

# **TRABAJO DE GRADO**

## **SIMULACIÓN NUMÉRICA DE UN FLUJO CAVITANTE 2D NO ISOTERMICO EN UN DUCTO CONVERGENTE DIVERGENTE**

Presentado ante la ilustre  
Universidad Central de Venezuela  
por el ingeniero mecánico  
Johane H. Bracamonte B.  
para optar al título de  
Magister Scientiarum  
en Ingeniería Mecánica

Tutor: Prof. PhD. Ing. Eugenio Sansone

Caracas, 2009



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
COMITÉ ACADÉMICO DE POSGRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA

VEREDICTO


Quienes suscriben, Miembros del Jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo de Grado presentado por JOHANE BRACAMONTE C.I. 17.064.459, bajo el título *Simulación numérica del flujo cavitante 2D no isotérmico en un ducto convergente divergente*, a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al Grado de Magister Scientiarum en Ingeniería Mecánica, dejan constancia de lo siguiente:

1. Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los Miembros del Jurado, éste fijó el día miércoles 16 de Diciembre de 2009, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la sala No 213. de la Escuela de Ingeniería Mecánica de esta casa de estudios, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el Jurado todo conforme a lo dispuesto en los artículos 44, 49, 50, 51 y 52 del Reglamento de Estudios de Postgrado.
2. Finalizada la defensa pública del trabajo, el Jurado decidió aprobarlo por unanimidad por considerar, sin hacerse solidario de las ideas expuestas por el autor, que se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

Para dar este veredicto, el Jurado estimó que la obra examinada representa una contribución importante en el estudio de los flujos turbulentos cavitantes, donde fueron resueltas las ecuaciones de Navier-Stokes, continuidad y energía y donde se emplearon ecuaciones de cierre para la modelación del flujo turbulento mediante la técnica de vórtices grandes (LES), así como ecuaciones de cierre para las propiedades físicas del agua como sustancia pura, basadas en ecuaciones de estado actualizadas y correlaciones dependientes de distintas variables de estado como la presión, la temperatura y la densidad, las cuales fueron incorporadas en un modelo numérico que fue resuelto mediante el método del elemento finito. Cabe destacar que el trabajo analizado, plantea excelentes perspectivas para la realización de nuevas investigaciones en este campo.

En fe de lo cual se levanta la presente Acta, a los 16 días del mes de Diciembre de 2009 dejándose constancia que, conforme a lo dispuesto en la normativa jurídica vigente, actuó como Coordinador del Jurado el Profesor EUGENIO SANSONE.

  
M.Sc. FRANKLIN BADUY

  
DR. M.Sc. EUGENIO SANSONE

  
M.Sc. CRISTÓBAL QUEVEDO

**Bracamonte B., Johane H.**

## **SIMULACIÓN NUMÉRICA DE UN FLUJO CAVITANTE 2D NO ISOTERMICO EN UN DUCTO CONVERGENTE DIVERGENTE**

**Tutor: Prof. PhD. Ing. Eugenio Sansone, Caracas, Universidad Central de Venezuela, Escuela de Ingeniería Mecánica. 2009 n° pag. 91**

