



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA

# CÁLCULO DE LA COHOMOLOGÍA DE DE RHAM PARA SUPERFICIES CERRADAS

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Renzo Zanin** para optar al título de Licenciado en Matemática.

**Tutor: Dr. Tomás Guardia**

Caracas, Venezuela  
Mayo, 2015

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado **Cálculo de la cohomología de De Rham para superficies compactas**, presentado por el **Br. Renzo Zanin**, titular de la Cédula de Identidad **V-18.143.895**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

---

**Prof. Tomás Guardia**  
**Tutor**

---

**Prof. Giovanni Figueroa**  
**Jurado**

---

**Prof. Adriana Padrón**  
**Jurado**

*A mis padres,*

*y con amor,*

*a mi querida Lucía, cuya abnegación y estímulo  
hicieron realidad mi anhelo.*

*Vita brevis,  
ars longa,  
occasio praeceps,  
experimentum periculosum,  
iudicium difficile.*

Hipócrates

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Variedades</b>	<b>1</b>
1.1. Variedades topológicas . . . . .	1
1.2. Cartas compatibles . . . . .	1
1.3. Variedades suaves . . . . .	3
<b>2. Triangulación</b>	<b>5</b>
2.1. Complejo simplicial euclídeo . . . . .	5
2.2. Aplicaciones entre complejos simpliciales euclídeos . . . . .	7
2.3. Triangulación . . . . .	9
<b>3. Representación poligonal</b>	<b>11</b>
3.1. Polígonos . . . . .	11
3.2. Representación poligonal . . . . .	15
3.3. Suma conexa de superficies . . . . .	23
<b>4. El teorema de clasificación</b>	<b>25</b>
<b>5. Espacio tangente</b>	<b>31</b>
5.1. Funciones suaves entre variedades . . . . .	31
5.2. Vectores tangentes . . . . .	32
5.3. El diferencial de una función . . . . .	32
5.4. Base para el espacio tangente . . . . .	34
<b>6. Formas diferenciales</b>	<b>36</b>
6.1. Producto exterior . . . . .	36
6.2. Formas diferenciales . . . . .	38

<b>7. La cohomología de De Rham</b>	<b>40</b>
7.1. Derivada exterior . . . . .	40
7.2. La cohomología de De Rham . . . . .	41
7.3. Pullback . . . . .	42
<b>8. Invarianza Homotópica</b>	<b>46</b>
<b>9. La cohomología de las superficies cerradas</b>	<b>49</b>
9.1. Cohomología de la circunferencia . . . . .	50
9.2. Cohomología de la esfera . . . . .	52
9.3. Cohomología del toro . . . . .	52
9.4. Cohomología de la superficie orientable de género $g$ . . . . .	53
9.5. Cohomología del plano proyectivo . . . . .	54
9.6. Cohomología de la superficie no orientable de género $g$ . . . . .	55
<b>A. La sucesión de Mayer-Vietoris</b>	<b>57</b>
A.1. Complejo de cocadenas . . . . .	57
A.2. El teorema de Mayer-Vietoris . . . . .	59
<b>Bibliografía</b>	<b>62</b>

# Introducción

Las variedades topológicas son espacios topológicos localmente homeomorfos a un espacio euclídeo. A partir de estos homeomorfismos, llamados cartas, construiremos una estructura diferencial que nos permitirá realizar cálculo diferencial sobre la variedad. A una variedad topológica con una estructura diferencial la llamaremos una variedad suave.

A lo largo de la disertación prestaremos especial atención a un grupo específico de variedades suaves, las superficies cerradas, que desde la antigüedad han sido objeto de estudio de los matemáticos.

El primer objetivo de esta disertación será conseguir una manera de clasificar las superficies cerradas bajo homeomorfismos. Para esto, seguiremos el esquema presentado por [Hui and Teo, 2011] (que a su vez está basado en el esquema dado en [Lee, 2011]), que utiliza el famoso teorema de triangulación de superficies cerradas para construir un complejo simplicial adecuado asociado a una superficie. Una vez obtenida una triangulación de la superficie, construiremos una representación poligonal correspondiente a la superficie. Podremos entonces realizar operaciones algebraicas sobre estas representaciones para hallar otras cuyas superficies asociadas sean homeomorfas, i.e.: reducimos el problema topológico a uno algebraico. Así, obtendremos uno de los resultados más importantes de esta disertación: El teorema de clasificación de superficies cerradas. Este teorema muestra cómo cualquier superficie cerrada es homeomorfa a una de las siguientes superficies: la esfera o la suma conexa de  $g$  toros, la suma conexa de  $g$  planos proyectivos.

El segundo objetivo será definir la cohomología de De Rham, estudiar sus propiedades básicas y finalmente demostrar su invarianza homotópica. Para esto, primero será necesario construir las formas diferenciales, que son el

objeto principal de la cohomología de De Rham. Con este fin seguiremos los esquemas presentados en [Guardia, 2007] y en [Tu, 2011]. Así comenzaremos por construir el espacio tangente a una variedad y sobre el dual del mismo construiremos el álgebra de las formas diferenciales. A partir de ésta construiremos los grupos de cohomología de De Rham. Por último demostraremos la invarianza homotópica de la cohomología de De Rham, uno de los resultados más importantes de esta disertación, que establece que la cohomología de De Rham es un invariante topológico.

Finalmente, utilizando el teorema de clasificación y el teorema de invarianza homotópica, podremos limitar el cálculo de la cohomología de De Rham a los tres casos previamente establecidos: la esfera, la suma conexa de  $g$  toros y la suma conexa de  $g$  planos proyectivos.



# Capítulo 1

## Variedades

Las variedades suaves son espacios topológicos que generalizan los conceptos básicos de curvas y superficies.

### 1.1. Variedades topológicas

**Definición 1.1.** Un espacio topológico  $M$  es *localmente euclídeo de dimensión  $n$*  si cada punto  $p \in M$  tiene un entorno  $U$  tal, que existe un homeomorfismo  $\phi$  de  $U$  en un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Llamaremos al par  $(U, \phi)$  una *carta local*, *entorno coordinado* o simplemente *carta*. Diremos que una carta local está centrada en  $p$  si  $\phi(p) = 0$ .

**Definición 1.2.** Una *bola coordinada* es un entorno coordinado cuya imagen es una bola en un espacio euclídeo.

**Definición 1.3.** Una *variedad topológica de dimensión  $n$*  es un espacio topológico Hausdorff, 2-numerable, localmente euclídeo de dimensión  $n$ .

### 1.2. Cartas compatibles

**Definición 1.4.** Dos cartas  $(U, \phi)$ ,  $(V, \psi)$  de una variedad topológica son  $C^\infty$ -*compatibles* si las dos funciones:

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \phi(U \cap V) \qquad \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

son  $C^\infty$ . Estas funciones son llamadas *funciones de transición* entre las cartas.

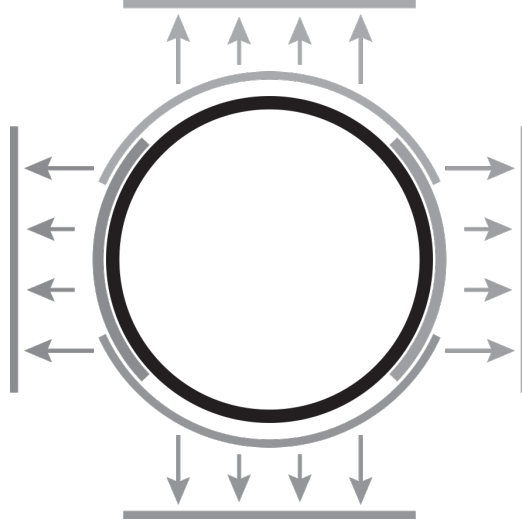


Figura 1.1: El círculo es un espacio localmente euclídeo

**Definición 1.5.** Un *Atlas*  $C^\infty$  de un espacio localmente euclídeo  $M$  es la colección  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  de cartas locales  $C^\infty$ -compatibles dos a dos que forman un cubrimiento de  $M$ , es decir,  $M = \cup_\alpha (U_\alpha, \phi_\alpha)$ .

Diremos que una carta  $(U, \phi)$  es compatible con un atlas  $\mathcal{U}$  si ésta es compatible con cada carta del atlas.

**Lema 1.6.** Sea  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  un atlas en un espacio localmente euclídeo. Si dos cartas  $(V, \psi)$ ,  $(W, \sigma)$  son ambas compatibles con el atlas  $\mathcal{U}$ , entonces son compatibles entre ellas.

*Demostración.* Sea  $p \in V \cap W$ . Como  $\mathcal{U}$  es un atlas, los abiertos de  $\mathcal{U}$  forman un cubrimiento del espacio. Entonces  $p \in U_a$  para algún  $a$ . Por lo tanto,  $p \in V \cap W \cap U_a$ .

Como  $\psi$  y  $\sigma$  son ambas compatibles con  $\mathcal{U}$ , entonces las funciones  $\sigma \circ \phi_a^{-1}$ ,  $\phi_a \circ \psi^{-1}$  son  $C^\infty$ ; por lo tanto su composición  $(\sigma \circ \phi_a^{-1}) \circ (\phi_a \circ \psi^{-1}) = \sigma \circ \psi^{-1}$

es a su vez  $C^\infty$ .

Usando un argumento análogo,  $\psi \circ \sigma^{-1}$  es  $C^\infty$ . □

### 1.3. Variedades suaves

**Definición 1.7.** Decimos que un atlas es *maximal* si no está contenido en ningún atlas. Es decir, si  $\mathcal{U}$  es maximal y se tiene que  $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ , entonces  $\mathcal{U} = \mathcal{M}$ .

**Definición 1.8.** Una *variedad suave* es una variedad topológica que posee un atlas  $C^\infty$  maximal. Una variedad suave tiene dimensión  $n$  si todas sus componentes conexas son de dimensión  $n$ .

Fue demostrado independientemente por James Munkres, Steve Smale y J.H.C. Whitehead que las variedades topológicas de dimensión menor o igual a tres admiten una estructura suave única salvo isomorfismos. De aquí en adelante, como únicamente estaremos interesados en el estudio de variedades suaves (y muy particularmente en las 2-variedades suaves cerradas), llamaremos a éstas simplemente *variedades*.

A las variedades de dimensión 1 las llamaremos *curvas* y a las variedades de dimensión 2 las llamaremos *superficies*.

**Definición 1.9.** Una variedad es *cerrada* si es compacta y no tiene borde <sup>1</sup>.

**Proposición 1.10.** *Todo atlas en un espacio localmente euclídeo está contenido en un atlas maximal único.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{U}$  un atlas en un espacio euclídeo  $M$ . Consideremos el conjunto  $\mathcal{A}$  formado por la unión de  $\mathcal{U}$  junto con todas las cartas  $(U_i, \phi_i)$  compatibles con  $\mathcal{U}$ . De la proposición 1.6 todas las cartas  $(U_i, \phi_i)$  son compatibles entre sí y por lo tanto  $\mathcal{A}$  es un atlas. Además si una carta es compatible con  $\mathcal{A}$  entonces es compatible (por construcción) con  $\mathcal{U}$  y forma parte de  $\mathcal{A}$ , es

---

<sup>1</sup>Aunque en esta disertación no hablaremos sobre las variedades con borde, el lector puede consultar [Tu, 2011] para una definición exacta de las mismas. En líneas generales una variedad con borde es una variedad con un filo, por ejemplo, una hoja de papel es una superficie (una 2-variedad) con borde unidimensional.

decir,  $\mathcal{A}$  es maximal.

Por otro lado, sea  $\mathcal{A}'$  otro atlas maximal tal que  $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}'$ . Necesariamente todas las cartas de  $\mathcal{A}'$  son compatibles con  $\mathcal{U}$  y por lo tanto  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ , pero como ambos son maximales, se tiene que  $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ . Por lo tanto  $\mathcal{A}$  es único.  $\square$

El atlas maximal de una variedad suave  $M$  también suele ser llamado *estructura diferenciable de  $M$* .

Como ya se dijo, los objetos de interés para esta disertación son las variedades suaves, de aquí en adelante nos referiremos a éstas simplemente como “variedades”. A los atlas  $C^\infty$  los llamaremos “atlas” y a las cartas  $C^\infty$ -compatibles “cartas compatibles”.

# Capítulo 2

## Triangulación

Una triangulación nos permitirá definir un “cubrimiento” apropiado para una superficie, dotado de una estructura topológica. Para esto usaremos los símlices: generalizaciones de triángulos en dimensiones arbitrarias.

El objetivo principal de este capítulo será demostrar que toda superficie es triangulable. Este resultado fue demostrado por primera vez por Tibor Radó en la década de 1920.

### 2.1. Complejo simplicial euclídeo

**Definición 2.1.** Sean  $v_0, v_1, \dots, v_k$  puntos en  $\mathbb{R}^n$ . Decimos que  $v_0, v_1, \dots, v_k$  están en *posición general* si los vectores  $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$  son linealmente independientes.

**Definición 2.2.** Dados los puntos  $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  en posición general. El *simplex* o *símplice* generado por ellos es el conjunto:

$$\left\{ \sum_{i=0}^k t_i v_i \in \mathbb{R}^n : 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\}$$

Cada punto  $v_0, v_1, \dots, v_k$  es llamado un *vértice* del símlice y la dimensión del símlice es  $k$ .

**Definición 2.3.** Sean  $v_0, \dots, v_k$  los vértices de un símlice  $\sigma$ . El símlice generado por un subconjunto  $v_0, \dots, v_k$  de vértices de  $\sigma$  es llamado un *cara*

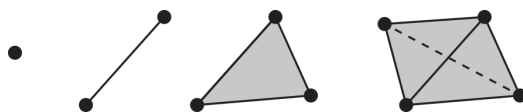


Figura 2.1: Ejemplo de 0-símplice, 1-símplice, 2-símplice, 3-símplice

de  $\sigma$ . El símplice generado por un subconjunto propio de vértices es llamado una *cara propia*. Las 0-caras son los vértices, las 1-caras son llamadas lados y las  $(k - 1)$ -caras son llamadas facetas ó caras frontera. La única  $k$ -cara de un  $k$ -símplice  $\sigma$  es el símplice  $\sigma$ .

Podemos “pegar” los símplices de manera conveniente usando la siguiente definición:

**Definición 2.4.** Un complejo simplicial euclídeo (o simplemente complejo simplicial) es una colección  $K$  de símplices en  $\mathbb{R}^n$  que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Si  $\sigma$  pertenece a  $K$ , entonces todas las caras de  $\sigma$  pertenecen a  $K$ .
2. La intersección de dos símplices en  $K$  es vacío o una cara de ambos.
3. Cada punto en un símplice de  $K$  tiene un entorno que interseca una cantidad finita de símplices de  $K$ .

La dimensión de un complejo simplicial  $K$  es la mayor dimensión de los símplices de  $K$ .

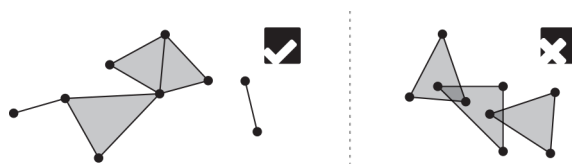


Figura 2.2: Un complejo simplicial válido y uno inválido

**Definición 2.5.** Denotamos como  $|K|$  al subconjunto dado por la unión de todos los símplices en  $K$ . Dotando a cada símplice con la topología relativa

inducimos una topología en  $|K|$  declarando  $A \subset |K|$  cerrado si y sólo si  $A \cap \sigma$  es cerrado para cada  $\sigma \in |K|$ . De esta manera  $|K|$  es un espacio topológico llamado el *poliedro* de  $K$ .

**Definición 2.6. (Terminología adicional)**

Sea  $K$  un complejo simplicial y  $\sigma$  un símplice:

- Dado un entero  $m$ , denotamos como  $K^{(m)} \subset K$  al subconjunto de todos los símplices de dimensión menor o igual a  $m$  de  $K$ .  $K^{(m)}$  es un subcomplejo simplicial de  $K$  llamado el *m-esqueleto* de  $K$ .
- Llamaremos *frontera* de  $\sigma$  a la unión de todas las caras frontera de  $\sigma$ . Denotada como  $\partial\sigma$ .
- Llamaremos *interior* de  $\sigma$  a  $\sigma - \partial\sigma$ . Denotado como  $Int\sigma$ .

