis Function. Expansions.ERL-MIT.
- Herrmann F.(2000).Multiscale analysis of well and seismic data.Stanford University, Standford, CA, U.S.A.
- Herrmann F.(s.f).Multi-fractional Splines: application to seismic imaging.Department of Earth and Ocean Sciences,Vancouver, BC, Canada. University of British Columbia, 6339 Stores Road.
- Hilterman F., Zhou R. y Haitao R.(2008).Seismic Interpretation with Reflectivity Transform.SIPES Luncheon Meeting.
- Huergo C.(2011).Estudio de la fenomenología del crecimiento de células transformadas. mediante el empleo de técnicas de escalado dinámico y la aplicación de modelos teóricos.Facultad de Ciencias Médicas. UNLP,25.
- Jiménez-Hornero F.J, Giráldez J.y Laguna A.(2007).Análisis multifractal de la velocidad de flujo simulada con un modelo de malla en medios porosos bidimensionales idealizados.Universidad de Córdoba.

- Kantelhardt Jan W.(2010).Fractal and Multifractal Time Series.Institute of Physics, Martin-Luther-University.
- Kellogg R.(2010).The effect of uncertainty on investment: Evidence from Texas oil drilling. Departament of economics, University of Michigan,5.
- Khan M., A., Fadzil., M., Friadaus. y A., Riza.(2007).Multifractal analysis of seismic data for deleneating reservoir fluids.
- Khan, M., y A., Fadzil.(2007).Singularity spectrum of hydrocarbon fluids in synthetic seismograms. International conference on intelligent and avanced system. Malysia.
- Kraft R.(s.f).Citado el 13 de mayo del 2012.Lehreinheit Mathematik und Statistik:  
<http://web2.wzw.tum.de/dvs/persons/kraft/kraft.html>
- Latin Business.Economic & Business Report Análisis Sectorial de Venezuela.(s.f).Consultado el 12 de mayo del 2011.  
Report:<http://www.latinbusinessreport.com>.
- Leonarduzzi R., Schlottauer G. y Torres M.(2005).Análisis multifractal por ventanas: aplicación a señales biológicas.Laboratorio de Señales y Dinámicas no lineales- Facultad de ingeniería-UNER.
- Li C., y C., Liner.,(2005).Singularity esponent from wavelet-based multiscale analysis. Chinese journal of geophysics.953-959.
- Mallat,S. y Liang,W.(1992).Singularity detection and processing with wavelets.IEEE Transactions on information theory.
- Mallat Stéphane.(1999).A wavelet tour of signal processing.Academic press,663p.
- Mandelbrot M.(1982).Fractal Geometry of Nature.Freeman, San Francisco

- Mavko G., Mukerji T. y Dvorkin J.(1998).The rock physics hand book. Tools for seismic analysis in porous media.Cambridge University Press,170.
- Milan M. y Jiří M.(1994).Data analysis in the chemical laboratory Part 1. Analysis of indirect measurements.ELSEVIER, ANALYTIC CHIMICA ACTA 293.
- Muzy J., Bacry E. y Arneodo A.(1994).The multifractal formalism revisited with wavelets.Int. J. of Bifurcation and Chaos.
- Nava P. y F. Alejandro.(2002).Procesamiento de series de tiempo.México D.F. Fondo de Cultura Económica , MEXICOL.
- Packwood J.(1997).Rock physics for hydrocarbon recovery monitoring.Stanford University.
- Peters E.(2006).Petrophysics.Department of petroleum and Geosystems Engineering. The University of Texas at Austin,2-51.
- PhysioNet.(s.f).Consultado el 20 de mayo del 2011.A Brief Overview of Multifractal Time Series:  
<http://www.physionet.org/tutorials/multifractal/behavior.htm>.
- Robert E. y K., Wroldstad.(1993).Interpretative Aspects of AVO-Application to Offshore Gulf Coast Bright-Spot Analysis,compilacion Offset-Dependent Reflectivity-Theory and practice of AVO analysis edited by Jhon P. Castagna and Milo M. Backus.Society of exploration Geophysicists,267.
- Roinestad K.(2007).Geometry of Self-Similar Sets.Virginia Polytechnic Institute.
- Sheriff R.,(1991).Encyclopedic Dictionary of Exploration Geophysics.Society of Exploration Geophysicists.
- Struzik Z.(1999).Determining local singularitu strengths and their spectra with the wavelet transform.World Scientific Publishing Company.