**Palabras Claves:** CAVITACIÓN, SIMULACIÓN NUMÉRICA, MODELO DE MEZCLA HOMOGÉNEA.

En el presente trabajo se desarrolla un modelo para la simulación de cavitación en un ducto convergente divergente tipo Venturi utilizando el modelo de mezcla homogénea, que consiste simular el flujo multifásico como un único fluido de propiedades variables. El modelo consiste en la solución simultánea de las ecuaciones de *momentum*, *continuidad*, *energía* y *una ecuación de estado*, en donde las propiedades del fluido son calculadas como un promedio ponderado entre el aporte de la fase líquida y la fase vapor. La ecuación de estado y las propiedades de mezcla dependen de la fracción volumétrica de vapor, la cual es calculada fuera del sistema de ecuaciones antes descrito. El proceso de formación de vapor fue modelado como un proceso isentálpico y la propagación de dicha fase fue considerada al relacionar los gradientes de densidad en función de la presión con la velocidad del sonido en la mezcla. El cálculo de las propiedades de cada una de las fases, así como el cálculo de propiedades termodinámicas asociadas a la estimación de la fracción volumétrica fueron realizados utilizando las ecuaciones propuestas por la *Asociación Internacional para las Propiedades del Agua y el Vapor (IAPWS)* de reciente publicación. El flujo cavitante a ser simulado se caracteriza por un alto número de Reynolds por lo que resultó necesario tomar en cuenta fenómenos de turbulencia que fueron simulados con un *Modelo de Grandes Vortices* donde los esfuerzos de Reynolds de subrejilla fueron considerados utilizando un modelo modificado de la viscosidad turbulenta de Smagorinsky. El modelo fue implementado en un código para el cálculo de flujos monofásicos utilizando el Método de Elementos Finitos en su formulación tradicional (Bubnov-Galerkin). El modelo planteado presentó fuertes inestabilidades numéricas que impidieron la obtención de resultados, sin embargo, al retirar las ecuaciones relacionadas a la propagación de vapor se logró reproducir una condición estacionaria de cavitación incipiente, en donde ocurre el cambio de fase sin que se logre el transporte de vapor por efectos del flujo. Se concluye que el modelo es inadecuado para la simulación numérica de la cavitación y que resulta necesaria su reformulación, ya sea implementando ecuaciones de estado más complejas que consideren los efectos dinámicos del transporte de la fase vapor, o a través de la implementación de una ecuación de transporte para la fracción volumétrica de vapor.

**Bracamonte B., Johane H.**

**NUMERICAL SIMULATION OF 2D NON ISOTHERMAL  
CAVITATING FLOWS IN A CONVERGENT-DIVERGENT  
VENTURI TYPE DUCT**

**Tutor: Prof. PhD. Ing. Eugenio Sansone, Caracas, Universidad Central de  
Venezuela, Escuela de Ingeniería Mecánica. 2009 n° pag. 91**

**Key Words:** CAVITATION, NUMERICAL SIMULATION, HOMOGENEOUS MIXTURE MODEL.

In this report a model for the numerical simulation of cavitating flows in venturi type ducts is developed. The two phase flow is simulated as a single fluid with variable properties which are calculated as a weighted average between the properties of the liquid and vapour phases. The model consists of the momentum, continuity, energy and state equations for the mixture. The physical properties of the mixture and the state equation are dependent on the void fraction which is calculated outside the equation system earlier described. The vapour generation process was modelled as an isenthalpic thermodynamic process, and the convection of vapour was taken into account by linking the gradient density with the sound velocity in the mixture. The equations recently published by the *International Association for the Properties of Water and Steam (IAPWS)* were used to calculate the physical properties of both phases. Turbulence was simulated using a Large Eddy Simulation approach implementing a modified Smagorinsky's model for the estimation of the Reynolds's sub grid stress tensor (SGS). The model was programmed into a code for the simulation of monophasic flows via Finite Element Method in its traditional formulation (Bubnov-Galerkin). The model showed strong numerical instability and no convergence of the solution was achieved, although, by removing the equations associated with the transport of vapour from the model, the convergence of a stable inception of cavitation was reproduced, meaning that, a little amount of vapour is generated but it is not dragged downstream by effects of the flow. It is concluded that the model is inadequate for the numerical simulation of cavitating flows, and that further research is needed for the formulation of state equations that include the dynamic effect of vapour transport. Another proposal for further works in the field is to add a transport equation for the void fraction that could bring more stability to the numerical system.

# INDICE

<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
<b>CAPITULO I .....</b>	<b>1</b>
<b>MARCO TEORICO .....</b>	<b>1</b>
Termodinámica del cambio de fase.....	5
Planteamiento del Problema .....	20
<b>CAPITULO II.....</b>	<b>24</b>
<b>EL MODELO FÍSICO .....</b>	<b>24</b>
Sistema de Ecuaciones Principal.....	24
Ecuaciones de Cierre .....	31
Método de Elementos Finitos .....	43
<b>CAPITULO III .....</b>	<b>48</b>
<b>METODOLOGÍA .....</b>	<b>48</b>
Generación de la malla computacional.....	48
Condiciones Iniciales y obtención de convergencia para flujos turbulentos .....	49
Condiciones de Contorno .....	51
Calibración del modelo de turbulencia.....	54
Simulación de flujos cavitantes.....	55
<b>CAPITULO IV.....</b>	<b>56</b>
<b>RESULTADOS Y ANALISIS .....</b>	<b>56</b>
Distribución de Velocidad .....	58
Distribución de Presión .....	59
Distribución de Temperatura .....	60