## 2.2. Aplicaciones entre complejos simpliciales euclídeos

**Proposición 2.7.** *Una función  $f : |K| \rightarrow X$  es continua si y sólo si  $f|_{\sigma}$  es continua para cada  $\sigma \in K$ .*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Sea  $U \subset X$  un abierto. Por propiedades de la preimagen tenemos que  $f|_{\sigma}^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap \sigma$ , pero como  $f$  es continua entonces  $f^{-1}(U)$  es un abierto de  $|K|$ , por lo que  $f|_{\sigma}^{-1}(U)$  es un abierto en la topología relativa.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que cada  $f|_{\sigma}$  es continuo. Si  $C$  es un conjunto cerrado de  $X$ , entonces  $f|_{\sigma}^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap \sigma$  es cerrado en  $|\sigma|$ , por la continuidad de  $f|_{\sigma}$ . Entonces, por definición,  $f^{-1}(C)$  es cerrado en  $|K|$ .  $\square$

**Proposición 2.8.** *Sea  $\sigma = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$  un  $k$ -símplice en  $\mathbb{R}^n$ . Dados  $k + 1$  puntos  $w_0, \dots, w_k \in \mathbb{R}^m$ , existe una única aplicación afín  $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}^m$  que envía  $v_i \rightarrow w_i$  para cada  $i$ .*

*Demostración.* Como  $\sigma$  es un  $k$ -símplice, los vectores  $\{v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$  son linealmente independientes y entonces estos forman una base  $\mathcal{B}$  de un subespacio  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $L : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  la única función lineal tal que  $L(v_i - v_0) = w_i - w_0$ . Basta tomar  $f(v_i) = L(v_i) + w_0$ .  $\square$

**Definición 2.9.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales. Una aplicación continua  $f : |K| \rightarrow |L|$ , tal que la restricción de cada símplice de  $K$  cae en un símplice de  $L$  a través de una aplicación afín, es una *aplicación simplicial*.

**Definición 2.10.** La restricción de  $f : |K| \rightarrow |L|$  a  $K^{(0)}$  produce una aplicación  $f_0 : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$  llamada *aplicación vértice* de  $f$ .

**Definición 2.11.** Una aplicación simplicial que además es un homeomorfismo es un *isomorfismo simplicial*.

**Lema 2.12.** Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales. Si una aplicación  $f_0 : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$  cumple con la condición de que si  $\{v_0, \dots, v_k\}$  son vértices de un símplice de  $K$  entonces  $\{f_0(v_0), \dots, f_0(v_k)\}$  son vértices de un símplice de  $L$ , entonces existe una única aplicación simplicial  $f : |K| \rightarrow |L|$  cuya aplicación vértice es  $f_0$ .

*Demostración.* Sean  $\sigma \in K$ ,  $\tau \in L$ . Basta definir la función  $f : |K| \rightarrow |L|$  como la aplicación dada por:

$$f(v) = f\left(\sum_{i=0}^k t_i v_i\right) = \sum_{i=0}^k t_i f_0(v_i)$$

De esta manera, si  $x \in \sigma$ , como los coeficientes  $t_i$  siguen siendo positivos y sumando 1, entonces  $f(x) \in \tau$ . Además como  $f$  es lineal sobre cada símplice (y estamos trabajando en espacios de dimensión finita) entonces  $f$  es continua sobre cada símplice. Usando el lema (2.7) tenemos que  $f$  es continua.  $\square$

**Corolario 2.13.** Sean  $f$  y  $f_0$  como en el lema (2.12). La aplicación  $f$  es un isomorfismo simplicial si  $f_0$  cumple las siguientes condiciones:

1.  $f_0$  es biyectiva.
2.  $\{v_0, \dots, v_k\}$  son vértices de un símplice de  $K$  si y sólo si  $\{f_0(v_0), \dots, f_0(v_k)\}$  son vértices de un símplice de  $L$ .

*Demostración.* Aplicar el lema (2.12) dos veces produce el resultado deseado.  $\square$



## 2.3. Triangulación

**Definición 2.14.** Una *triangulación* es un homeomorfismo entre un espacio topológico y el poliedro de un complejo simplicial euclídeo.

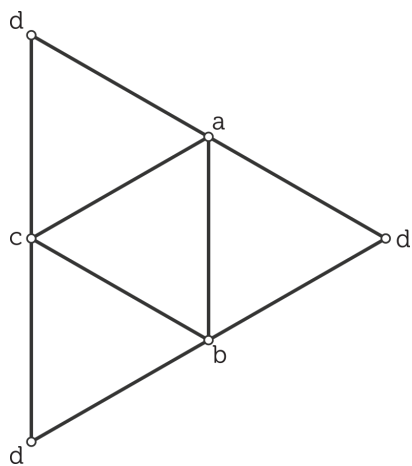
**Definición 2.15.** A un espacio que admite una triangulación se le llama *triangulable*.

**Teorema 2.16 (Teorema de Triangulación para 2-Variedades).** *Toda variedad cerrada de dimensión 2 es homeomorfa al poliedro de un complejo simplicial euclídeo en el cual cada 1-símplice es la cara de exactamente dos 2-símplices.*

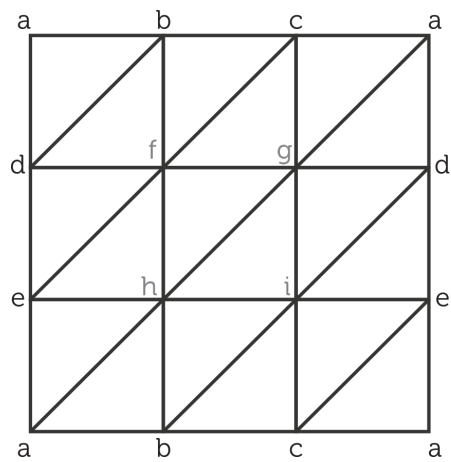
*Demostración.* La demostración es sumamente técnica e intrincada, y hacerla nos alejaría demasiado de los objetivos principales de esta disertación. Así que sólo daremos un esbozo de la misma. La idea general consiste en dar un cubrimiento de la variedad a partir de discos regulares coordinados y demostrar inductivamente que cada disco sucesivo puede ser triangulado de manera compatible con las triangulaciones previamente definidas. Una de las dificultades principales es que la frontera de un disco nuevo puede intersectar infinitamente la frontera de otros símlices ya definidos. Incluso en el caso donde sólo ocurren intersecciones finitas, mostrar que las regiones definidas por las curvas que se intersectan son homeomorfas a discos cerrados (y por lo tanto triangulables), requiere un delicado resultado topológico conocido como el *Teorema de Schönflies*<sup>1</sup>, que garantiza que cualquier incrustamiento topológico del círculo en  $\mathbb{R}^2$  se extiende a un incrustamiento en el disco cerrado. Demostraciones completas pueden ser encontradas en [Moise, 1977] y [Thomassen, 1977].  $\square$

---

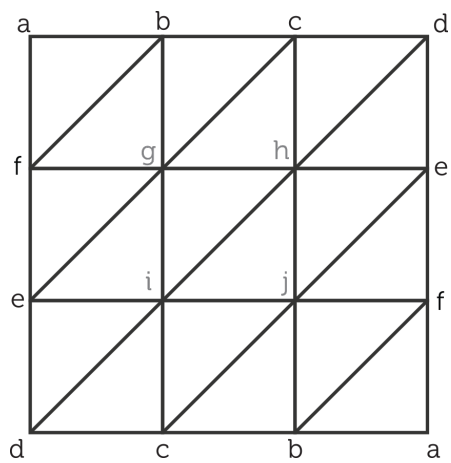
<sup>1</sup>Teorema de Schönflies: Si  $C \subset \mathbb{R}^2$  es una curva cerrada simple, entonces existe un homeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(C)$  es la circunferencia unitaria en el plano.



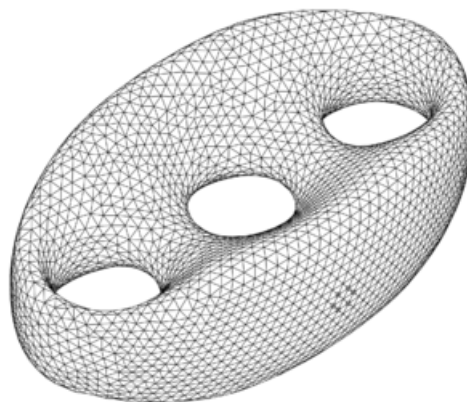
(a) Una triangulación de la esfera



(b) Una triangulación del toro



(c) Una triangulación del plano proyectivo



(d) Una triangulación por computadora sobre una 3-toro

# Capítulo 3

## Representación poligonal

Usaremos las representaciones poligonales de las superficies para reducir problemas de origen geométrico y topológico a problemas combinatorios.

En este capítulo demostraremos que toda superficie cerrada admite una representación poligonal y que las transformaciones elementales de representaciones poligonales producen una representación topológicamente equivalente.

### 3.1. Polígonos

**Definición 3.1.** Un *polígono* es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que es homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$  y que es la unión de finitos 1-símplices que se intersectan únicamente en sus vértices.

**Observación 3.2.** Un *polígono* es el poliedro de un complejo simplicial de dimensión 1. Además cada vértice de un polígono yace en exactamente dos lados.

**Definición 3.3.** Un subconjunto  $P$  de un plano es una *región poligonal* si es un subconjunto compacto (no necesariamente conexo), cuya frontera es la unión de polígonos y cumple con las siguientes condiciones:

1. Cada punto  $q$  de un lado que no es un vértice tiene un entorno  $U \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $P \cap U$  es igual a la intersección de  $U$  con un semiplano (ver figura 3.1).

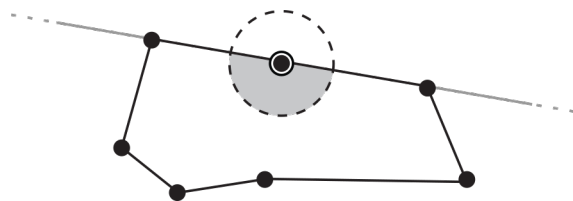


Figura 3.1: Condición 1

2. Cada vértice  $v$  tiene un entorno  $V \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $P \cap V$  es igual a la intersección de  $v$  con dos semiplanos cuyas fronteras sólo se intersectan en  $v$  (ver figura 3.2).

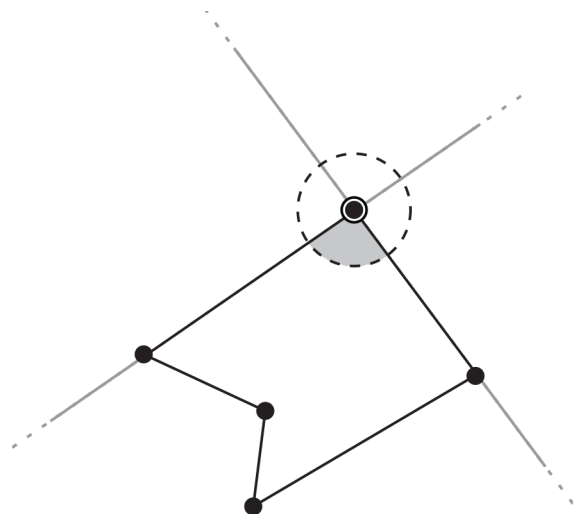


Figura 3.2: Condición 2

Ahora veremos como las condiciones 1 y 2 garantizan que, bajo cierta relación de equivalencia, podemos obtener un espacio localmente euclídeo a partir de una región poligonal.

**Teorema 3.4.** *Sea  $P$  una región poligonal en el plano con un número par de lados y supongamos que tenemos una relación de equivalencia que identifica a cada lado con otro único lado a través de un isomorfismo simplicial. Entonces el espacio cociente resultante es una superficie cerrada.*

*Demostración.* Sea  $M$  el espacio cociente  $P/\sim$  y sea  $\pi : P \longrightarrow M$  la aplicación cociente. Como  $P$  es compacto entonces  $M$  también es compacto. Además como la relación sólo identifica lados con lados y vértices con vértices, los puntos de  $M$  pueden ser sólo uno de los siguientes:

1. Puntos cara: puntos cuya preimagen se encuentra en el interior de  $P$ .
2. Puntos lado: puntos cuya preimagen se encuentra en un lado, pero no en un vértice.
3. Puntos vértice: puntos cuya preimagen es un vértice.

Para demostrar que  $M$  es localmente euclídeo, basta considerar estos tres tipos de puntos.

Puntos cara: Como  $\pi$  es inyectiva en  $Int(P)$  (porque la relación de equivalencia no le hace nada a los puntos del interior de  $P$ ) y además sobreyectiva (por ser la aplicación cociente), entonces  $\pi$  es biyectiva en  $Int(P)$ . Además  $\pi^{-1}$  es continua en el interior de  $P$ , ya que si  $V$  es un abierto en  $Int(P)$  tenemos que  $\pi(V)$  es abierto en la topología cociente, pues  $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$ . De esta manera  $\pi$  es un homeomorfismo a un abierto de  $\mathbb{R}^2$  (que es el propio  $Int(P)$ ).

Puntos lado: Para cualquier punto lado  $q$  tomemos un entorno  $U$  suficientemente pequeño, de manera tal que no tenga puntos vértices. Por la definición de región poligonal y la definición de la relación de equivalencia, el punto  $q$  tiene dos imágenes inversas  $q_1$  y  $q_2$  con entornos  $U_1$  y  $U_2$ , tales que  $V_1 = U_1 \cap P$  y  $V_2 = U_2 \cap P$ , donde  $V_1$  y  $V_2$  son iguales a las intersecciones de  $U_1$  y  $U_2$  con semiplanos disjuntos. Construimos isomorfismos afines  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , tales que  $\alpha_1$  envía a  $V_1$  al semicírculo unitario superior y  $\alpha_2$  envía a  $V_2$  al semicírculo unitario inferior. Podemos ahora definir otra aplicación cociente  $\phi : V_1 \cup V_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $\phi = \alpha_1$  en  $V_1$  y  $\phi = \alpha_2$  en  $V_2$  con la relación de equivalencia entre dos puntos borde  $r_1$  y  $r_2$ , de  $V_1$  y  $V_2$  respectivamente, dada por  $r_1 \sim r_2$ , siempre que  $\phi(r_1) = \phi(r_2)$ . La aplicación  $\phi$  es un homeomorfismo entre el entorno  $U$  de  $q$  y un abierto de  $\mathbb{R}^2$ , es decir, el círculo abierto (ver figura 3.3).

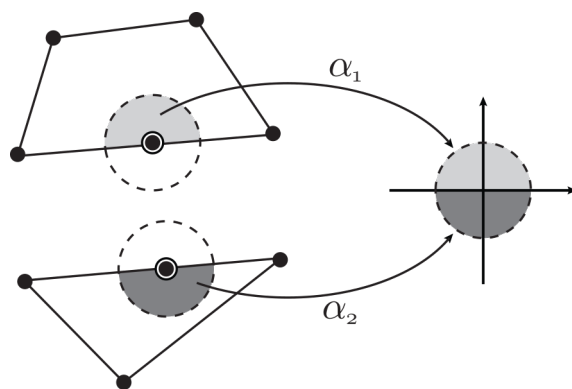


Figura 3.3: Puntos lado

Puntos vértice: Repetimos el proceso de los puntos borde para un punto vértice  $v$ , con la salvedad de que ahora tendremos cuatro isomorfismos afines  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  que envían el entorno  $U$  de  $v$  a cuartos de círculo en lugar de semicírculos (ver figura 3.4).