Tearpock., Daniel, J., Bischke. y Richard E.(1991).Applied subsurface geological mapping.Prentice Hall.

Turcotte D.(1997).Fractals and Chaos in Geology and Geophysics.Cambridge University Press,136.

Unser M. y Blu T.(2000).Fractional Splines and Wavelets.SIAM Review Vol. 42, No. I,43-67.

Walls, J., J., Dvorkin y M., Carr., (s.f).Well logs and rock physics in seismic reservoir characterization.Rock solid images,1-7.

Wikipedia.(s.f).Consultado el 01 de mayo del 2012.Dimensión fractal:  
[http://www.http://es.wikipedia.org/wiki/Dimensi%C3%B3n\\_fractal#cite\\_ref-4.htm](http://www.http://es.wikipedia.org/wiki/Dimensi%C3%B3n_fractal#cite_ref-4.htm).

Wikipedia.(s.f).Consultado el 13 de mayo del 2012.Self-similarity:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Self-similarity#cite\\_note-0](http://en.wikipedia.org/wiki/Self-similarity#cite_note-0)

## APÉNDICES

### Estimación del error en la transformada ondícula

$$\delta T_\psi[f](u, s) = \left| \partial_u T_\psi[f](u, s) \right| \delta u + \left| \partial_s T_\psi[f](u, s) \right| \delta s.$$

Con:

$$T_\psi[f](u, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt,$$

Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} \delta T_\psi[f](u, s) &= \left| \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{d\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)}{d\left(\frac{t-u}{s}\right)} \partial_u\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \right| \delta u + \dots \\ &\dots + \left| \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\sqrt{s}} \right) \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt + \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{d\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)}{d\left(\frac{t-u}{s}\right)} \partial_s\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \right| \delta s \\ &= \left| -\frac{1}{s\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{d\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)}{d\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt \right| \delta u + \left| -\frac{1}{2s\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt - \dots \right. \\ &\dots - \left. \frac{1}{s\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{d\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)}{d\left(\frac{t-u}{s}\right)} \left(\frac{t-u}{s}\right) dt \right| \delta s \end{aligned} \tag{5.1}$$

Tomando los siguientes cambios de variables:

$$\alpha\left(\frac{t-u}{s}\right) = \frac{d\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)}{d\left(\frac{t-u}{s}\right)}$$

$$\theta\left(\frac{t-u}{s}\right) = \frac{d\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)}{d\left(\frac{t-u}{s}\right)}\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

Y sustituyéndolos en la ecuación 5.1 se tiene :

$$\begin{aligned} \delta T_\psi[f](u, s) &= \left| -\frac{1}{s\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \alpha\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \right| \delta u + \dots \\ &\dots + \left| -\frac{1}{2s\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt - \frac{1}{s\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \theta\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \right| \delta s \end{aligned}$$

Haciendo uso del código **cwt** de Matlab se pueden definir las siguientes tres (3) matrices:

$$C_{i,j} = \mathbf{cwt}(f(t), s, \psi_{u,s})$$

$$D_{i,j} = \mathbf{cwt}(f(t), s, \alpha_{u,s})$$

$$E_{i,j} = \mathbf{cwt}(f(t), s, \theta_{u,s})$$

Por lo que el error en la transformada ondícula definido en la ecuación 3.17 se puede estimar con la ecuación siguiente:

$$\delta T_\psi[f](u, s) = \left| \frac{1}{s_i} D_{i,j} \right| \delta u + \left| \frac{1}{2s_i} C_{i,j} + \frac{1}{s_i} E_{i,j} \right| \delta s.$$

Tal como se muestra en la ecuación 3.25.