Distribución de Densidad .....	60
Distribución de Fracción de Volumen.....	62
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>64</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>66</b>
<b>APENDICE A .....</b>	<b>71</b>
<b>COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES DE ESTADO DE LA IAPWS.....</b>	<b>71</b>
A.1. Coeficientes para la ecuación de estado de líquido comprimido (IAPWS, 2007).....	72
A.2. Coeficientes para la ecuación de estado de vapor sobrecalentado (IAPWS, 2007)....	72
A.3. Coeficientes para el cálculo de la viscosidad (IAPWS, 2008a).....	74
A.4. Coeficientes para el cálculo de la conductividad térmica (IAPWS, 2008b) .....	75
A.5 Coeficientes para el polinomio de la línea de saturación P-T (IAPWS,2007) .....	76

## LISTA DE SIMBOLOS

### Símbolos Latinos

[B]	vector de condiciones de borde.
[C]	matriz de términos convectivos en una ecuación discretizada.
$C_p$	capacidad calorífica isobárica [ $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ]
$C_s$	coeficiente de turbulencia del modelo de Smogorinsky.
$C_v$	capacidad calorífica isocórica [ $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ]
$c$	velocidad del sonido [m/s]
[D]	matriz de terminos difusivos en una ecuación discretizada.
$D_i$	longitud característica [m]
$d_{ij}$	componentes del tensor de rata de deformación [ $\text{s}^{-1}$ ]
$E$	energía total [J]
$e$	energía específica [J/kg]
$g$	gravedad [ $\text{m/s}^2$ ]; función de Gibbs específica [J/kg]
$H$	entalpía [J]
$H_{ij}$	coeficientes de ajuste para el calculo de la viscosidad.
$h$	entalpía específica [J/kg]
[I]	Matriz de términos inerciales en una ecuación discretizada.
$I_i$	exponentes de ajuste para ecuaciones de estado.
$J_i$	exponentes de ajuste para ecuaciones de estado.
$k$	conductividad termica [ $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ]
$L_{ij}$	coeficientes de ajuste para el calculo de la conductividad térmica.
$M_i$	función lineal de interpolación serendípita.
$N_i$	función cuadrática de interpolación serendípita.
$n_i$	coeficientes de ajuste para ecuaciones de estado.
$Pr$	numero de prandtl

$p$	presión [Pa]
$p_{lim}$	presión límite por encima de la cual solo se encuentra líquido comprimido. [Pa]
$R$	constante del agua como gas perfecto [ $\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ]
$Re$	numero de Reynolds
$Q$	calor [J]
$T$	temperatura [K]
$t$	tiempo [s]
$U$	energía interna [J]
$u$	velocidad del fluido [m/s]
$u^t$	velocidad tangencial a la pared [m/s]
$u^+$	velocidad adimensional normal a la pared según Prandtl
$u^*$	velocidad de corte de Prandtl [m/s]
$V$	volumen [ $\text{m}^3$ ]
[V]	matriz de terminos viscosos para una ecuación discretizada.
$v$	volumen específico [ $\text{m}^3/\text{kg}$ ]
$W$	trabajo [J]
$x$	calidad de mezcla o fracción de la masa de vapor
$x_i$	coordenada [m]
[Y]	matriz de términos para la ecuación de estado discretizada.
$y$	distancia desde un nodo computacional a la pared mas cercana [m]
$y^+$	distancia adimensional normal a la pared o número de Reynolds local.

### **Símbolos griegos**

$\alpha$	fracción de volumen de vapor
$\Gamma$	rata de flujo de masa por cambio de fase [kg/s]
$\gamma$	función de Gibbs adimensional
$\Delta$	tamaño del vórtice mas pequeño que puede ser despreciado en un



	proceso de filtrado [mm]; indica la variación de una variable.
$\theta$	factor de relajación temporal.
$\eta$	coordenada vertical local en un elemento finito.
$\kappa$	constante universal de Von Kàrmàn
$\mu$	viscosidad [Pa s]
$\nu$	viscosidad cinemática [m <sup>2</sup> /s]
$\xi$	coordenada horizontal local en un elemento finito.
$\pi$	presión adimensional
$\rho$	densidad [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	número de cavitación
$\tau$	temperatura adimensional.
$\tau_{ij}$	componentes del tensor de esfuerzos de subrejilla [Pa]
$\tau_w$	esfuerzo cortante en la pared [Pa]
$\chi$	factor de compresibilidad de una mezcla [m s kg <sup>-1</sup> ]
$\psi$	función corriente [m <sup>2</sup> /s]

## Subíndices

C	indica que una matriz pertenece a la ecuación de continuidad.
c	en el centro de la sección transversal.
E	indica que una matriz pertenece a la ecuación de energía.
in	valor de la variable en el punto de mínima presión
l	líquido saturado.
M	indica que la matriz pertenece a la ecuación de momentum.
min	referido al nodo computacional más cercano al contorno.
s	saturación.
t	turbulento.
v	vapor saturado.
$\infty$	valor medio en la sección de entrada.