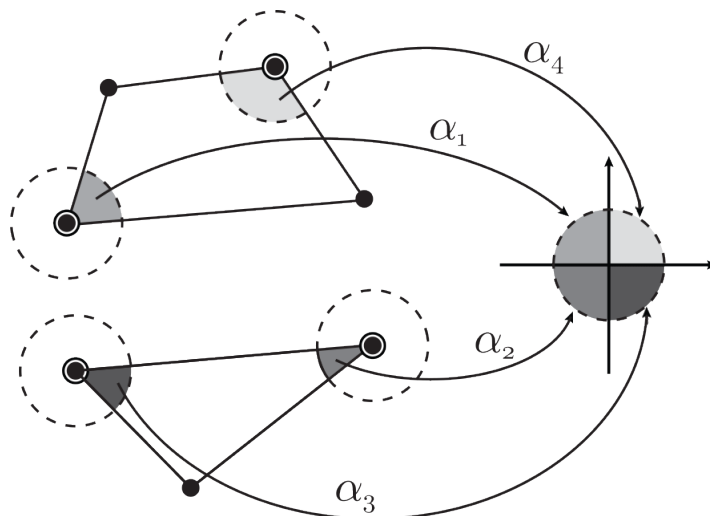


Figura 3.4: Puntos vértice

□

## 3.2. Representación poligonal

**Definición 3.5.** Dado un conjunto  $S$ , una *palabra* en  $S$  es una  $k$ -tupla de símbolos de la forma  $a$  y  $a^{-1}$  donde  $a \in S$ .

**Definición 3.6.** El *tamaño* de una palabra es el número de elementos en la palabra, donde  $a$  y  $a^{-1}$  cuentan como elementos distintos.

**Observación 3.7.** Más adelante mostraremos que  $a^{-1}$  denota el sentido contrario de  $a$ . De esta manera  $(a^{-1})^{-1} = a$

**Definición 3.8.** Una *representación poligonal* es un conjunto finito  $S$  junto con una cantidad finita de palabras  $W_1, \dots, W_k$  donde cada  $W_i$  es una palabra en  $S$  de tamaño 3 o mayor. Denotamos a la representación poligonal por  $R = \langle S | W_1, \dots, W_k \rangle$ .

**Definición 3.9.** La *realización geométrica* de una representación poligonal  $R$ , denotada por  $|R|$ , es determinada por el siguiente algoritmo:

1. Por cada palabra  $W_i$  de tamaño  $k$ , construimos en el plano la región poligonal convexa  $P_i$  de  $k$ -lados, con centro en el origen, longitud por lado 1, ángulos iguales y un vértice sobre el eje  $y$ .
2. Etiquetamos los lados de  $P_i$  con los símbolos de  $W_i$  en orden antihorario, empezando por el lado del polígono que está a la izquierda del vértice en el eje  $y$ .
3. Finalmente, denotamos como  $|R|$  al espacio cociente de  $\bigsqcup_i P_i$  determinado por la relación que identifica a los lados con el mismo símbolo (e.g.:  $a \sim a$ ), uniendo los vértices iniciales y finales (en sentido antihorario) o invirtiendo vértices iniciales y finales si los símbolos son opuestos (e.g.:  $a \sim a^{-1}$ ). Esto se representa como una flecha sobre el lado del polígono en sentido antihorario si el símbolo es  $a$ , y en sentido horario si el símbolo es  $a^{-1}$ .

**Definición 3.10.** En el caso especial en que  $W_i$  es una palabra de tamaño 2, definimos  $P_i$  como la esfera cuando la palabra es  $aa^{-1}$  o cuando es  $a^{-1}a$ , y el plano proyectivo cuando la palabra es  $aa$  o cuando es  $a^{-1}a^{-1}$ .

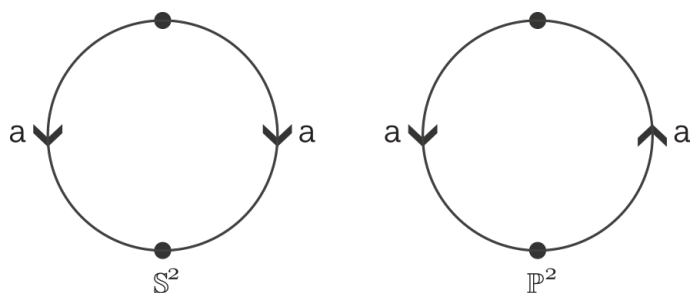


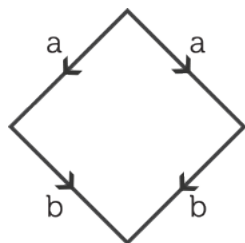
Figura 3.5: Representación de la esfera y el plano proyectivo

**Definición 3.11.** Una *representación de superficie* es una representación poligonal en la que cada símbolo  $a \in S$  ocurre exactamente dos veces en  $W_1, \dots, W_k$ , contando cada símbolo  $a$  y cada símbolo  $a^{-1}$  como una ocurrencia.

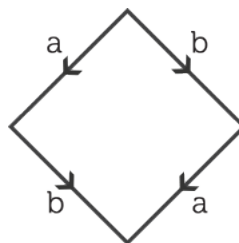
**Corolario 3.12.** La realización geométrica de una representación de superficie es una superficie cerrada.

*Demostración.* Consecuencia directa del teorema (3.4). □

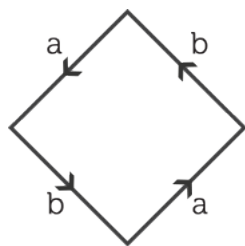
**Ejemplos 3.13.** Algunas representaciones de superficies comunes son:



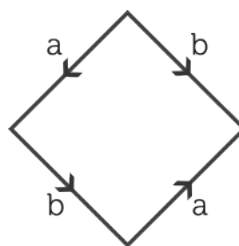
(a) La esfera:  
 $\langle a, b | abb^{-1}a^{-1} \rangle$



(b) El toro:  
 $\langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle$



(c) El plano proyectivo:  
 $\langle a, b | abab \rangle$



(d) La botella de Klein:  
 $\langle a, b | abab^{-1} \rangle$



**Definición 3.14.** Si dos representaciones  $R_1$  y  $R_2$  tienen realizaciones geométricas homeomorfas, entonces decimos que son *topológicamente equivalentes*. Y lo denotamos como  $R_1 \cong R_2$ .

**Teorema 3.15.** *Toda superficie cerrada admite una representación poligonal.*

*Demostración.* Sea  $M$  una superficie cerrada. Por el teorema de triangulación (2.16)  $M$  es homeomorfa al poliedro de un complejo simplicial euclídeo  $K$  en el cual cada 1-símplice es la cara de exactamente dos 2-símplices.

A partir de este complejo simplicial podemos construir una representación de superficie  $R$  con una palabra de tamaño 3 por cada 2-símplice y cuyos lados tienen la misma letra si y sólo si corresponden al mismo 1-símplice. Queremos saber si la realización geométrica de  $R$  es isomorfa al poliedro de  $K$ . Si  $P = P_1 \sqcup \dots \sqcup P_k$  es el conjunto dado por la unión disjunta de los 2-símplices de  $K$ , entonces tenemos dos aplicaciones cocientes  $\pi_K : P \rightarrow |K|$  y  $\pi_R : P \rightarrow |R|$  que comparten dominio, así que basta demostrar que hacen las mismas identificaciones. Ambas aplicaciones son inyectivas en el interior de cada 2-símplice, ambas identifican a los mismos lados (por construcción) y ambas identifican vértices sólo con otros vértices.

Para completar la prueba necesitamos mostrar que la identificación de vértices de  $\pi_K$  es inducida únicamente por cómo identifica los lados, al igual que  $\pi_R$ . Para demostrar esto, supongamos que  $v \in K$  es un vértice. Necesariamente  $v$  debe pertenecer a un 1-símplice, porque de lo contrario sería un punto aislado de  $|K|$ , contradiciendo el hecho de que  $|K|$  es una 2-variedad. Además este 1-símplice es la cara de exactamente dos 2-símplices. Diremos que dos 2-símplices  $\sigma$  y  $\sigma'$  que contienen a  $v$  están *conectados por lado en  $v$*  si hay una sucesión  $\sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_k = \sigma'$  de 2-símplices que contienen a  $v$ , de manera tal que  $\sigma_i$  comparte un lado con  $\sigma_{i+1}$  para todo  $i = 1, \dots, k-1$ . Claramente la conexión por lado es una relación de equivalencia sobre el conjunto de los 2-símplices que contienen a  $v$ , así que para terminar la demostración basta ver que hay una única clase de equivalencia. Suponiendo lo contrario, podemos agrupar a los 2-símplices que contienen a  $v$  en dos conjuntos disjuntos  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$  y  $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$  de manera tal que cualesquiera  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$  están conectados por lado, pero ningún  $\tau_i$  está conectado a ningún  $\sigma_j$ . Tomemos  $\epsilon$  lo suficientemente pequeño para que  $B_\epsilon(v)$  intersekte únicamente símplices que contengan a  $v$ . Entonces  $B_\epsilon(v) \cap |K|$  es un abierto de  $|K|$  y

CAPÍTULO 3. REPRESENTACIÓN POLIGONAL

---

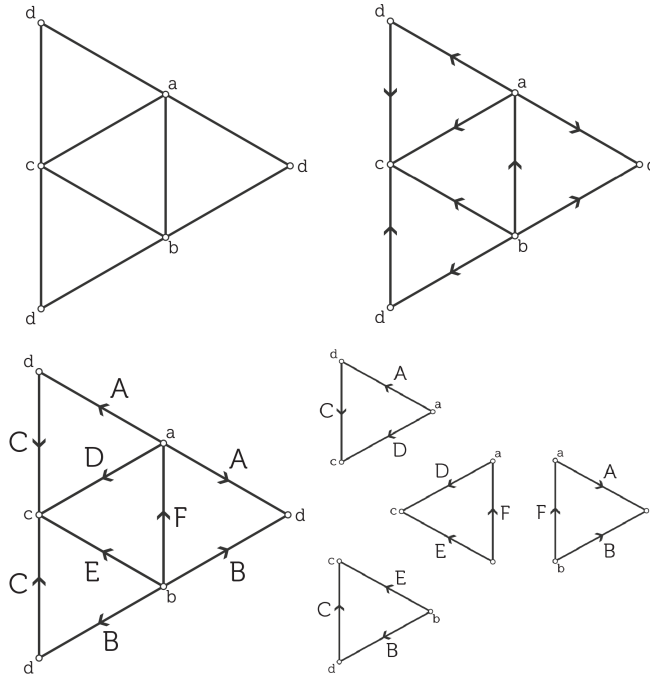
$v$  tiene un entorno  $W \subseteq B_\epsilon(v) \cap |K|$  que es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  y entonces  $W \setminus \{v\}$  es conexo. Pero, por otro lado, tomando:

$$U = W \cap (\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_k) \setminus \{v\} \quad V = W \cap (\tau_1 \cup \dots \cup \tau_k) \setminus \{v\}$$

tenemos que tanto  $U$  como  $V$  son abiertos en  $K$  (porque su intersección con cada símplice es abierta en el símplice) y además  $W = U \cup V$  es una desconexión de  $W$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

**Observación 3.16.** El teorema (3.15) es el recíproco del teorema (3.4).

Lo que nos permite el teorema anterior, intuitivamente y en la práctica, es tomar una triangulación, nombrar cada lado de los símplices de la triangulación y colocar “flechas” desde el vértice inicial hasta el vértice final arbitrariamente, conservando la dirección en cada paso. Luego forma una representación de superficie observando cada triángulo para generar palabras de tamaño 3, donde el signo de cada letra viene dado por la dirección de las flechas (horario o antihorario).



$$P = \{A, B, C, D, E, F \mid ACD^{-1}, EC^{-1}B^{-1}, DE^{-1}F, AFB^{-1}\}$$

**Lema 3.17.** Sean  $P_1$  y  $P_2$  polígonos convexos con el mismo número de lados, y sea  $f : \partial P_1 \rightarrow \partial P_2$  un isomorfismo simplicial. Entonces  $f$  induce un homeomorfismo  $F : P_1 \rightarrow P_2$ .

*Demostración.* Sea  $p_i \in \text{Int}(P_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Por la convexidad, el segmento de línea de  $p_i$  a cada vértice de  $P_i$  está completamente contenido en  $P_i$ . Además,  $p_i$  junto con cualquier par de vértices adyacentes de  $P_i$  generan un símplice. De esta manera la unión disjunta de cada uno de estos símplices con cada segmento de línea interno y sus puntos finales forman un complejo simplicial cuyo poliedro es  $P_i$ . Ahora basta tomar  $F : P_1 \rightarrow P_2$  como la aplicación simplicial cuya restricción a  $\partial P_1$  es  $f$  y envía  $p_1$  a  $p_2$ .  $\square$

**Definición 3.18.** Sea  $e \notin S$  y sea  $W_1W_2$  la palabra obtenida tras concatenar  $W_1$  y  $W_2$ . Las siguientes operaciones son *transformaciones elementales* de una representación poligonal:

1. Reflejar:  $\langle S|a_1a_2\dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S|a_m^{-1}\dots a_2^{-1}a_1^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle$ .
2. Rotar:  $\langle S|a_1a_2\dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S|a_2\dots a_ma_1, W_2, \dots, W_k \rangle$ .
3. Cortar: Si  $W_1$  y  $W_2$  tienen tamaño al menos 2,  $\langle S|W_1W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S, e|W_1e, e^{-1}W_2, \dots, W_k \rangle$ .
4. Pegar: Si  $W_1$  y  $W_2$  tienen tamaño al menos 2,  $\langle S, e|W_1e, e^{-1}W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S|W_1W_2, \dots, W_k \rangle$ .
5. Doblar: Si  $W_1$  tiene tamaño al menos 3,  $\langle S, e|W_1ee^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S|W_1, W_2, \dots, W_k \rangle$ .  $W_1$  puede tener tamaño 2 si la representación tiene una sola palabra.
6. Desdoblar:  $\langle S|W_1, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S, e|W_1ee^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle$ .

Así, la operación de reflejar actúa sobre la realización geométrica como si ésta fuese puesta frente a un espejo (ver figura 3.7). Algebraicamente consiste en cambiar al signo de cada lado e invertir su orden.

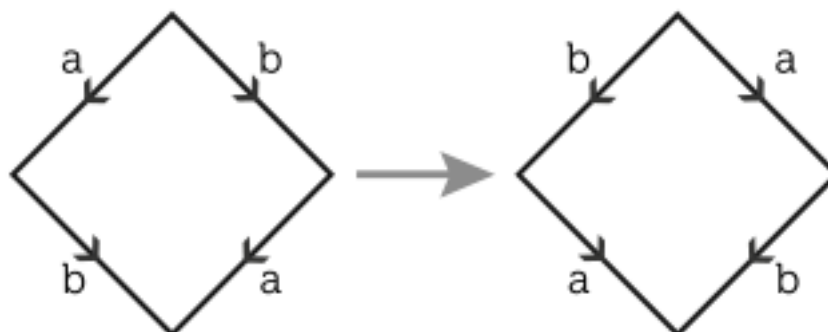


Figura 3.7: Reflejar

La operación de rotar actúa sobre la realización geométrica rotando  $90^\circ$  en sentido anti-horario (ver figura 3.8). Algebraicamente consiste en tomar el primer lado y colocarlo de último.

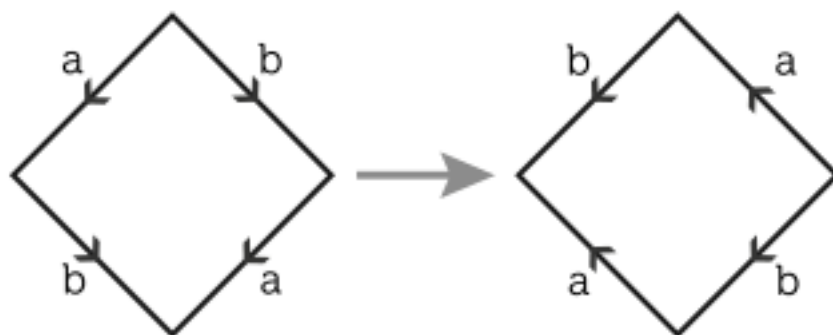


Figura 3.8: Rotar

Las operaciones de cortar y pegar actúan sobre la realización geométrica creando un lado nuevo a partir de dos vértices y separando las dos figuras resultantes, o uniendo dos figuras por lados con sentidos opuestos (ver figura 3.9). Algebraicamente consiste en unir dos palabras eliminando dos lados con signo opuesto.