## Estimación del error en la función de partición

$$\delta Z(q, s) = \left| \partial_q Z(q, s) \right| \delta q + \left| \partial_s Z(q, s) \right| \delta s.$$

Con:

$$Z(q, s) = \sum_p \left| T_\psi[f](u_p, s) \right|^q,$$

Tomando en cuenta estas dos últimas se tiene que:

$$\delta Z(q, s) = \left| \partial_q \left( \sum_p |T_\psi[f](u_p, s)|^q \right) \right| \delta q + \left| \partial_s \left( \sum_p |T_\psi[f](u_p, s)|^q \right) \right| \delta s \quad (5.2)$$

Desarrollando la ecuación 5.2 se llega a:

$$\begin{aligned} \delta Z(q, s) &= \left| \frac{d}{dq}(q) \sum_p |T_\psi[f](u_p, s)|^q \ln \left( \sum_p |T_\psi[f](u_p, s)| \right) \right| \delta q + \dots \\ &\dots + \left| q \frac{\sum_p |T_\psi[f](u_p, s)|^q}{\sum_p |T_\psi[f](u_p, s)|} \right| \delta s \\ &= \left| Z(q, s) \ln \left( \sum_p |T_\psi[f](u_p, s)| \right) \right| \delta q + \dots \\ &\dots + \left| q \frac{Z(q, s)}{\sum_p |T_\psi[f](u_p, s)|} \frac{\partial}{\partial s} \left( \sum_p |T_\psi[f](u_p, s)| \right) \right| \delta s \end{aligned}$$

Teniendo así la incertidumbre asociada a la función de partición como se muestra en la ecuación 3.30.

## Definición de Schur-concavidad

Una primera base sobre la que construir medidas de incertidumbre viene dada por el principio de transferencia, que fue desarrollado a principios del siglo XX en economía para el estudio de la distribución de la riqueza. Traducido a nuestro contexto este principio se puede entender de la siguiente manera: Dada una distribución de probabilidad, si transferimos parte de la probabilidad de un suceso más probable a otro menos probable, de forma que la cantidad transferida es menor a la mitad de la diferencia de probabilidad entre estos dos sucesos, entonces la distribución de probabilidad obtenida está menos concentrada que la original y tiene asociada, por tanto, un mayor grado de incertidumbre. Consecuentemente, si una distribución de probabilidad puede ser obtenida a partir de otra por medio de una serie de transferencias como la anteriormente señalada, entonces concluiremos que la primera tiene asociada mayor incertidumbre que la segunda.

**Definición** Sean  $p$  y  $q$  los vectores  $n$ -dimensionales cuyas entradas contienen las distribuciones de probabilidad  $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  y  $\mathcal{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ . Si existen matrices de permutación  $\Pi_i$  de dimensión  $n$  tales que:

$$q = \sum_i \lambda_i \Pi_i p,$$

Donde  $\lambda \geq 0 \forall i$  y  $\sum_i \lambda_i = 1$  entonces  $\mathcal{Q}$  se puede obtener a partir de  $\mathcal{P}$  mediante una serie de procesos de transferencia y decimos que  $\mathcal{P}$  mayoría a  $\mathcal{Q}$  lo que se denota como  $\mathcal{Q} \prec \mathcal{P}$ .

La mayorización captura, por tanto, el concepto del principio de transferencia y nos equipa con una herramienta cualitativa para comparar el grado de incertidumbre correspondiente a dos distribuciones de probabilidad.

A pesar de las limitaciones de la mayorización que acabamos de señalar, esta he-

ramienta proporciona una de las primeras nociones a tener en cuenta a la hora de considerar una medida cuantitativa de la incertidumbre: la Schur-concavidad.

**Definición** Una función real  $f(\mathcal{P}) = f(p_1, p_2, \dots, p_n)$  se dice Schur-cóncava si:

$$\mathcal{Q} \prec \mathcal{P} \implies f(\mathcal{Q}) \geq f(\mathcal{P})$$

Efectivamente, puesto que  $\mathcal{Q} \prec \mathcal{P}$  implica que hay una mayor ignorancia en el resultado de  $\mathcal{Q}$  que en el de  $\mathcal{P}$ , una medida de incertidumbre rigurosa debe asociar un valor mayor a la primera.