## INDICE DE TABLAS

<b>1.1. Clasificación de los modelos numéricos de cavitación.....</b>	<b>16</b>
<b>1.2. Condiciones de flujo cavitante.....</b>	<b>24</b>
<b>3.1. Simulaciones para alcanzar convergencia en régimen de flujo turbulento.....</b>	<b>53</b>

## INDICE DE FIGURAS

1.1. Ejemplo de cavitación en vórtices.....	6
1.2. Ejemplos de cavitación adherida.....	7
1.3. Formación, desprendimiento y colapso de una nube de cavitación.....	8
1.4. Línea de Saturación en un diagrama Presión vs. Temperatura.....	9
1.5. Esquema de un diagrama P-v para las fases líquido y vapor.....	10
1.6. Relación entre la fracción masa y la fracción volumen.....	11
1.7. Diagrama de un proceso isoentálpico de formación de vapor.....	13
1.8. Representación de una ecuaciones barotrópicas.....	20
1.9. Medidas de la geometría en milímetros.....	24
1.10. Fotografía de la formación de una nube de cavitación.....	26
2.1. Regiones y ecuaciones fundamentales de la IAPWS.....	36
2.2. Algoritmo para el cálculo de flujos cavitantes según el modelo planteado.....	45
2.3. Elemento Finito con los grados de libertad correspondiente a cada nodo.....	47
3.1. Malla de 6253 nodos y 1998 elementos.....	52
3.2. Malla de 15549 nodos y 5016 elementos.....	52
3.3. Condiciones de borde para simulación de flujo potencial.....	54
3.4. Condiciones de borde para flujos viscosos.....	54
3.5. Malla para simulación de flujo entre placas paralelas.....	56
3.6. Distribución de velocidades obtenido con el modelo de turbulencia entre dos placas paralelas.....	57
4.1. Distribución de la magnitud de la velocidad en m/s.....	61
4.2. Distribución de la componente horizontal de velocidades en varias secciones del ducto.....	62
4.3. Distribución de Presión.....	63

<b>4.4. Distribución de densidades en las cercanías de la garganta.....</b>	<b>64</b>
<b>4.5. Detalle de campo de densidades en los alrededores del punto de mínima presión.....</b>	<b>64</b>
<b>4.6. Distribución de la Fracción Volumen.....</b>	<b>65</b>
<b>4.7. Detalle de la distribución de la fracción vapor en los alrededores del punto de mínima presión y la malla computacional.....</b>	<b>65</b>

## **INTRODUCCIÓN**

Se puede definir la cavitación como el rompimiento del medio líquido cuando este es sujeto a muy bajos niveles de presión (Franc y Michel, 2004). La cavitación pudiera igualmente definirse como un fenómeno de cambio de fase de líquido a vapor por el efecto predominante de una caída de presión. El fenómeno se manifiesta por medio de la aparición de cavidades de vapor en el interior de un medio líquido inicialmente homogéneo y puede ocurrir en diferentes situaciones. Para el ámbito de la ingeniería mecánica resulta de particular interés la ocurrencia del fenómeno en el seno de un fluido en movimiento.

En estos casos la manifestación del fenómeno depende de la estructura, tipo de flujo y la distribución de propiedades termodinámicas en el campo de flujo. El proceso de cambio de fase es producido principalmente por la reducción de la presión a niveles que son muy próximos al de la presión de vapor sin que exista una variación significativa de la temperatura. Las zonas de mínima presión se encuentran localizadas en aquellas donde la energía cinética del flujo es importante en relación a la energía de presión.

Existen un número importante de dispositivos mecánicos en los que se reúnen las condiciones necesarias para la formación de patrones de flujo cavitantes como por ejemplo turbo maquinaria, inyectores, toberas, hélices para el transporte acuático, dispositivos sumergidos, entre otros. En donde la aparición de fenómenos de cavitación suele ser un aspecto negativo.