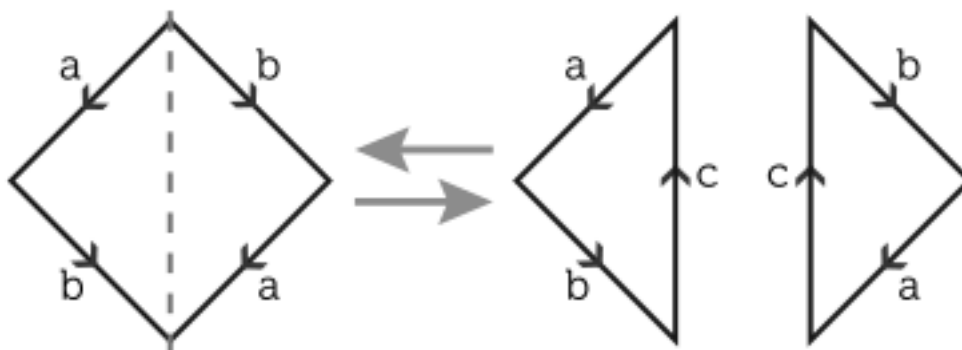


Figura 3.9: Cortar y pegar

Finalmente, las operaciones de doblar y desdoblar actúan sobre la realización geométrica creando dos lados de signo opuesto con un vértice en común a partir de un vértice existente (ver figura 3.10). Algebraicamente consiste en cancelar lados adyacentes de signo opuesto.

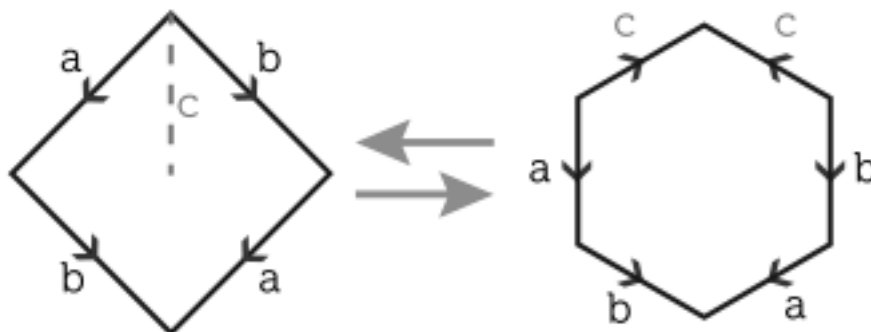


Figura 3.10: Doblar y desdoblar

**Teorema 3.19.** *Las transformaciones elementales sobre una representación poligonal producen una representación topológicamente equivalente.*

*Demostración.* Note que cortar/pegar y doblar/desdoblar son operaciones inversas (y “simétricas” en cierto sentido), por lo tanto sólo es necesario probar que uno en cada par produce realizaciones geométricas homeomorfas.

1. Reflejar: Sea  $P$  la realización geométrica de  $a_1 \dots a_m$  y  $P'$  la realización geométrica de  $a_m^{-1} \dots a_1^{-1}$ . Como la reflexión es una transformación lineal, escogemos la matriz de reflexión como nuestro homeomorfismo;

claramente, ésta es biyectiva y bicontinua (por estar en un espacio de dimensión finita). Podemos extender el homeomorfismo a  $W_2, \dots, W_k$  a través de la identidad.

2. Rotar: Sea  $P$  la realización geométrica de  $a_1 \dots a_m$  y  $P'$  la realización geométrica de  $a_2 \dots a_m a_1$ . Como en el caso de reflejar, escojemos la matriz de rotación como nuestro homeomorfismo y extendemos a  $W_2, \dots, W_k$  a través de la identidad.
3. Cortar: Sean  $P_1$  y  $P_2$  las realizaciones geométricas de la palabra  $W_1 e$  y la palabra  $e^{-1} W_2$  respectivamente, y sea  $P$  la realización geométrica de  $W_1 W_2$ . Sean  $\pi : P \rightarrow S$  y  $\pi_{12} : P_1 \sqcup P_2 \rightarrow S'$  las dos aplicaciones cocientes. Sea  $e$  el segmento de línea desde el primer vértice hasta el último vértice de  $W_1$  en  $P$ . Por convexidad,  $e$  está en  $P$ . Definimos la función continua  $f : P_1 \sqcup P_2 \rightarrow P$  que toma a cada lado de  $P_1$  o de  $P_2$  a su correspondiente lado en  $P$ , y que identifica a  $e$  con  $e^{-1}$ . Entonces, por el lema de la aplicación cerrada  $f$  es una aplicación cociente. Así tanto  $\pi \circ f$  como  $\pi_{12}$  hacen las mismas identificaciones desde el mismo dominio. Entonces por la unicidad de la aplicación cociente,  $S \simeq S'$ . Podemos extender el homeomorfismo a  $W_3, \dots, W_k$  a través de la identidad.
4. Doblar: Por hipótesis  $W_1$  tiene al menos tamaño 3. Sean  $P$  y  $P'$  las realizaciones geométricas de la palabra  $W_1$  y la palabra  $W_1 e e^{-1}$  respectivamente, y sean  $\pi : P \rightarrow S$  y  $\pi' : P' \rightarrow S'$  los dos mapas cocientes. Sea  $f : P' \rightarrow P$  la única aplicación simplicial que envía a cada lado de  $P'$  a su correspondiente lado en  $P$  con la misma etiqueta. Igual que antes, tanto  $\pi \circ f$  como  $\pi$  son mapas cocientes que hacen la misma identificación con el mismo dominio; por lo tanto los espacios cocientes son homeomorfos. Podemos extender el homeomorfismo a  $W_2, \dots, W_k$  a través de la identidad.

□

De esta manera, hemos reducido el problema geométrico original, de hallar superficies homeomorfas a partir de una superficie original, a un problema algebraico.

### 3.3. Suma conexa de superficies

En esta sección construiremos una manera natural de unir dos superficies para obtener otra superficie.

**Definición 3.20.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos,  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$  y  $f : A \rightarrow Y$  una función continua. Definimos la relación de equivalencia  $\sim$  sobre la unión disjunta  $X \sqcup Y$  dada por  $a \sim f(a)$  para todo  $a \in A$ . El espacio cociente resultante  $(X \sqcup Y / \sim)$  denotado como  $X \cup_f Y$  es la *suma amalgamada*.

**Definición 3.21.** Dadas dos superficies  $M_1$  y  $M_2$  y dos bolas coordenadas  $B_1 \subset M_1$  y  $B_2 \subset M_2$ . Los subespacios  $M'_i = M_i \setminus B_i$  son  $n$ -variedades con borde <sup>1</sup>, los cuales son homeomorfos a  $S^1$ . Sea  $f : \partial M'_1 \rightarrow \partial M'_2$  cualquier homeomorfismo, entonces la suma amalgamada  $M'_1 \cup_f M'_2$  es la suma conexa de  $M_1$  y  $M_2$  denotada por  $M_1 \# M_2$ .

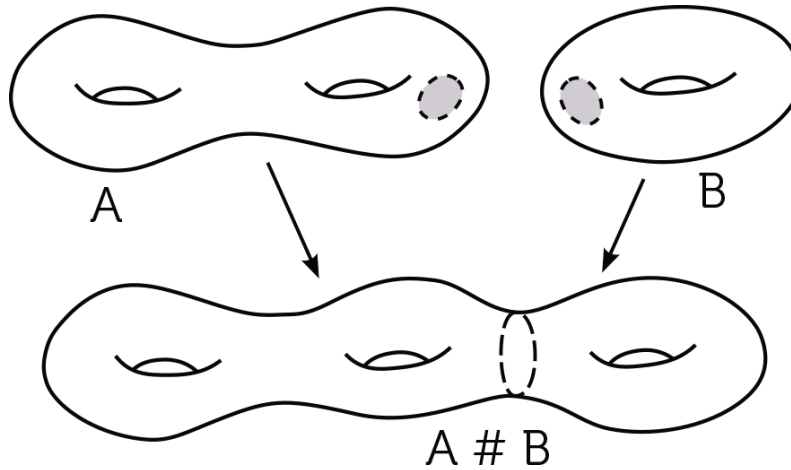


Figura 3.11: Suma conexa

Empíricamente, la suma conexa consiste en cortar círculos en las superficies y luego pegar las mismas por los bordes de los círculos.

<sup>1</sup>En esta definición utilizamos el concepto de *superficie con borde* que no ha sido dado anteriormente. No abordaremos este tema de lleno, pues escapa al alcance de esta disertación. En líneas generales, el borde de una variedad de dimensión  $n$  resulta ser una variedad de dimensión  $n - 1$ . Referimos al lector al capítulo 22 de [Tu, 2011] para un estudio detallado de las mismas.

**Teorema 3.22.** Sean  $M_1$  y  $M_2$  superficies con representaciones poligonales  $\langle S_1|W_1 \rangle$ ,  $\langle S_2|W_2 \rangle$ , donde  $S_1$  y  $S_2$  son disjuntos. Entonces  $\langle S_1, S_2|W_1W_2 \rangle$  es una representación de la suma conexa  $M_1\#M_2$ .

*Demostración.* Sean  $a, b, c \notin S_1, S_2$ . Tomando la representación de  $M_1$  y cortando y doblando obtenemos que  $\langle S_1|W_1 \rangle \cong \langle S_1, a, b, c|W_1c^{-1}b^{-1}a^{-1}, abc \rangle$ . El interior del triángulo formado por  $a, b$  y  $c$  es homeomorfo a una bola coordinada; por lo tanto  $\langle S_1, a, b, c|W_1c^{-1}b^{-1}a^{-1} \rangle \cong M'_1 = M_1 \setminus B_1$ . Un argumento análogo muestra que  $\langle S_2, a, b, c|abcW_2 \rangle \cong M'_2 = M_2 \setminus B_2$ . Por lo tanto  $\langle S_1, S_2, a, b, c|W_1c^{-1}b^{-1}a^{-1}, abcW_2 \rangle$  es una representación de  $M'_1 \sqcup M'_2$ . Finalmente pegando a través de  $a$  y doblando dos veces obtenemos que  $\langle S_1, S_2|W_1W_2 \rangle \cong M_1\#M_2$   $\square$

**Corolario 3.23.** La suma conexa  $M_1\#M_2$  de dos superficies conexas es una superficie conexa.

*Demostración.* Consecuencia directa de los teoremas (3.3) y (3.4)  $\square$



# Capítulo 4

## El teorema de clasificación

Las primeras versiones del Teorema de Clasificación fueron empezadas por Möbius [Möbius, 1861] en 1861 y por Jordan [Jordan, 1866] en 1866, pero ellos no contaban con las herramientas técnicas necesarias y mucho menos con la definición de espacio topológico. Versiones con definiciones y “demostraciones” más rigurosas fueron dadas más tarde por von Dyck [von Dyck, 1888] en 1888 y otros autores, pero fueron necesarios unos sesenta años para que finalmente una demostración rigurosa fuera dada por Brahana [Brahana, 1921] en 1921.

Hoy en día el teorema de clasificación para superficies cerradas es un tema que se aborda en la mayoría de los libros de topología algebraica, bien sea como un resultado o como punto de partida. Demostraciones completas y rigurosas pueden ser encontradas en Ahlfors y Sario [Ahlfors and Sario, 1960], Munkres [Munkres, 2000] y Lee [Lee, 2011]. Una historia completa y detallada sobre el teorema de clasificación se puede encontrar en [Gallier and Xu, 2013].

En este capítulo desarrollaremos con detalle la demostración dada por Chen Hui y George Teo en [Hui and Teo, 2011] que está basada en la demostración de Lee en [Lee, 2011]. La demostración se divide en varios pasos, que son pequeñas demostraciones sucesivas, y la mayoría son el resultado de operaciones por transformaciones elementales.

Para mayor entendimiento del lector, daremos un par de lemas y un par de definiciones que harán la explicación un poco más simple.

**Lema 4.1.** *La botella de Klein es homeomorfa a  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$*

*Demostración.* Una representación de la botella de Klein es  $\langle a, b | abab^{-1} \rangle$ . Usando transformaciones elementales:

$$\begin{aligned} \langle a, b | abab^{-1} \rangle &\cong \langle a, b, c | abc, c^{-1}ab^{-1} \rangle && \text{(cortar por } c) \\ &\cong \langle a, b, c | bca, a^{-1}cb \rangle && \text{(rotar y reflejar)} \\ &\cong \langle b, c | bbcc \rangle && \text{(pegar por } a \text{ y rotar)} \end{aligned}$$

□

**Lema 4.2.** *La suma conexa  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$  es homeomorfa a  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ .*

*Demostración.* Por el lema anterior,  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \cong \mathbb{K} \# \mathbb{P}^2 = \langle a, b, c | abab^{-1}cc \rangle$ . Usando transformaciones elementales:

$$\begin{aligned} \langle a, b, c | abab^{-1}cc \rangle &\cong \langle a, b, c, d | cabd^{-1}, dab^{-1}c \rangle && \text{(rotar y cortar por } d) \\ &\cong \langle a, b, c, d | abd^{-1}c, c^{-1}ba^{-1}d^{-1} \rangle && \text{(rotar y reflejar)} \\ &\cong \langle a, b, c, d | abd^{-1}ba^{-1}d^{-1} \rangle && \text{(pegar por } c) \\ &\cong \langle a, b, c, d | a^{-1}d^{-1}abd^{-1}b \rangle && \text{(rotar)} \\ &\cong \langle a, b, c, d | a^{-1}d^{-1}abe, e^{-1}d^{-1}b \rangle && \text{(cortando por } e) \\ &\cong \langle a, b, c, d | ea^{-1}d^{-1}ab, b^{-1}de \rangle && \text{(rotar y reflejar)} \\ &\cong \langle a, b, c, d | ea^{-1}d^{-1}ade \rangle && \text{(pegar por } b) \\ &\cong \langle a, b, c, d | a^{-1}d^{-1}adee \rangle && \text{(rotar)} \end{aligned}$$

□

**Definición 4.3.** Sean  $U, V$  y  $W$  tres palabras (pueden ser vacías). Un par de lados son *torcidos* si aparecen como  $UaVaW$ .

**Definición 4.4.** Sean  $U, V$  y  $W$  tres palabras (pueden ser vacías). Un par de lados son *complementarios* si aparecen como  $UaVa^{-1}W$ .

**Notación 4.5.** *En algunos casos, cuando sea claro cuáles elementos conforman  $S$ , escribiremos la representación poligonal  $\langle S | a_1 \dots a_k \rangle$  simplemente como  $a_1 \dots a_k$ .*

**Teorema 4.6 (Teorema de clasificación).** *Toda variedad de dimensión 2, no vacía, conexa y cerrada<sup>1</sup> es homeomorfa a uno de los siguientes:*

- $\mathbb{S}^2$
- *La suma conexa de una o más copias de  $\mathbb{T}^2$ .*
- *La suma conexa de una o más copias de  $\mathbb{P}^2$ .*

*Demostración.* Sea  $M$  una superficie conexa, cerrada y no vacía. Por el teorema (3.15)  $M$  tiene una representación poligonal. Entonces:

Paso 1  $M$  admite una representación que tiene una sola cara (una sola palabra). Como  $M$  es conexa, cada par de palabras debe tener al menos una letra en común con otra palabra, entonces pegando repetidas veces (con las rotaciones y reflexiones que sean necesarias), obtenemos una representación poligonal de una sola palabra.

Paso 2  $M$  es una esfera o admite una representación sin lados complementarios adyacentes. Si tenemos un par de lados adyacentes podemos doblar para removerlos. El único caso en el que un par de lados adyacentes no pueden ser removidos de esta manera es si es el único par de letras restantes, i.e.:  $aa^{-1}$ , en cuyo caso tenemos una esfera.

A partir de aquí asumiremos que  $M$  no es una esfera y por lo tanto no tiene lados complementarios adyacentes.

