Una experiencia didáctica en la enseñanza de los modelos Binomial y Poisson para el estudio de patrones de dispersión espacial

De Nóbrega Suárez José Renato
renato.nobrega @ciens.ucv.ve, Unidad Docente de Bioestadística, Departamento de Ecología, Escuela de Biología, Universidad Central de Venezuela

1. Introducción

Se expone un ejercicio didáctico para explicar dos modelos probabilísticos requeridos en el tema de patrones de dispersión espacial de organismos, en cursos universitarios de Ecología. Cada estudiante simula la dispersión aleatoria de 90 puntos (individuos de una especie biológica hipotética) sobre un área cerrada dividida en 100 cuadros georeferenciados según la fila y columna donde se ubica (**Figura 1**). El estudiante genera 90 pares ordenados de dígitos, vía tabla de dígitos aleatorios u hoja Excel, que representan las coordenadas de los cuadros seleccionados para ubicar los puntos (un cuadro puede ser seleccionado varias veces). Previo a la simulación se discuten preguntas claves para orientar el proceso y afinar conceptos estadísticos.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

Figura 1: Área cuadriculada para la simulación. Cuadros con coordenadas.

2. Las preguntas

¿Cuál es la probabilidad, asociada a cada cuadro, de ser escogido en un particular ensayo de selección? Objetivo: reconocer que el ingreso de cada punto al área representa, en cada cuadro, la ejecución de un ensayo Bernoulli: el cuadro es seleccionado (recibe el punto) o no, con probabilidades 0,01 y 0,99 respectivamente.

¿Cuántos puntos podrían caer en un cuadro particular? ¿Es posible que los 90 puntos queden en un único cuadro? ¿Cuán factible sería este suceso? Objetivo: reconocer la variable aleatoria X, "número de puntos en cuadro", y diferenciar entre los valores que teóricamente puede adoptar (X: 0,1…..90) y la probabilidad de cada uno.

¿Cuántos cuadros podrían quedar vacíos? Objetivo: incentivar al estudiante a realizar la simulación con interés y curiosidad al obligarlo a elaborar un pronóstico que contrastará con el valor esperado según el modelo probabilístico que rige el proceso, y que el profesor informará. En este caso el valor esperado es de 40 cuadros vacíos (redondeando). En experiencias previas la moda de los pronósticos de los estudiantes se ubica en 30 cuadros.

Realizadas las simulaciones, la estadística descriptiva básica de la variable (distribución de frecuencia, media y varianza) y constatada la discrepancia o no entre el pronóstico del estudiante y el del modelo, se procede a su explicación.

3. La explicación de los modelos

3.1. El modelo Binomial

Se inicia con el modelo binomial. Es útil la analogía entre la experiencia de dispersar n=90 puntos en un área dividida en 100 cuadros y observar el número de puntos que caen en un cuadro, con la experiencia binomial de revolear n=90 veces una moneda no equilibrada (cuya probabilidad de cara en cada revoleo es constante e igual a 0,01), y observar el número de caras. Luego la probabilidad de que la variable binomial X "número de puntos en un cuadro " adopte un valor x determinado, vendrá dada por la función de probabilidad binomial b(x;n,p),con n=90, p=0,01 , y X: 0,1,2…..90.

$$P(X=x)=b(x;n,p)=\binom{n}{x}\cdot p^{x}\cdot(1-p)^{n-x}$$

Se calcula la probabilidad para X=0, y el valor esperado de cuadros vacíos a partir de una muestra de 100 cuadros: P(X=0).100 = 0,4047. 100 = 40,47. En este punto es útil la analogía con la experiencia de revolear 90 veces cada una de 100 monedas, idénticas en la probabilidad p=0,01 de obtener cara en un revoleo, y preguntarse por el número esperado de monedas en las que no se obtendrían caras en ninguno de los revoleos.

3.2. El modelo Poisson

Se introduce la expresión de la función Poisson indicando que es una buena aproximación de la binomial dada las condiciones de la experiencia: número de ensayos Bernoulli grande (n=90) con baja probabilidad del suceso éxito (p=0,01). Se constata comparando la probabilidad binomial para x=0 con la correspondiente según la Poisson. Destacar que su único parámetro µ coincide su expectativa, y que esta corresponde a la expectativa binomial:

E(X) = n.p = 90.0,01 = 0,90

Se cierra indicando que si la experiencia se repitiese varias veces, incrementando el número de cuadros y el número de individuos al multiplicarlos por un mismo factor cada vez mayor, manteniendo constante el promedio de puntos por cuadro, la aproximación de la binomial a la Poisson será cada vez mejor. Se ilustra esto en la **tabla 1** y presentando la expresión matemática de la aproximación límite:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} b(x;n,p) = \frac{e^{-\mu}\,.\mu^{x}}{x!}$$

Tabla 1: Aproximación de la binomial a la Poisson

	Probabilidad Binomial			Probabilidad Poisson
Variable X	n = 90 p = 0,01 E(X)=0,9	n = 900 p = 0,001 E(X)=0,9	n = 9000 p = 0,0001 E(X)=0,9	µ = 0,9
0	0,404732	0,406387	0,406551	0,40657
1	0,367938	0,366114	0,365933	0,365913
2	0,165386	0,164733	0,164668	0,164661
3	0,049003	0,049359	0,049394	0,049398
≥4	0,01294	0,013407	0,013454	0,013459