## Promedio cero de una ondícula

Las propiedades más importantes de las ondículas son las condiciones de admisibilidad y regularidad. Las funciones de cuadrado integrable  $\psi(t)$  que satisfacen la condición de admisibilidad, pueden ser utilizadas para primero analizar y luego reconstruir una señal sin que se produzca pérdida de información. La condición de admisibilidad puede expresarse de la siguiente manera (Belmonte, 2006),(Mallat, 1999):

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty,$$

donde  $\Psi(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $\psi(t)$ . La condición de admisibilidad implica que la transformada de Fourier de  $\psi(t)$  desaparece para frecuencia cero.

$$|\Psi(\omega)|^2 \Big|_{\omega=0} = 0$$

Esta última expresión indica que las ondículas deben tener un espectro con forma paso banda. Esta condición, de valor nulo a frecuencia cero, también implica que

el valor medio de la ondícula en el dominio del tiempo debe ser nulo, y por tanto debe ser oscilatoria, es decir,  $\psi(t)$  debe ser una onda. Esta última característica puede expresarse como:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$$

De forma tal que se puede concluir que una ondícula tienen un valor promedio nulo.

# ANEXOS

## Modelos monofásicos y bifásicos:

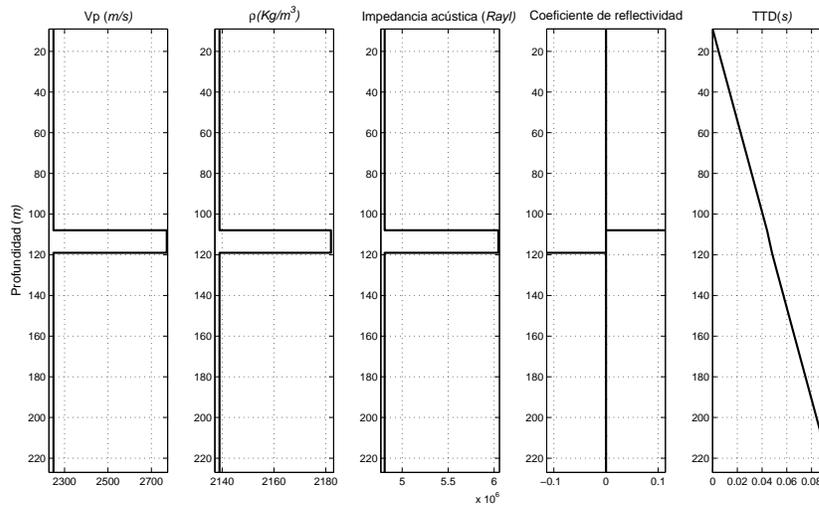


Figura 5.1: Modelo 1

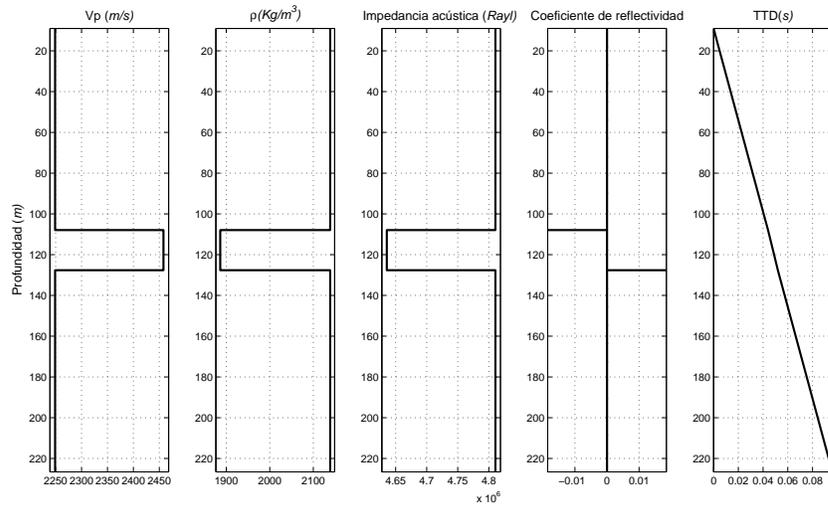


Figura 5.2: Modelo 2

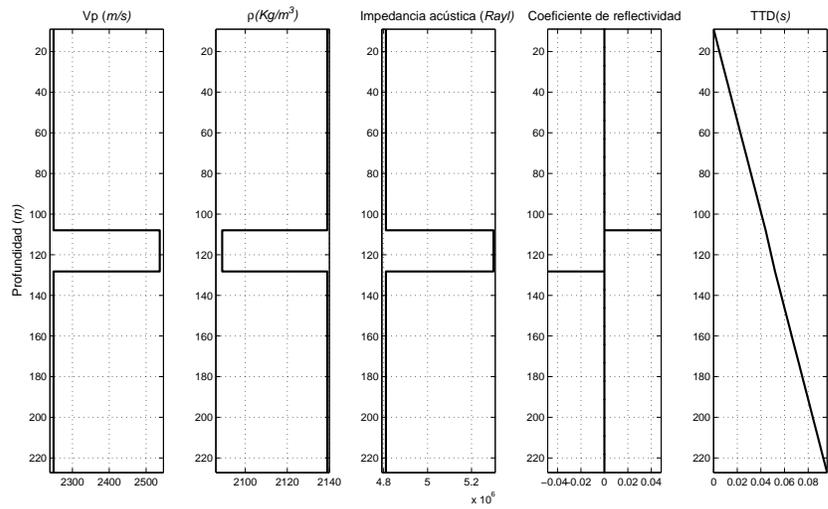


Figura 5.3: Modelo 3

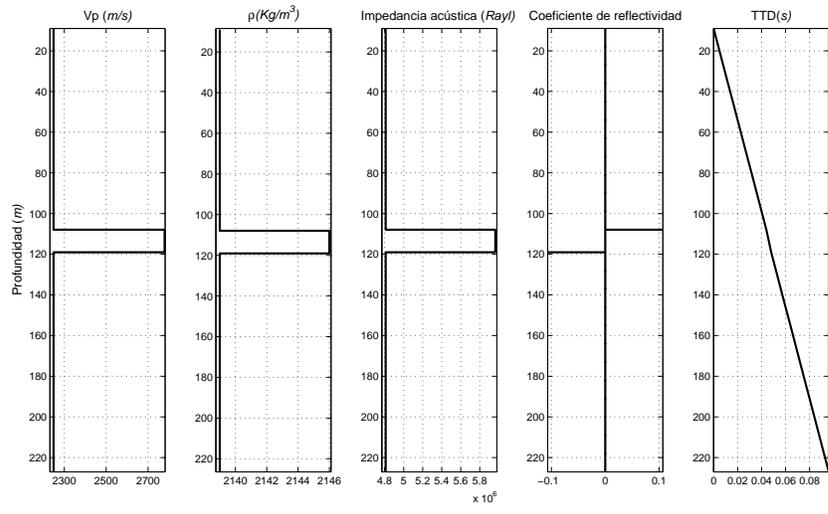


Figura 5.4: Modelo 4

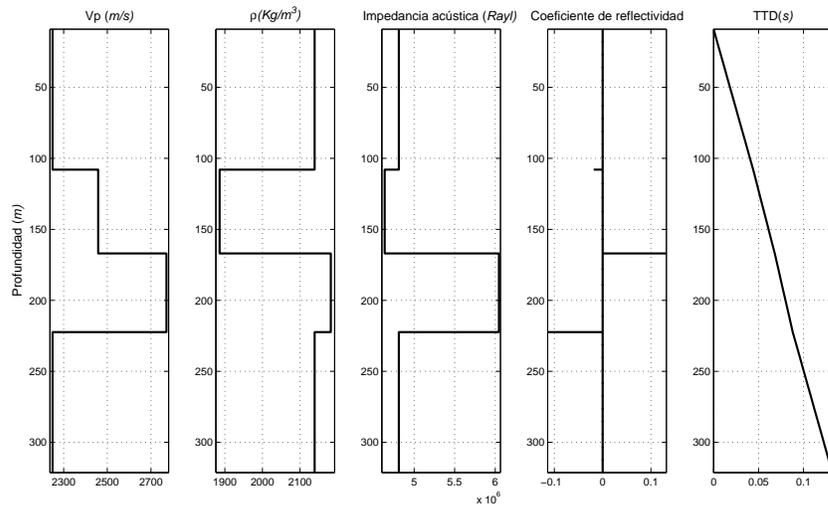


Figura 5.5: Modelo 5

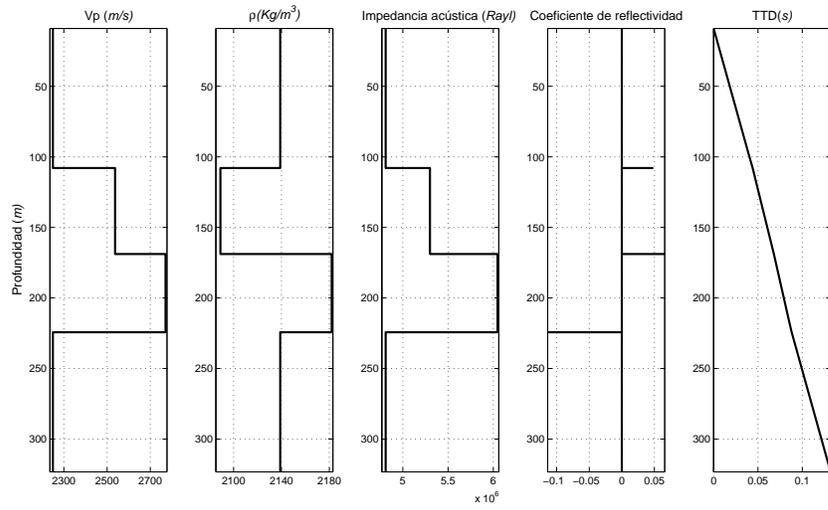


Figura 5.6: Modelo 6

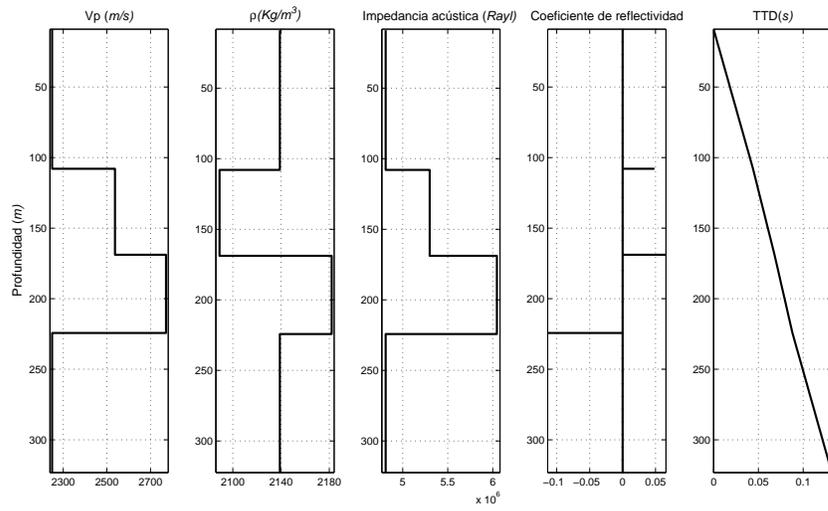


Figura 5.7: Modelo 7

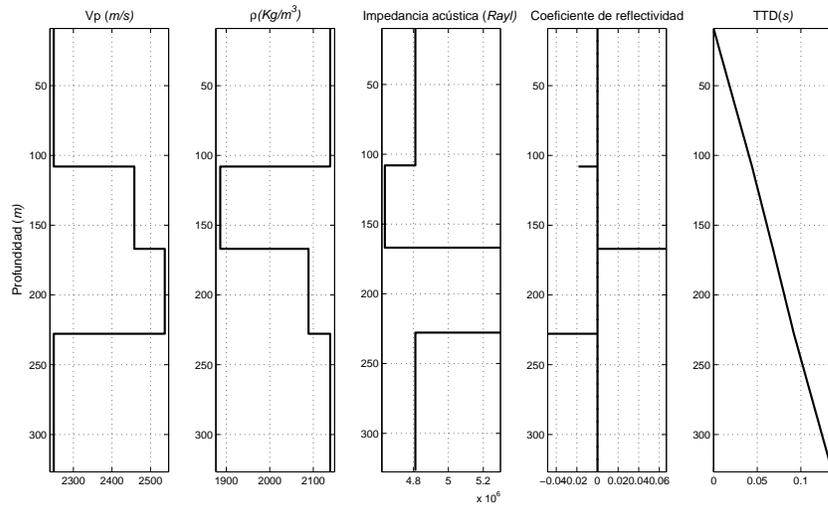


Figura 5.8: Modelo 8

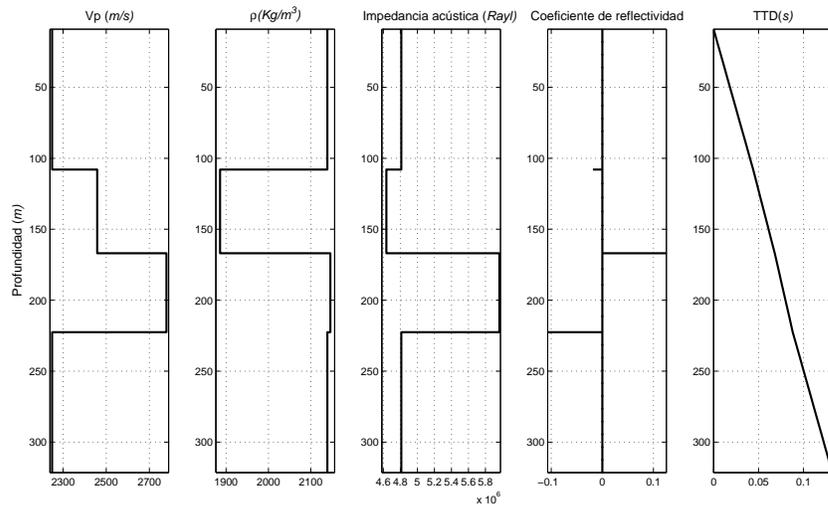