Paso 3  $M$  admite una representación en la cual todos los lados torcidos son adyacentes. Supongamos que tenemos un par de lados torcidos que no son adyacentes. Entonces la palabra tendría la forma  $VaWa$ , donde  $V$  y  $W$  son palabras no vacías. Usando transformaciones elementales:

$$\begin{aligned} \langle a, V, W | VaWa \rangle &\cong \langle a, b, V, W | Vab, b^{-1}Wa \rangle && \text{(cortar por } b) \\ &\cong \langle a, b, V, W | bVa, a^{-1}W^{-1}b \rangle && \text{(rotar y reflejar)} \\ &\cong \langle a, b, V, W | VW^{-1}bb \rangle && \text{(pegar por } a \text{ y rotar)} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Aunque en esta disertación estamos considerando superficies cerradas, i.e., compactas y sin bordes, es posible conseguir en [Seifert and Threlfall, 1897] una versión de este teorema para superficies con bordes.

En este proceso hemos reemplazado el par torcido  $a, a$  por el par torcido  $b, b$ , que es adyacente. Más aún, no hemos separado otros pares adyacentes. Podríamos haber introducido nuevos pares torcidos no adyacentes (por la reflexión de  $W$ ), pero hemos reducido el número total de pares no adyacentes (sin importar si son torcidos o complementarios) en al menos 1. Entonces, como  $S$  es finito podemos repetir el proceso sin afectar al par torcido  $bb$  hasta no tener más pares torcidos no adyacentes. También podríamos haber introducido pares adyacentes complementarios; éstos pueden ser eliminados repitiendo el paso 2, que no incrementa el número total de pares no adyacentes.

Paso 4  $M$  admite una representación en la cual todos los vértices son identificados con un único punto. Recordemos que tenemos una relación de equivalencia en el conjunto de los lados. La identificación de los lados, como hemos visto antes, fuerza una relación de equivalencia en el conjunto de los vértices. Escojamos alguna clase de equivalencia de vértices  $[v]$  y supongamos que existen vértices que no están en dicha clase. Entonces existe un lado  $a$  que conecta  $[v]$  a otra clase de vértices  $[w]$ . Como esto es una representación de superficie existe otro lado que toca a  $a$  en  $[v]$ . El otro lado que toca a  $a$  en  $[v]$  no puede ser  $a^{-1}$  porque lo habríamos eliminado en el paso 2 y tampoco puede ser  $a$  porque entonces los puntos iniciales y finales estarían identificados bajo el mapa cociente y este no es el caso. Entonces llamaremos al otro lado  $b$  y al otro vértice  $x$ .

Como los lados vienen identificados en pares (por ser una representación de superficie), entonces en algún otro lugar del polinomio existe un lado  $b$  o un lado  $b^{-1}$ . Supongamos que es  $b^{-1}$  (la demostración para  $b$  es similar excepto que se debe realizar una reflexión adicional). Entonces la representación tiene la forma  $baXb^{-1}Y$ , donde  $X$  y  $Y$  son dos palabras desconocidas, que no son nulas simultáneamente. Utilizando transformaciones elementales:

$$\begin{aligned} \langle a, b, X, Y | baXb^{-1}Y \rangle &\cong \langle a, b, c, X, Y | bac, c^{-1}Xb^{-1}Y \rangle && \text{(cortar por } c) \\ &\cong \langle a, b, c, X, Y | acb, b^{-1}Yc^{-1}X \rangle && \text{(rotar)} \\ &\cong \langle a, c, X, Y | acYc^{-1}X \rangle && \text{(pegar por } c) \end{aligned}$$

Recordemos que el vértice en la clase  $[v]$  era el vértice inicial de  $a$  y el

vértice final de  $b$ . En la nueva representación hemos reducido en uno el número de vértices en  $[v]$  y hemos incrementado el número de vértices en  $[w]$  en uno. Podríamos haber introducido nuevos pares complementarios adyacentes, así que debemos repetir el paso 2 para removerlos. Repetir el paso 2 puede reducir el número de vértices en  $[v]$  (al doblar dos lados), pero no lo puede incrementar. De esta manera, al repetir el proceso finitas veces podemos eliminar la clase de  $[v]$ . Finalmente iteramos este proceso para cada clase de equivalencia hasta que sólo quede una.

Paso 5 *Si la representación tiene algún par complementario  $a...a^{-1}$  entonces ésta tiene otro par complementario  $b...b^{-1}$  entrelazados, es decir,  $a...b...a^{-1}...b^{-1}$ . Supongamos por el contrario que este no es el caso. Entonces la representación tiene la forma  $aXa^{-1}Y$ , donde  $X$  e  $Y$  contienen únicamente pares torcidos adyacentes, y los pares complementarios (que son no adyacentes por el paso 2) ocurren exclusivamente dentro de  $X$  o dentro de  $Y$  (para no entrelazarse con el par  $a...a^{-1}$ ). Entonces cada lado de  $X$  está relacionado únicamente con otro lado de  $X$ , y lo mismo ocurre para  $Y$ . Además los puntos finales de  $a$  y de  $a^{-1}$  están en  $X$  y los puntos iniciales de  $a$  y de  $a^{-1}$  están en  $Y$ . Esto es una contradicción, porque tendría que existir más de una clase de equivalencia para los vértices, pero según el paso 4 existe sólo una.*

Paso 6  *$M$  admite una representación en la cual todos los pares complementarios entrelazados ocurren juntos, sin intervención de otros lados, i.e.:  $...aba^{-1}b^{-1}...$  Si la representación está dada por  $W a X b Y a^{-1} Z b^{-1}$ , con  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  palabras, utilizando transformaciones elementales obtenemos:*

$$\begin{aligned}
& \langle a, b, W, X, Y, Z | WaXbYa^{-1}Zb^{-1} \rangle \\
& \cong \langle a, b, c, W, X, Y, Z | WaXc, c^{-1}bYa^{-1}Zb^{-1} \rangle \quad (\text{cortar por } c) \\
& \cong \langle a, b, c, W, X, Y, Z | XcWa, a^{-1}Zb^{-1}c^{-1}bY \rangle \quad (\text{rotar}) \\
& \cong \langle b, c, W, X, Y, Z | XcWZb^{-1}c^{-1}bY \rangle \quad (\text{pegar por } a) \\
& \cong \langle b, c, W, X, Y, Z | c^{-1}bYXcWZb^{-1} \rangle \quad (\text{rotar}) \\
& \cong \langle b, c, d, W, X, Y, Z | c^{-1}bYXcd, d^{-1}WZb^{-1} \rangle \quad (\text{cortar por } d) \\
& \cong \langle b, c, d, W, X, Y, Z | YXcdc^{-1}b, b^{-1}d^{-1}WZ \rangle \quad (\text{rotar}) \\
& \cong \langle b, c, d, W, X, Y, Z | YXcdc^{-1}d^{-1}WZ \rangle \quad (\text{pegar por } b) \\
& \cong \langle b, c, d, W, X, Y, Z | cdc^{-1}d^{-1}WZYX \rangle \quad (\text{rotar})
\end{aligned}$$

Vale la pena acotar que este paso no requiere reflejar. Repitiendo este proceso para cara grupo de lados entrelazados obtenemos el resultado deseado.

Paso 7  $M$  es homeomorfo a la suma conexa de uno más toros o a la suma conexa de uno o más planos proyectivos. Habiendo realizado los pasos del 1 al 6, todos los lados torcidos ocurren adyacentes ( $aa$ , plano proyectivo) y todos los pares complementarios ocurren entrelazados ( $bc b^{-1} c^{-1}$ , toro). Si la representación consiste exclusivamente en uno de estos dos casos, entonces hemos terminado. Si la representación contiene ambos, entonces es de la forma  $aabcb^{-1}c^{-1}X$  o de la forma  $bc b^{-1} c^{-1}aaX$ . De cualquier manera, por el lema (4.2),  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 \cong \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ . Así si se tienen planos proyectivos y toros en la representación, podemos eliminar todas las ocurrencias de los toros y obtenemos la suma conexa de planos proyectivos.

□

# Capítulo 5

## Espacio tangente

Con el fin de construir la cohomología de De Rham, que no es más que la cohomología de las formas diferenciales, construiremos un álgebra graduada sobre la estructura diferencial de las variedades suaves. Para esto, primero debemos desarrollar el concepto de espacio tangente.

Así como en la geometría diferencial definimos el espacio tangente a una superficie en un punto, es posible generalizar dicho concepto a las variedades. Utilizaremos el concepto de derivación para obtener vectores tangentes que servirán como base para dicho espacio.

### 5.1. Funciones suaves entre variedades

A través de las cartas locales es posible obtener el concepto de diferenciabilidad para funciones entre variedades.

**Definición 5.1.** Dado un punto  $p$  en una variedad  $M$ . Dos funciones  $f$  y  $g$ , cuyos dominios contienen a  $p$ , definen el mismo *germen en  $p$*  si existe un entorno  $U$  de  $p$  tal que  $f$  y  $g$  restringidas a  $U$  son iguales, es decir,  $f(u) = g(u)$  para todo  $u \in U$ .

De esta manera definimos una relación de equivalencia donde  $f \sim_p g$  si  $f$  y  $g$  definen el mismo germen. Llamamos a la clase de equivalencia el *germen* de la función.

**Definición 5.2.** Sean  $M$  y  $N$  dos variedades de dimensión  $m$  y  $n$  respectivamente. Sea  $F : M \rightarrow N$  una función entre variedades. Diremos que  $F$  es de clase  $C^\infty$  en un punto  $p$  de  $M$  si existen cartas  $(U, \phi)$  alrededor de  $p$  y  $(V, \psi)$  alrededor de  $F(p)$ , tales que la composición  $\phi^{-1} \circ F \circ \psi$  es  $C^\infty$ .

**Proposición 5.3.** Si  $(U, \phi)$  es una carta de una variedad  $M$  de dimensión  $n$ , entonces  $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo.

*Demostración.* Como por definición  $\phi$  es un homeomorfismo, es suficiente demostrar que  $\phi$  y  $\phi^{-1}$  son  $C^\infty$ . Pero, como  $\mathbb{1}_{\phi(U)} \circ \phi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \phi(U)$  y  $\phi \circ \phi^{-1} \circ \mathbb{1}_{\phi(U)} : \phi(U) \rightarrow \phi(U)$  son simplemente la identidad, entonces son  $C^\infty$ .  $\square$

**Notación 5.4.** Llamaremos  $C_p^\infty(M, \mathbb{R})$  al conjunto de germenos en  $p$  de funciones  $C^\infty$  a valores reales.

## 5.2. Vectores tangentes

El conjunto  $C_p^\infty(M, \mathbb{R})$  junto con las operaciones de suma y multiplicación de funciones forman un anillo; agregando la multiplicación por escalares reales forman un álgebra sobre  $\mathbb{R}$ . Esto nos permite llegar a la siguiente definición:

**Definición 5.5.** Sea  $M$  una variedad y  $p \in M$ . Una *derivación en  $p$*  es una función lineal  $D : C_p^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple:

$$D(fg) = D(f)g(p) + fD(g)(p) \quad (5.1)$$

La condición (5.1) también se conoce como la ley de Leibniz.

**Definición 5.6.** Sea  $M$  una variedad y  $p \in M$ . Un vector tangente a  $M$  en  $p$  es una derivación en  $p$ .

## 5.3. El diferencial de una función

**Definición 5.7.** Sea  $F : N \rightarrow M$  una función  $C^\infty$  entre dos variedades. En cada punto  $p \in N$  la función  $F$  induce una aplicación lineal  $F_* : T_p N \rightarrow$



$T_{F(p)}M$  entre los espacios tangentes, llamada el diferencial de  $F$  en  $p$ , dada de la siguiente manera:

$$(F_{*,p}(X_p))f = X_p(f \circ F)$$

Donde  $X_p$  está en  $T_pN$  y  $f$  está en  $C_{F(p)}^\infty(M)$ .

**Teorema 5.8** (Regla de la cadena). Sean  $F : N \rightarrow M$  y  $G : M \rightarrow P$  funciones  $C^\infty$  entre variedades y sea  $p \in N$ , entonces:

$$(G \circ F)_{*,p} = G_{*,F(p)} \circ F_{*,p}$$

*Demostración.* Sea  $X_p \in T_pN$ , y sea  $f$  una función  $C^\infty$  en  $G(F(p)) \in P$ . Entonces, por definición de diferencial:

$$((G \circ F)_*X_p)f = X_p(f \circ G \circ F)$$

Por otro lado

$$((G_* \circ F_*)X_p)f = (G_*(F_*X_p))f = (F_*X_p)(f \circ G) = X_p(f \circ G \circ F).$$

□

**Observación 5.9.** Sea  $M$  una variedad. El diferencial de la identidad  $\mathbb{1}_M : M \rightarrow M$  en cualquier punto  $p \in M$  es la identidad:

$$\mathbb{1}_{T_pM} : T_pM \rightarrow T_pM$$

ya que, para cualquier  $X_p \in T_pM$  y cualquier  $f \in C_P^\infty(M)$  tenemos que:

$$((\mathbb{1}_M)_*X_p)f = X_p(f \circ \mathbb{1}_M) = X_p f$$

**Corolario 5.10.** Si  $F : N \rightarrow M$  es un difeomorfismo de variedades y  $p \in N$ , entonces  $F_* : T_pN \rightarrow T_{F(p)}M$  es un isomorfismo de espacios vectoriales.

*Demostración.* Como  $F$  es un difeomorfismo, entonces existe una función  $F^{-1} : M \rightarrow N$  que es  $C^\infty$ , tal que  $F^{-1} \circ F = \mathbf{1}_N$  y tal que  $F \circ F^{-1} = \mathbf{1}_M$ . Entonces usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}(F^{-1} \circ F)_* &= F_*^{-1} \circ F_* = (\mathbf{1}_N)_* = \mathbf{1}_{T_p N} \\ (F \circ F^{-1})_* &= F_* \circ F_*^{-1} = (\mathbf{1}_M)_* = \mathbf{1}_{T_p M}\end{aligned}$$

Por lo tanto  $F_*$  es un isomorfismo con inversa  $F_*^{-1}$  □

## 5.4. Base para el espacio tangente

**Notación 5.11.** Denotaremos como  $r_1, \dots, r_n$  a las coordenadas estándar de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $(U, \phi)$  una carta en un punto  $p$  en una variedad  $M$  de dimensión  $n$ , denotamos como  $x_i = r_i \circ \phi$ .

**Corolario 5.12.** Sea  $(U, \phi)$  una carta en un punto  $p$  en una variedad  $M$  de dimensión  $n$ , entonces el espacio tangente  $T_p M$  tiene dimensión  $n$ .

*Demostración.* como  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo sobre su imagen (proposición 5.3) por el corolario (5.10) su diferencial  $\phi_* : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$  es un isomorfismo de espacios vectoriales. Por lo tanto la dimensión de  $T_p M$  es  $n$ . □

**Definición 5.13.** Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$ , sea  $(U, \phi)$  una carta y  $f$  una función  $C^\infty$ . Para  $p \in M$  definimos la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x_i$  en  $p$  como:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p f = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p = \left. \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial r_i} \right|_{\phi(p)} = \left. \frac{\partial}{\partial r_i} \right|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1})$$

**Proposición 5.14.** Sea  $(U, \phi = (U, x_1, \dots, x_n))$  una carta que contiene a  $p \in M$ . Entonces tenemos que:

$$\phi_* \left( \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right) = \left. \frac{\partial}{\partial r_i} \right|_{\phi(p)}$$

*Demostración.* Para cualquier  $f \in C_{\phi(p)}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) f &= \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f \circ \phi) && \text{(definición de diferencial)} \\ &= \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_{\phi(p)} (f \circ \phi \circ \phi^{-1}) && \text{(definición de derivada parcial)} \\ &= \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_{\phi(p)} f \end{aligned}$$

□

**Proposición 5.15.** *Sea  $(U, \phi)$  una carta que contiene a  $p$ , entonces el espacio tangente  $T_p M$  tiene base:*

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p$$

*Demostración.* Un isomorfismo entre espacios vectoriales envía a una base en una base. Por las proposiciones (5.3) y (5.10) entonces la carta  $\phi$  es un isomorfismo entre espacios vectoriales. Además, por la proposición (5.14) el isomorfismo envía  $\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p$  hacia  $\frac{\partial}{\partial r_1} \Big|_{\phi(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial r_n} \Big|_{\phi(p)}$  que es una base de  $T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$ . Por lo tanto  $\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p$  es una base de  $T_p M$  □

# Capítulo 6

## Formas diferenciales

Las formas diferenciales son una herramienta que permite dar un enfoque al cálculo en varias variables, independiente de un sistema de coordenadas. La visión moderna de las formas diferenciales se debe a Élie Cartan.

### 6.1. Producto exterior

El producto wedge o producto exterior es un elemento importante que permite (entre otras cosas) desarrollar un álgebra lineal de dimensión finita y libre de coordenadas. El estudio del mismo puede ser encontrado fácilmente en la literatura y está íntimamente relacionado con el producto tensorial, ya que no es más que un cociente de un producto tensorial<sup>1</sup>.

Para esta sección consideremos un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$  con base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  sobre el cuerpo  $K$ . Su dual  $V^* = \{\omega : V \rightarrow K \mid \omega \text{ es lineal}\}$  con base  $\{e^1, \dots, e^n\}$ .

Además, consideremos que el cuerpo  $K$  tiene característica 0.

**Definición 6.1.** Sean  $V$  y  $W$  dos espacio vectoriales. Sean  $v, v_i \in V$ ,  $w, w_i \in W$  y  $\lambda \in K$ . Llamamos el *producto tensorial* de  $V$  y  $W$  al espacio vectorial

---

<sup>1</sup>Sería imposible desarrollar la teoría completa para el producto exterior en esta disertación, pero recomendamos el libro gratuito publicado por Sergei Winitzki [Winitzki, 2010] en la página web [www-lulu.com](http://www-lulu.com).

generado por los elementos de la forma  $v \otimes w$  que cumplen las siguientes propiedades:

1.  $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$
2.  $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$
3.  $\alpha(v \otimes w) = (\alpha v) \otimes w = v \otimes (\alpha w)$

A partir de esta definición podemos construir el álgebra tensorial. Para esto necesitamos la siguiente definición.

**Definición 6.2.** Sea  $V$  un espacio vectorial. Para cualquier entero no negativo  $k$ , definimos la  $k$ -ésima potencia tensorial de  $V$  como el producto tensorial de  $V$   $k$ -veces consigo mismo, es decir:

$$T^k V = V^{\otimes k} = V \otimes \dots \otimes V$$

Por convención tenemos que  $T^0 V = K$ .

**Definición 6.3.** Sea  $V$  un espacio vectorial. El álgebra tensorial  $T(V)$  viene dada por la suma directa:

$$T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(V) = K \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V)$$

**Observación 6.4.** Evidentemente el álgebra tensorial es un álgebra graduada.

**Definición 6.5.** El álgebra exterior  $\wedge(V)$  es el álgebra cociente generada por dividir el álgebra tensorial entre el ideal  $I$  generado por todos los elementos de la forma  $x \otimes x$ , tales que  $x \in V$ . Es decir:

$$\wedge(V) = T(V)/I$$

cuyo producto  $\wedge$  de dos elementos viene dado por:

$$a \wedge b = a \otimes b \pmod{I}$$

donde  $\text{mod} I$  representa que identificamos a cada elemento de  $I$  con la clase del 0.

Análogamente llamaremos a  $\wedge^k(V) = T^k(V)/I$  la  $k$ -ésima potencia exterior.

**Proposición 6.6.** *El producto exterior es anticonmutativo.*

*Demostración.* Sean  $x$  e  $y$  en  $V$ . Como  $(x + y) \wedge (x + y)$  está en el anillo, tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= (x + y) \wedge (x + y) \\ 0 &= (x \wedge x) + (x \wedge y) + (y \wedge x) + (y \wedge y) \\ 0 &= (x \wedge y) + (y \wedge x) \\ x \wedge y &= -y \wedge x \end{aligned}$$

□

**Corolario 6.7.** *Sean  $x_1, \dots, x_k$  elementos de  $V$  y sea  $\sigma$  una permutación sobre  $1, \dots, k$ . Entonces:*

$$x_{\sigma(1)} \wedge x_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(k)} = \text{sgn}(\sigma)x_1 \wedge \dots \wedge x_k$$

## 6.2. Formas diferenciales

Denotaremos como  $T_p^*M$  del espacio dual al espacio tangente a  $M$  en  $p$ . La base dual de  $T_p^*M$  la denotaremos como  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ .

Recordemos que por propiedades del dual  $dx_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_j^i$ .

**Definición 6.8.** Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$ . Sea  $T_p^*M$  el dual de  $T_pM$ . El *álgebra de las  $k$ -formas diferenciales*  $\Omega^k(M)$  de  $M$  es la unión de las  $k$ -ésimas potencias exteriores sobre cada punto de  $M$ ,<sup>2</sup> es decir:

$$\Omega^k(M) = \bigsqcup_{p \in M} \bigwedge^k (T_p^*M)$$

**Definición 6.9.** El álgebra de las formas diferenciales de  $M$  viene dado por:

$$\Omega(M) = \bigsqcup_{p \in M} \bigwedge (T_p^*M)$$

---

<sup>2</sup>También conocido como fibrado.

**Definición 6.10.** Una  $k$ -forma diferencial  $\omega \in \Omega^k(M)$  viene dada por:

$$\omega = \sum a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Donde  $a_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(M)$

En particular tomaremos  $f \in \Omega^0(M)$  como el conjunto de las funciones suaves.

# Capítulo 7

## La cohomología de De Rham

La cohomología de De Rham es una herramienta sumamente útil para expresar propiedades básicas de las variedades suaves como conexidad, simple-conexidad y orientabilidad.

Aunque no trabajaremos este aspecto de lleno, es notable que el producto wedge otorga al espacio vectorial de las formas diferenciales una estructura con producto (un álgebra) y que ésta induce en la cohomología de De Rham una estructura de anillo. En líneas generales el conjunto formado por la suma directa de los grupos de cohomología es un anillo anticonmutativo graduado que, a través del pullback, proporciona un functor contravariante de la categoría de las variedades  $C^\infty$  a la categoría de los anillos anticonmutativos graduados.

### 7.1. Derivada exterior

**Definición 7.1.** Sea  $M$  una variedad suave y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave (i.e.  $f \in \Omega^0(M)$ ). El *diferencial* de  $f$  está dado por:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

**Definición 7.2.** Si  $\omega$  es una  $k$ -forma, la *derivada exterior* es el operador  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  dado por:



$$d\omega = \sum da_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

A continuación damos, sin demostrar, algunas propiedades de la derivada exterior <sup>1</sup>.

**Proposición 7.3.** *La derivada exterior satisface las siguiente propiedades:*

1.  $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 d(\omega_2)$
2.  $d(d\omega) = d^2\omega = 0$

*Demostración.* La propiedad 1 resulta de un computo directo y la propiedad alternante del producto wedge. La propiedad 2 es consecuencia de la propiedad 1. □

## 7.2. La cohomología de De Rham

**Definición 7.4.** Una  $k$ -forma  $\omega \in \Omega^k(M)$  es *cerrada* si  $d\omega = 0$ .

**Definición 7.5.** Una  $k$ -forma  $\omega \in \Omega^k(M)$  es *exacta* si  $\omega = d\phi$  para alguna  $(k-1)$ -forma  $\phi$ .

**Definición 7.6.** Sea  $Z^k(M)$  el espacio vectorial de todas las  $k$ -formas cerradas y sea  $B^k(M)$  el espacio vectorial de todas las formas exactas. Como toda forma exacta es cerrada, tenemos que  $B^k(M) \subset Z^k(M)$ . El  $k$ -ésimo grupo de cohomología de De Rham de una variedad  $M$ , denotado como  $H^k(M)$ , es el espacio vectorial cociente dado por:

$$H^k(M) = \{Z^k M / B^k(M)\}$$

**Notación 7.7.** *Tenemos que  $\ker(d) = \{k\text{-formas cerradas en } M\}$ , y además  $\text{Im}(d) = \{k\text{-formas exactas en } M\}$ .*

**Proposición 7.8.** *Si  $M$  es una variedad con  $k$  componentes conexas, entonces su grupo de cohomología de grado 0 es  $H^0(M) = \mathbb{R}^k$ .*

---

<sup>1</sup>Una demostración puede ser encontrada en [Tu, 2011].

*Demostración.* Como no hay 0-formas exactas, entonces  $H^0(M) = Z^0(M) = \{0\text{-formas cerradas}\}$ . Sea  $f$  una 0-forma cerrada en  $M$ , esto es,  $f$  es una función  $C^\infty$  en  $M$  tal que  $df = 0$ . Entonces, para cualquier carta  $(U, x_1, \dots, x_n)$  tenemos:

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Por lo tanto  $df = 0$  en  $U$  si y sólo si todas las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  se hacen 0 simultáneamente. Esto a su vez es equivalente a decir que  $f$  es constante en  $U$ . Por lo tanto las 0-formas cerradas de  $M$  son precisamente las funciones localmente constantes en  $M$ . Tales funciones deben ser constantes en cada componente conexa de  $M$ . Si  $M$  tiene  $k$  componentes conexas entonces una función localmente constante en  $M$  viene dada por una  $k$ -tupla de números reales (que son los valores de la función en cada componente conexa de  $M$ ). Por lo tanto  $H^0(M) = Z^0(M) = \mathbb{R}^k$ .  $\square$

**Proposición 7.9.** *Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$ , entonces los grupos de cohomología  $H^k(M) = 0$  para  $k > n$ .*

*Demostración.* Para cualquier punto  $p \in M$  entonces el espacio tangente  $T_p M$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Sea  $(U, x_1, \dots, x_n)$  una carta alrededor de  $p$  y sea  $\omega$  una  $k$ -forma en  $M$ . Tenemos que:

$$\omega = \sum a_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Pero como  $k > n$  entonces en el producto wedge debe haber al menos una repetición. Como el producto  $x \wedge x = 0$  entonces  $\omega = 0$ , es decir, la única  $k$ -forma es la  $k$ -forma 0.  $\square$

### 7.3. Pullback

A partir de una función  $C^\infty$  entre variedades  $f : M \rightarrow N$  podemos construir una aplicación lineal, en “dirección contraria”, que envía  $k$ -formas en  $N$  a  $k$ -formas en  $M$ . Esta aplicación es conocida como el pullback y tendrá propiedades convenientes<sup>2</sup> para el cálculo de la cohomología de De

---

<sup>2</sup>Por ejemplo su functorialidad.

Rham.

En esta sección daremos definiciones de como el pullback actúa sobre funciones  $C^\infty$  (i.e.: 0-formas), 1-formas y finalmente  $k$ -formas.

**Definición 7.10.** Sea  $F : M \rightarrow N$  una función suave entre variedades y sea  $h$  cualquier función en  $N$ . El *pullback de una función  $C^\infty$  por  $F$* , denotado como  $F^*$  se define como la precomposición  $F^*h = h \circ F$ .

**Observación 7.11.** Bajo esta terminología, una función  $h$  en  $N$  es  $C^\infty$  en una carta  $(U, \phi)$  si y sólo si su pullback  $(\phi^{-1})^*h$  a través de  $(\phi^{-1})^*$  es  $C^\infty$  en un subconjunto de  $\phi(U)$ .

**Definición 7.12.** Sea  $F : M \rightarrow N$  una función suave entre variedades, sea  $X_p \in T_pM$  y sea  $h$  una función en  $N$  a valores reales. El *diferencial  $F_*$*  :  $T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$  de  $F$  está dado por:

$$(F_*X)h = X(h \circ F)$$

**Definición 7.13.** Sea  $F : M \rightarrow N$  una función suave entre variedades, sea  $p \in M$ , sea  $X_p \in T_pM$  y sea  $\omega \in \Omega^1(M)$  una 1-forma. El *pullback de una 1-forma por  $F$*  se define como  $(F^*\omega)_p(X_p) = \omega_{F(p)}(F_*(X_p))$ .

**Proposición 7.14.** Sea  $F : M \rightarrow N$  una función suave entre variedades. Para cualquier  $h \in C^\infty(M)$  se cumple que  $F^*(dh) = d(F^*h)$ .

*Demostración.* Basta demostrar que para un punto arbitrario  $p \in M$  y cualquier vector tangente  $X_p \in T_pM$  se cumple:

$$(F^*dh)_p(X_p) = (dF^*h)_p(X_p) \tag{7.1}$$

Del lado izquierdo de (7.1) tenemos:

$$\begin{aligned} (F^*dh)_p(X_p) &= (dh)_{F(p)}(F_*(X_p)) && \text{(definición de pullback de 1-forma)} \\ &= (F_*(X_p))h && \text{(definición de } dh) \\ &= X_p(h \circ F) && \text{(definición de } F_*) \end{aligned}$$

Del lado derecho de (7.1) tenemos:

$$\begin{aligned} d(F^*h)_p(X_p) &= X_p(F^*h) && \text{(definición de diferencial de una función)} \\ &= X_p(h \circ F) && \text{(definición de } F_* \text{)} \end{aligned}$$

□

**Definición 7.15.** Sea  $F : M \rightarrow N$  una función suave entre variedades, sea  $p \in M$ , sea  $x_1, \dots, x_k \in T_p M$  y sea  $\omega \in \Omega^k(M)$  cualquier  $k$ -forma. El *pullback* de una  $k$ -forma por  $F$ , denotado como  $F^*$  se define como  $F^*(\omega)_p(x_1, \dots, x_k) = \omega_{F(p)}(dF x_1, \dots, dF x_k)$ .

En la siguiente proposición enunciamos, sin demostrar, algunas propiedades del pullback <sup>3</sup>.

**Proposición 7.16.** *El pullback es lineal y compatible con el producto wedge.*

**Notación 7.17.** *Dado cierto conjunto de subíndices ordenados de manera ascendente  $I = \{i_1, \dots, i_k | i_1 < \dots < i_k\}$  y una  $k$ -forma diferencial  $\omega$ , escribiremos  $\omega = \sum a_{i_1 \dots i_k} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k} = \sum a_I dy_I$ .*

**Proposición 7.18.** *El pullback conmuta con la derivada exterior.*

*Demostración.* Sea  $F : M \rightarrow N$  una función suave entre variedades y sea  $\omega \in \Omega^k(N)$ . Es suficiente verificar que  $dF^*\omega = F^*d\omega$  para un punto arbitrario  $p \in M$ . Esto reduce la demostración a un cálculo local, es decir, bajo una carta coordenada. Sea  $(V, dy_1, \dots, dy_n)$  una carta en  $N$  alrededor de  $F(p)$ , sea  $I = \{i_1, \dots, i_k | i_1 < \dots < i_k\}$  un conjunto de índices ordenados de manera ascendente, tenemos que

$$\omega = \sum a_I dy_I$$

para ciertas funciones suaves  $a_I$  en  $V$ . Entonces, por un lado:

$$\begin{aligned} F^*\omega &= \sum (F^*a_I) F^*d_I && \text{(proposición (7.16))} \\ &= \sum (a_I \circ F) dF_I && (F^*dy_i = dF^*y_i = d(y_i \circ F) = dF_i) \end{aligned}$$

y de aquí, sacando la derivada exterior a cada lado, tenemos:

---

<sup>3</sup>Una demostración puede ser encontrada en [Tu, 2011].

$$dF^*\omega = \sum d(a_I \circ F) \wedge dF_I \quad (7.2)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} F^*\omega &= (F^* \sum da_I \wedge dy_I) \\ &= \sum F^* da_I \wedge F^* dy_I = \sum d(F^* a_I) \wedge dF_I \quad (\text{proposición (7.16)}) \\ &= \sum d(a_I \circ F) \wedge dF_I \end{aligned}$$

Igualando con 7.2 tenemos:

$$dF^*\omega = F^* d\omega$$

□

Como corolario de la proposición anterior tenemos que el pullback envía formas cerradas a formas cerradas y formas exactas a formas exactas, lo que es de suma relevancia, pues da a conocer la importancia del pullback en cohomología; éste induce naturalmente una aplicación lineal entre los espacios cocientes de la cohomología de dos variedades. Lo que inspira la siguiente definición.

**Definición 7.19.** Dada una función  $F : M \rightarrow N$  suave entre variedades, su pullback  $F^*$  induce la *aplicación pullback en cohomología*  $F^\# : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$  dada por:

$$F^\#([\omega]) = [F^*(\omega)]$$

# Capítulo 8

## Invarianza Homotópica

Una de las propiedades más útiles de la cohomología de De Rham es su invarianza homotópica. Ella nos permitirá limitar el estudio de la cohomología de De Rham a un grupo reducido de variedades cerradas.