Figura 5.9: Modelo 9

# NOTACIÓN

$\langle f, g \rangle$ : producto interno entre  $f$  y  $g$ .

$\|f\|$ : Norma de  $f$ .

$sup$ : mínima cota superior.

$inf$ : máxima cota inferior.

$H_\delta^s$ : medida  $s$ -dimensional de Hausdorff.

$dim_H$ : dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

$\mu$ : medida sobre  $\mathbb{R}^n$ .

$\mathcal{L}^1$ : medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ .

$\mathcal{L}^n$ : medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ .

$\psi_{u,s}$ : ondícula madre.

$f^*$ : conjugado complejo de  $f$ .

$A_{i,j}$ : matriz de  $i$  filas y  $j$  columnas.

$\delta f$ : incertidumbre en la función  $f$ .

$\mathcal{P}$ : distribución de probabilidad.

## Conjuntos

$\mathbb{N}$ : enteros positivos incluyendo el cero (0).

$\mathbb{Z}$ : enteros.

$\mathbb{R}$ : números reales.

$\mathbb{R}^+$ : reales positivos.

## Señales

$f(t)$  señal en tiempo continua.

## Espacios

$\mathbf{C}^p$ : función  $p$  veces diferenciable y continua.

$\mathbf{C}^\infty$ : función infinitamente diferenciable.

$\mathbf{L}^2$ : funciones de energía finita  $\int |f(t)|^2 dt < +\infty$ .

$\mathbf{L}^p$ : funciones que cumplen  $\int |f(t)|^p dt < +\infty$ .

### Operadores

$f \star g(t)$ : convolución entre  $f$  y  $g$ .

$f^{(n)}(t)$ : derivada de orden  $n$  de  $f$ ,  $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ .

$\partial_{x_i} f(x_1 \cdots x_n)$ : derivada parcial de  $f$  con respecto a la variable  $x_i$  con  $i = 1, 2 \cdots n$ .

### Transformadas

$\hat{f}(\omega) \equiv F(s)$ : transformada de Fourier de la función  $f$ .

$T_\psi[f](u, s)$ : transformada ondícula de  $f$ .

### Códigos

**cwt**: retorna la transformada ondícula continua.

**scal2frq**: retorna la pseudo-frecuencia asociada a una escala dada.

**centfrq** : retorna la frecuencia central de una ondícula dada.