**Definición 8.1.** Dos funciones entre variedades  $f, g : M \rightarrow N$  son *homotópicas* si existe una función continua  $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ , tal que:

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad F(x, 1) = g(x)$$

Si la función  $F$  es suave diremos que  $f$  y  $g$  son  $C^\infty$ -homotópicas.

**Definición 8.2.** Una función  $f : M \rightarrow N$  es una *equivalencia homotópica* si tiene *inversa homotópica*, es decir, una función  $g : N \rightarrow M$  tal que  $f \circ g \sim \mathbb{1}_N$  y tal que  $g \circ f \sim \mathbb{1}_M$ .

**Definición 8.3.** Diremos que  $M$  es *homotópicamente equivalente* a  $N$  si existe una equivalencia homotópica entre  $M$  y  $N$ .

A continuación enunciaremos, sin demostrar, un resultado conocido como el *teorema de aproximación de Whitney*. Este teorema depende fuertemente de otro teorema muy conocido en la topología algebraica llamado el *teorema de incrustamiento de Whitney*. Una demostración detallada de este resultado puede ser encontrada en [Lee, 2012].

**Teorema 8.4 (Teorema de aproximación de Whitney).** Si  $F : M \rightarrow N$  es una función continua entre variedades suaves, entonces  $F$  es homotópica a una función suave  $\tilde{F} : M \rightarrow N$ .

**Corolario 8.5.** Sean  $F$  y  $G$  dos funciones suaves y homotópicas, entonces ellas son  $C^\infty$ -homotópicas.

**Teorema 8.6 (Axioma de homotopía).** Dos funciones suaves homotópicas  $F, G : M \rightarrow N$  inducen la misma función en homotopía (es decir, un pullback)  $F^\# = G^\# : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ .

*Demostración.* Para dos funciones  $C^\infty$ -homotópicas cualesquiera  $f$  y  $g$  definiremos la homotopía de cocadenas entre  $f^*$  y  $g^*$  como la colección de mapas  $h : \Omega^p(N) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$  desde el espacio de todas las  $p$ -formas en  $N$  hasta el espacio de todas las  $(p-1)$ -formas en  $M$  que, para cada  $p$ , satisface:

$$d(h\omega) + h(d\omega) = F^*\omega - G^*\omega \quad (8.1)$$

La existencia de este operador está demostrada en el lema (11.4) de [Lee, 2012].

Sean  $i_0(x) = (x, 0)$  y  $i_1(x) = (x, 1)$  dos funciones que van desde  $M$  hasta  $M \times [0, 1]$ . Claramente  $i_0$  es homotópica a  $i_1$  (la homotopía es la identidad de  $M \times [0, 1]$ ).

Sean  $F, G : M \rightarrow N$  dos funciones homotópicas y suaves. Por el corolario (8.5) existe una homotopía suave  $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$  desde  $F$  hasta  $G$ . Esto quiere decir que  $H \circ i_0 = F$  y que  $H \circ i_1 = G$ . Sea  $h' = h \circ H^* : \Omega^p(N) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$ , entonces:

$$\Omega^p(N) \xrightarrow{H^*} \Omega^p(M \times [0, 1]) \xrightarrow{h} \Omega^{p-1}(M)$$

Para cualquier  $\omega \in \Omega^p(N)$  tenemos que:

$$\begin{aligned} h'(d\omega) + d(h'\omega) &= h(H^*d\omega) + d(hH^*\omega) && \text{(definición de } h') \\ &= hd(H^*\omega) + dh(H^*\omega) && \text{(conmutatividad del pullback y } d) \\ &= i_1^*H^*\omega - i_0^*H^*\omega && \text{(ecuación (8.1) para } i_0^*, i_1^*) \\ &= (H \circ i_1)^*\omega - (H \circ i_0)^*\omega && \text{(pullback de la composición)} \\ &= G^*\omega - F^*\omega && \text{(definición de } H) \end{aligned}$$

Entonces, si  $\omega$  es cerrada, esta igualdad toma la siguiente forma en homotopías:

$$[h'(d\omega) + d(h'\omega)] = [G^*\omega - F^*\omega]$$

Como el pullback induce un mapa entre homotopías, tenemos:

$$[h'(d\omega) + d(h'\omega)] = G^\#[\omega] - F^\#[\omega]$$

es decir:

$$\begin{aligned} G^\#[\omega] - F^\#[\omega] &= [h'(d\omega) + d(h'\omega)] \\ &= d(h'\omega) && (d\omega = 0) \\ &= 0 && (d(h'\omega) \text{ es exacta}) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $F^\# = G^\#$ . □

**Teorema 8.7 (Invarianza homotópica).** *Sea  $F : M \rightarrow N$  una equivalencia homotópica entre  $M$  y  $N$  con inversa homotópica  $G : N \rightarrow M$ . Entonces  $H^k(M) = H^k(N)$  para todo  $k$ .*

*Demostración.* Por el teorema de aproximación de Whitney existen funciones suaves  $\tilde{F}$  y  $\tilde{G}$  homotópicas a  $F$  y  $G$  respectivamente. Sean  $H_F$  y  $H_G$  las homotopías entre  $F \simeq \tilde{F}$  y  $G \simeq \tilde{G}$  respectivamente. Entonces  $H = H_F \circ H_G$  es una homotopía entre  $\tilde{F} \circ \tilde{G} \simeq F \circ G$ . Pero como  $F \circ G \simeq \mathbb{1}_N$  tenemos que  $\tilde{F} \circ \tilde{G} \simeq \mathbb{1}_N$ .

Así que usando el axioma de homotopía tenemos que  $(\tilde{F} \circ \tilde{G})^* = (\mathbb{1}_N)^*$ , es decir,  $(\tilde{F})^* \circ (\tilde{G})^* = \mathbb{1}_{H^k(N)}$ . Usando un procedimiento análogo  $(\tilde{G})^* \circ (\tilde{F})^* \mathbb{1}_{H^k(M)}$ . De donde  $(\tilde{F})^*$  es biyectiva y por lo tanto un isomorfismo entre  $H^k(M)$  y  $H^k(N)$ . □

Este resultado es sumamente importante, porque entre una plétora de consecuencias establece que la cohomología de De Rham es un invariante topológico, hecho que no es evidente, pues no hay motivo para esperar que diferentes estructuras diferenciales sobre una misma variedad den como resultado la misma cohomología de De Rham.



# Capítulo 9

## La cohomología de las superficies cerradas

Hasta ahora hemos desarrollado dos herramientas de suma importancia: el teorema de clasificación de superficies cerradas y el teorema de invarianza homotópica de la cohomología de De Rham. Así, en lugar de tener que utilizar la sucesión de Mayer-Vietoris para calcular la cohomología de cada superficie cerrada, uniendo estos dos resultados podemos limitar el cálculo de la cohomología de De Rham de cualquier superficie cerrada a una de las estas tres superficies: la esfera, la suma conexa de  $g$  toros y la suma conexa de  $g$  planos proyectivos.

En este capítulo daremos un cálculo explícito de dichas superficies, y así un cálculo explícito de cualquier superficie cerrada.

Dada una variedad  $M$  de dimensión  $n$  y con  $c$  componentes conexas, por las proposiciones (7.8) y (7.9) sabemos que:

1.  $H^0(M) = \mathbb{R}^c$ .
2.  $H^k(M) = 0$  para todo  $k > n$ .

**Definición 9.1.** Diremos que una superficie es *orientable* si admite una representación poligonal sin lados torcidos. En caso contrario, diremos que la superficie es *no orientable*.

Esta definición coincide con la definición vista en Geometría Diferencial.

A continuación enunciaremos, sin demostrar, un resultado muy conocido en la topología algebraica, que es en realidad consecuencia directa del teorema de Stokes. Una demostración puede ser encontrada en [Andrews, 2009].

**Proposición 9.2.** *Sea  $M$  es una superficie compacta, conexa y de dimensión  $n$ . Entonces  $H^n(M) = \mathbb{R}$  si  $M$  es orientable y  $H^n(M) = 0$  si  $M$  es no orientable.*

**Proposición 9.3.** *Dada una sucesión exacta de espacios vectoriales de dimensión finita:*

$$0 \longrightarrow A^0 \xrightarrow{d_0} A^1 \xrightarrow{d_1} \dots \longrightarrow A^n \xrightarrow{d_n} 0$$

Tenemos que  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \dim(A^k) = 0$ .

*Demostración.* Fijemos  $d_{-1} = 0$ . Como cada  $d_k$  es lineal, por el teorema de rango-nulidad, tenemos que:

$$\dim(A^k) = \dim(\text{Im}(d_k)) + \dim(\text{Ker}(d_k)) = \text{rk}(d_k) + \text{nul}(d_k)$$

Pero como la sucesión es exacta entonces  $\text{nul}(d_k) = \text{rk}(d_{k-1})$ , y así:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim(A^k) &= A^0 - A^1 + A^2 - A^3 + \dots + (-1)^n A^n \\ &= \text{rk}(d_{-1}) + \text{rk}(d_0) - \text{rk}(d_0) - \text{rk}(d_1) + \dots \\ &= \text{rk}(d_{-1}) + (-1)^n \text{rk}(d_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

## 9.1. Cohomología de la circunferencia

Para calcular la cohomología de la circunferencia  $\mathbb{S}^1$  utilizaremos la sucesión de Mayer-Vietoris cubriendo a la circunferencia con dos arcos de circunferencia

abiertos  $U$  y  $V$  que se intersectan. Entonces, por el teorema de Mayer-Vietoris la siguiente sucesión es exacta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow & H^2(\mathbb{S}^1) & \longrightarrow & H^2(U) \oplus H^2(V) & \longrightarrow & H^2(U \cap V) & \longrightarrow \dots \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & & & & & \delta & \\
 \rightarrow & H^1(\mathbb{S}^1) & \longrightarrow & H^1(U) \oplus H^1(V) & \longrightarrow & H^1(U \cap V) & \rightarrow \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & & & & & \delta & \\
 0 & \longrightarrow & H^0(\mathbb{S}^1) & \longrightarrow & H^0(U) \oplus H^0(V) & \longrightarrow & H^0(U \cap V) \rightarrow
 \end{array}$$

Como los arcos abiertos son difeomorfos a intervalos abiertos, y éstos a su vez son difeomorfos a  $\mathbb{R}$ , tenemos que  $H^0(U) = H^0(V) = \mathbb{R}$  por tener una única componente conexa,  $H^1(U) = H^1(V) = 0$  porque toda 1-forma en  $\mathbb{R}$  es exacta y  $H^k(U) = H^k(V) = 0$  para  $k > 1$ .

Por otro lado, la intersección  $U \cap V$  es difeomorfa a dos intervalos abiertos disjuntos de donde  $H^0(U \cap V) = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ .

Además, como  $\mathbb{S}^1$  tiene una sola componente conexa sabemos que  $H^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$ .

Reemplazando los espacios conocidos en la sucesión de Mayer-Vietoris obtenemos:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0$$

Finalmente, utilizando la proposición (9.3) tenemos que  $H^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$ .

Es decir:

$$H^i(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & : i = 0, 1 \\ 0 & : i > 1 \end{cases}$$

□

## 9.2. Cohomología de la esfera

Comenzamos por dar un cubrimiento de la esfera por dos “semi-esferas” abiertas  $U$  y  $V$  que se solapan. De esta manera  $U$  y  $V$  son difeomorfas a discos abiertos (donde toda forma cerrada es exacta por el lemma de Poincaré) y  $U \cap V$  es homotópica a  $\mathbb{S}^1$ .

Como la esfera tiene una única componente conexa, tenemos que  $H^0(\mathbb{S}^2) = \mathbb{R}^1$ . Además, como la esfera es conexa, compacta y de dimensión 2, tenemos que  $H^2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{R}$ .

De aquí, usando el teorema de Mayer-Vietoris:

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^1(\mathbb{S}^2) \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0$$

Finalmente utilizando la proposición (9.3) tenemos que  $H^1(\mathbb{S}^2) = 0$ .

Es decir:

$$H^i(\mathbb{S}^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & : i = 0, 2 \\ 0 & : \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

□

## 9.3. Cohomología del toro

El toro puede ser escrito como la unión de dos abiertos  $U$  y  $V$ , donde cada uno es difeomorfo a  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  (que a su vez es homotópico a  $\mathbb{S}^1$ ) y cuya intersección  $U \cap V$  es difeomorfa a dos copias de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . De esta manera sabemos que:

- $H^0(\mathbb{T}^2) = H^0(U) = H^0(V) = \mathbb{R}$
- $H^1(U \cap V) = \mathbb{R}^2$
- $H^1(U) = H^1(V) = \mathbb{R}$
- $H^1(U \cap V) = \mathbb{R}^2$
- $H^2(U) = H^2(V) = H^2(U \cap V) = 0$

■  $H^2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R}$

Así, reemplazando en la sucesión de Mayer-Vietoris tenemos:

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow H^1(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0$$

Finalmente, utilizando la proposición (9.3) tenemos que  $H^1(\mathbb{T}^1) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ .

Es decir:

$$H^i(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & : i = 0, 2 \\ \mathbb{R}^2 & : i = 1 \\ 0 & : \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

□

## 9.4. Cohomología de la superficie orientable de género $g$

Llamaremos a la suma conexas de  $g$  toros la *superficie orientable de género  $g$* , denotada como  $M_g$ .

A continuación enunciaremos, sin demostrar, una manera de calcular de cohomología de un toro punzado<sup>1</sup>. Una demostración puede ser encontrada en [Andrews, 2009] y en [Tu, 2011].

**Proposición 9.4.** *Sea  $M$  una variedad compacta, orientada y de dimensión  $n > 1$ . Sea  $p \in M$ , entonces  $H^n(M - \{p\}) = 0$*

De la proposición anterior podemos deducir  $H^1(M_g - \{p\})$ . Sea  $M_g$  la unión de dos conjuntos  $U$  y  $V$ , donde  $U$  es homotópico a  $M_g - \{p\}$  y  $V$  es homotópico a un disco abierto que contiene a  $p$ . Entonces,  $U \cap V$  será homotópico a  $S^1$ . Usando el teorema de Mayer-Vietoris obtenemos:

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^1(M_g) \rightarrow H^1(M_g - \{p\}) \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0$$

---

<sup>1</sup>Es decir, el toro menos un punto.

De aquí, utilizando la proposición (9.3) tenemos que  $H^1(M_g) \cong H^1(M_g - \{p\})$ .

Finalmente, ponemos escribir la superficie  $M_g$  como la unión de los conjuntos  $A$  y  $B$ , donde  $A$  es difeomorfo a  $\mathbb{T}^2 - \{p\}$ ,  $B$  es difeomorfo a  $M_{g-1} - \{p\}$  y  $A \cap B$  es homotópico a  $\mathbb{S}^1$ . Una vez más, usando el teorema de Mayer-Vietoris:

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^1(M_g) \rightarrow H^1(M_{g-1}) \oplus \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0$$

Lo que implica que  $H^1(M_g) \cong H^1(M_{g-1}) \oplus \mathbb{R}^2$ . Entonces hemos definido recursivamente  $H^1(M_g)$ . En conclusión:

$$H^i(M_g) = \begin{cases} \mathbb{R} & : i = 0, 2 \\ \mathbb{R}^{2g} & : i = 1 \\ 0 & : \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

□

## 9.5. Cohomología del plano proyectivo

Como es presentado en [Seifert and Threlfall, 1897] y en muchos otros textos de geometría, el plano proyectivo menos un punto es homotópicamente equivalente a la banda de Möbius, y por lo tanto tiene un retracto de deformación<sup>2</sup> a la circunferencia. Entonces, podemos escribir  $\mathbb{P}^2$  como la unión de dos intervalos  $U$  y  $V$ , donde  $U$  es homotópico a  $\mathbb{P}^2 - p$ ,  $V$  es un disco que contiene a  $p$  y  $U \cap V$  es homotópico a  $\mathbb{S}^1$ .

Como  $\mathbb{P}^2$  tiene una única componente conexa y es no orientable tenemos que  $H^0(\mathbb{P}^2) = \mathbb{R}$  y  $H^2(\mathbb{P}^2) = 0$ . Así, reemplazando en la sucesión de Mayer-Vietoris:

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^1(\mathbb{P}^2) \rightarrow \mathbb{R} \oplus 0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

Finalmente, utilizando la proposición (9.3) tenemos que  $H^1(\mathbb{P}^2) = 0$ .

---

<sup>2</sup>Es decir, es homotópicamente equivalente.

Es decir:

$$H^i(\mathbb{P}^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & : i = 0 \\ 0 & : \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

□

## 9.6. Cohomología de la superficie no orientable de género $g$

Llamaremos a la suma conexa de  $g$  planos proyectivos la *superficie no orientable de género  $g$* , denotada como  $N_g$ .

Como  $N_g$  tiene una única componente conexa entonces  $H^0(N_g) = \mathbb{R}$ , y como  $N_g$  es no orientable entonces  $H^2(N_g) = 0$ . Falta calcular  $H^1(N_g)$ .

Podemos escribir  $N_g$  como la unión de dos abiertos  $U$  y  $V$ , donde  $U$  es homotópico a  $N_g - \{p\}$ ,  $V$  es homotópico a un disco que contiene a  $p$  y  $U \cap V$  es homotópico a  $\mathbb{S}^1$ . Usando el teorema de Mayer-Vietoris:

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^1(N_g) \rightarrow H^1(N_g - \{p\}) \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0 \xrightarrow{f} H^2(N_g - \{p\}) \xrightarrow{g} 0$$

Por la exactitud de la sucesión tenemos que  $Im(f) = Ker(g) = H^2(N_g - \{p\})$ . Además, por el teorema de rango-nulidad  $0 \cong Im(f) \oplus Ker(f)$ . Pero  $Ker(f) = 0$ , por lo tanto  $Im(f) = H^2(N_g - \{p\}) = 0$ . Utilizando la proposición (9.3) tenemos que  $H^1(N_g - \{p\}) \cong H^1(N_g) \oplus \mathbb{R}$ .

Por otro lado, podemos escribir  $N_g$  como la unión de dos abiertos  $U$  y  $V$ , donde  $U$  es homotópico a  $N_{g-1} - \{p\}$ ,  $V$  es homotópico a  $\mathbb{P}^2 - \{p\}$  y  $U \cap V$  es homotópico a  $\mathbb{S}^1$ . Reemplazando en la sucesión de Mayer-Vietoris:

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^1(N_g) \rightarrow H^1(N_{g-1} - \{p\}) \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} 0$$

Pero como  $H^1(N_g - \{p\}) \cong H^1(N_g) \oplus \mathbb{R}$  tenemos que:

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^1(N_g) \rightarrow H^1(N_{g-1}) \oplus \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} 0$$

## CAPÍTULO 9. LA COHOMOLOGÍA DE LAS SUPERFICIES CERRADAS

---

Utilizando la proposición (9.3) tenemos que  $H^1(N_g) \cong H^1(N_{g-1}) \oplus \mathbb{R}$ . Entonces hemos definido recursivamente  $H^1(N_g)$ . En conclusión:

$$H^i(N_g) = \begin{cases} \mathbb{R} & : i = 0 \\ \mathbb{R}^{g-1} & : i = 1 \\ 0 & : \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

□



# Apéndice A

## La sucesión de Mayer-Vietoris

La sucesión de Mayer-Vietoris es, junto con la invarianza homotópica, la herramienta más poderosa a nuestra disposición para el cálculo de la cohomología de De Rham de muchos espacios, ya que nos permite expresarlos como uniones de subvariedades con cohomologías más simples.

Con este propósito introduciremos algunos conceptos algebraicos y asumiremos que el lector está familiarizado con los conceptos de particiones de la unidad y de soporte de una función. Ideas más detalladas pueden ser encontradas en [Lee, 2011], [Tu, 2011] y en muchos otros libros de topología algebraica.

### A.1. Complejo de cocadenas

En esta sección daremos algunas definiciones básicas del álgebra homológica y además enunciaremos, sin dar una demostración, el lema del zigzag. Una demostración detallada de dicho lema se puede encontrar en [Tu, 2011].

Para simplificar, en esta sección omitiremos muchos de los subíndices que usaríamos normalmente para diferenciar las funciones. Esto es común en la literatura del álgebra homológica.

**Definición A.1.** Sea  $R$  un anillo conmutativo y sea  $A^*$  una sucesión de  $R$ -módulos y funciones lineales:

$$\dots \longrightarrow A^{p-1} \xrightarrow{d} A^p \xrightarrow{d} A^{p+1} \longrightarrow \dots$$

Una sucesión de esta forma se llama *complejo de cocadenas* si la composición de dos aplicaciones sucesivas de  $d$  es la función 0, es decir  $d \circ d = 0 : A^k \rightarrow A^{k+1}$ .

**Definición A.2.** Un complejo es una *sucesión exacta* si la imagen de cada  $d$  es igual al kernel de la siguiente. Es decir:

$$Im[d : A^{p-1} \rightarrow A^p] = Ker[d : A^p \rightarrow A^{p+1}]$$

**Definición A.3.** Si  $A^*$  es un complejo, entonces la imagen de cada  $d$  está contenida en el kernel de la siguiente. Definimos el *p-ésimo grupo de cohomología de  $A^*$*  como el módulo cociente:

$$H^p(A^*) = \frac{Ker[d : A^p \rightarrow A^{p+1}]}{Im[d : A^{p-1} \rightarrow A^p]}$$

**Definición A.4.** Sean  $A^*$  y  $B^*$  dos complejos de cocadenas. Una *transformación de cocadenas*  $F : A^* \rightarrow B^*$  es una colección de transformaciones lineales  $F : A^p \rightarrow B^p$ , tales que el siguiente diagrama conmuta en cada  $p$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^p & \xrightarrow{d} & A^{p+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow F & & \downarrow F & & \\ \dots & \longrightarrow & B^p & \xrightarrow{d} & B^{p+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

**Observación A.5.** El hecho de que  $F \circ d = d \circ F$  garantiza que  $F$  induce un mapa lineal en las cohomologías  $F^\# : H^p(A^*) \rightarrow H^p(B^*)$  en cada  $p$ , como ocurre en el caso de la cohomología de De Rham.

**Definición A.6.** Sean  $A^*$ ,  $B^*$  y  $C^*$  tres complejos de cocadenas. Una *sucesión exacta corta* de complejos consiste en:

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{F} B^* \xrightarrow{G} C^* \longrightarrow 0$$

de manera tal que cada sucesión

$$0 \longrightarrow A^p \xrightarrow{F} B^p \xrightarrow{G} C^p \longrightarrow 0$$

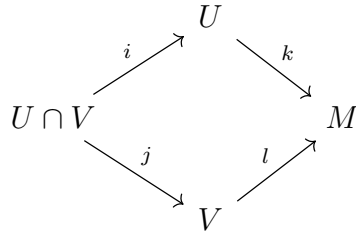
es exacta. Esto implica que  $F$  es inyectiva,  $G$  es sobreyectiva y  $ImF = KerG$ .

**Lema A.7 (Lema del Zigzag).** *Dada una sucesión exacta corta de complejos, para cada  $p$  existe un mapa lineal  $\delta : H^p(C^*) \rightarrow H^{p+1}(A^*)$  llamado homomorfismo conectante, tal que la siguiente sucesión es exacta:*

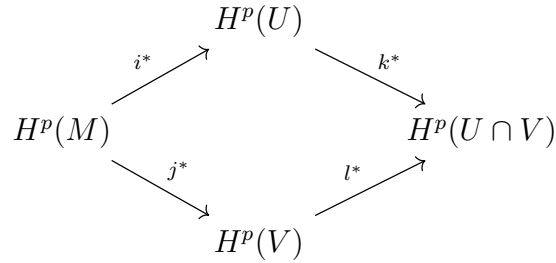
$$\dots \xrightarrow{\delta} H^p(A^*) \xrightarrow{F^*} H^p(B^*) \xrightarrow{G^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{F^*} \dots$$

## A.2. El teorema de Mayer-Vietoris

El contexto en el que queremos usar el lema del zigzag es el siguiente: Sea  $M$  una variedad suave y sean  $U$  y  $V$  abiertos de  $M$ , tales que  $U \cup V = M$ . Tenemos el siguiente diagrama de inclusiones:



que induce un diagrama en los espacios de las formas diferenciales:



En este diagrama, cada uno de los mapas es simplemente una restricción, e.g.:  $k^*\omega = \omega|_U$ .

Consideraremos la sucesión:

$$0 \longrightarrow \Omega^p(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \xrightarrow{i^* - j^*} \Omega^p(U \cap V) \longrightarrow 0 \quad (\text{A.1})$$

donde

$$(k^* \oplus l^*)\omega = (k^*\omega, l^*\omega) \quad (\text{A.2})$$

$$(i^* - j^*)(\omega, \eta) = i^*\omega - j^*\eta \quad (\text{A.3})$$

**Teorema A.8 (Teorema de Mayer-Vietoris).** *Sea  $M$  una variedad suave y sean  $U$  y  $V$  abiertos de  $M$  cuya unión es  $M$ . Por cada  $p$  existe un mapa lineal  $\delta : H^p(U \cap V) \rightarrow H^{p+1}(M)$  tal que la siguiente sucesión es exacta:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow & H^{p+1}(M) & \longrightarrow & \cdots & & & \\
 & \searrow & & & & & \\
 & & & & & & \\
 \rightarrow & H^p(M) & \xrightarrow{k^* \oplus l^*} & H^p(U) \oplus H^p(V) & \xrightarrow{i^* - j^*} & H^p(U \cap V) & \rightarrow \\
 & \searrow & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & \cdots & \xrightarrow{i^* - j^*} & H^{p-1}(U \cap V) & \rightarrow
 \end{array}
 \quad (\text{A.4})$$

Esta sucesión es conocida como la *sucesión de Mayer-Vietoris*.

*Demostración.* Basta demostrar que la sucesión (A.1) es exacta para cada  $p$ , ya que el resto de la demostración es consecuencia directa del lema del zigzag.

Primero debemos demostrar la exactitud en  $\Omega^p(M)$ , es decir, demostrar que  $k^* \oplus l^*$  es inyectiva. Sea  $x \in \Omega^p(M)$  tal que  $(k^* \oplus l^*)x = (x|_U, x|_V) = (0, 0)$ . Esto significa que las restricciones sobre  $U$  y  $V$  de  $x$  son ambas 0. Como  $U \cup V = M$  esto quiere decir que  $x$  es 0 en todo  $M$ , y por lo tanto  $k^* \oplus l^*$  es inyectiva.

Para demostrar la exactitud en  $\Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V)$  veamos que:

$$(i^* - j^*) \circ (k^* \oplus l^*)(x) = (i^* - j^*)(x|_U, x|_V) = x|_{U \cap V} - x|_{U \cap V} = 0$$

y por lo tanto  $Im(k^* \oplus l^*) \subset Ker(i^* - j^*)$ . Por otro lado supongamos que  $(u, v) \in \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V)$  tal que  $(i^* - j^*)(u, v) = 0$ . Esto significa que  $u|_{U \cap V} = v|_{U \cap V}$ , y por lo tanto existe una  $p$ -forma global  $x$  en  $M$  definida por:

$$x = \begin{cases} u & \text{en } U \\ v & \text{en } V \end{cases}$$

Claramente  $(u, v) = (k^* \oplus l^*)x$ , por lo tanto  $Ker(i^* - j^*) \subset Im(k^* \oplus l^*)$ .

Para demostrar la exactitud en  $\Omega^p(U \cap V)$  debemos demostrar que  $i^* - j^*$  es sobreyectiva. Sea  $x \in \Omega^p(U \cap V)$ , necesitamos demostrar que existe  $u \in \Omega^p(U)$ ,  $v \in V$  tales que:

$$x = (i^* - j^*)(u, v) = i^*u - j^*v = u|_{U \cap V} - v|_{U \cap V} \quad (\text{A.5})$$

Sea  $\{\phi, \psi\}$  la partición de la unidad subordinada al cubrimiento abierto  $U \cup V$ . Definamos  $u \in \Omega^p(U)$  como:

$$u = \begin{cases} \psi x & \text{en } U \cap V \\ 0 & \text{en } U \setminus \text{sop}\psi \end{cases}$$

En el conjunto  $(U \cap V) \setminus \text{sop}\psi$ , donde las definiciones se solapan, ambas dan 0, así que esto define a  $u$  como una  $p$ -forma suave. Análogamente definimos  $v \in \Omega^p(V)$  como:

$$v = \begin{cases} -\phi x & \text{en } U \cap V \\ 0 & \text{en } V \setminus \text{sop}\phi \end{cases}$$

Entonces tenemos:

$$u|_{U \cap V} - v|_{U \cap V} = \psi x - (-\phi x) = (\psi + \phi)x = x$$

Por lo tanto  $(i^* - j^*)$  es sobreyectiva. □

# Bibliografía

- [Ahlfors and Sario, 1960] Ahlfors, L. V. and Sario, L. (1960). *Riemann Surfaces*. Number 2 in Princeton Math. Princeton University Press.
- [Andrews, 2009] Andrews, B. (2009). Lectures on differential geometry. [http://maths-people.anu.edu.au/~andrews/DG/DG\\_chap15.pdf](http://maths-people.anu.edu.au/~andrews/DG/DG_chap15.pdf).
- [Bott and Tu, 1982] Bott, R. and Tu, L. W. (1982). *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1st edition.
- [Brahana, 1921] Brahana, H. R. (1921). Systems of circuits on two-dimensional manifolds. *The Annals of Mathematics*, 23(2):144–168.
- [Fulton, 1995] Fulton, W. (1995). *Algebraic Topology: A First Course*. Springer-Verlag, 1st edition.
- [Gallier and Xu, 2013] Gallier, J. and Xu, D. (2013). *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces*. Springer.
- [Greene, 2009] Greene, P. (2009). De Rham cohomology, connections, and characteristic classes. <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/REUPapers/Greene.pdf>.
- [Guardia, 2007] Guardia, T. (2007). Geometría diferencial. notas de curso.
- [Hui and Teo, 2011] Hui, C. and Teo, G. (2011). Classification of surfaces. <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Teo.pdf>.
- [Jordan, 1866] Jordan, C. (1866). Sur la déformation des surfaces. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2eme série(11):105–109.
- [Lee, 2011] Lee, J. M. (2011). *Introduction to Topological Manifolds*. Springer, 2nd edition.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [Lee, 2012] Lee, J. M. (2012). *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2nd edition.
- [Möbius, 1861] Möbius, A. F. (1861). Zur theorie der polyëder und der elementarverwandtschaft. *Oeuvres Complètes*. Tome 2:519–559.
- [Moise, 1977] Moise, E. E. (1977). *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Springer.
- [Munkres, 1984] Munkres, J. R. (1984). *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley.
- [Munkres, 2000] Munkres, J. R. (2000). *Topology*. Prentice Hall, second edition.
- [Radó, 1925] Radó, T. (1925). Über den begriff der riemannschen fläche. *Acta Litt. Sci. Szeged*, (2).
- [Óscar Cabezón, 2014] Óscar Cabezón (2014). Teorema de clasificación de superficies compactas. Tesis de grado, Universidad de Valladolid. Facultad de Ciencias.
- [Seifert and Threlfall, 1897] Seifert, H. and Threlfall, W. (1897). *A Textbook of Topology*. Academic Press, first edition.
- [Sempliner, 2013] Sempliner, J. (2013). A primer on the de rham cohomology and spectral sequences. <http://math.uchicago.edu/may/REU2013/REUPapers/Sempliner.pdf>.
- [Thomassen, 1977] Thomassen, C. (1977). The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces. *Am. Math. Mon.*, (99).
- [Tu, 2011] Tu, L. W. (2011). *An Introduction to Manifolds*. Springer, 2nd edition.
- [von Dyck, 1888] von Dyck, W. (1888). Beiträge zur analysis situs. *Mathematische Annalen*, (32):457–512.
- [Winitzki, 2010] Winitzki, S. (2010). Linear algebra via exterior products. <http://www.lulu.com/shop/sergei-winitzki/linear-algebra-via-exterior-products/ebook/product-17462089.html>.