Los perfiles hidrodinámicos utilizados en turbomáquinas pueden favorecer la aparición de la cavitación como consecuencia de la combinación de diferentes factores geométricos y dinámicos que condicionan el nivel de sub-presión que se produce sobre el extrados. Los diferentes tipos de cavitación que se pueden presentar en este caso, pueden ser en cierta forma controlados, haciendo variar el diseño

hidrodinámico del perfil (forma del perfil, curvatura, espesor, entre otros parámetros), que producen efectos importantes en el coeficiente de presión obtenido. Precisamente en el diseño de perfiles hidrodinámicos, uno de los efectos conocidos producido por la cavitación, quizás el más importante del punto de vista mecánico, es la notable reducción de las fuerzas de sustentación y arrastre (Batten, Bahaj, Molland y Chaplin, 2005). La reducción del arrastre pudiera ser importante si lo que se busca es mejorar el avance del cuerpo, por el contrario, la reducción de la sustentación es un aspecto negativo que juega en contra de la obtención de la potencia motriz en turbomáquinas, como consecuencia de la reducción de la fuerza tangencial neta responsable del torque. El mismo efecto por otro lado puede resultar beneficioso en otras situaciones como por ejemplo el transporte submarino en donde la reducción de los coeficientes de arrastre disminuyen la resistencia del fluido al movimiento de cuerpo que se desea transportar.

Otro aspecto importante es aquel debido a la vibración que es producida por la alta frecuencia de generación y migración de micro burbujas de vapor en el seno del flujo cavitante (Leroux, 2003). Estas micro burbujas se encuentran en condición de inestabilidad dinámica cuando alcanzan un cierto radio crítico que depende de la presión local, pudiendo entonces y partiendo de dicho radio, crecer de forma incontrolada (explosión de burbujas) o colapsar violentamente (fenómeno de implosión), a consecuencia de pequeñas perturbaciones del campo de presión que las rodea, debido entre otras cosas, al nivel de la turbulencia local del flujo. En situación de colapso se producen micro-jets de flujo, que van a impactar las estructuras sólidas de forma periódica y con altísimos niveles de presión, produciendo otro de los efectos negativos de la cavitación, que es la socavación mecánica y erosión de la pieza, apareciendo un tipo de porosidad que es característico de la cavitación, reduciendo de esta forma aún más las características hidrodinámicas del perfil. Los tiempos característicos de colapso e implosión de burbujas aisladas han sido estudiados con base a trabajos de naturaleza hidrodinámica donde se ha integrado la ecuación de Rayleigh-Plesset (1916) (1969), ecuación que rige la dinámica de una burbuja esférica en un fluido en reposo, sin tomar en cuenta las fuerzas superficiales debidas a

la fricción y la tensión superficial y considerando que el gas atrapado en la burbuja pudiera seguir modelos de variación del estado termodinámico: adiabático o isotérmico.

En un país, como Venezuela, en donde mas del 60% de la energía eléctrica generada se hace a través de sistemas hidroeléctricos (OPSIS, 2009), el entendimiento, estudio y desarrollo de la capacidad de predicción y simulación del fenómeno de cavitación constituyen aspectos de suma importancia.

En base a esta necesidad se plantea como finalidad de éste trabajo el establecer la metodología para el desarrollo de un modelo matemático que permita analizar flujos cavitantes transitorios computacionalmente, considerando inicialmente la mezcla vapor-líquido como un fluido homogéneo. El presente es el primero, de lo que se espera, sea una línea de investigación consolidada en el Departamento de Energética de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad Central de Venezuela.

## CAPITULO I

### MARCO TEORICO

El modelo desarrollado en el presente trabajo se centra en un estudio de la cavitación como un fenómeno termodinámico de cambio de fase. Éste fenómeno se encuentra asociado a procesos complejos como lo son la nucleación y coalescencia de burbujas de vapor durante el proceso de generación de vapor. Los mismos fenómenos pueden ser observados en procesos de ebullición de líquidos, que por el contrario se deben a incrementos isobáricos de la temperatura a niveles que son próximos a la temperatura de saturación y también en los procesos de condensación que se producen en gases y vapores. En general los líquidos contienen gérmenes de gases atrapados bajo presión que son adquiridos durante procesos de aeración, almacenamiento y transporte. En el caso de los dos últimos, la rugosidad superficial de los materiales utilizados puede ser una fuente de suministro de micro gérmenes que migran hacia los líquidos. Del punto de vista mecánico éstos micro gérmenes pudieran condicionar las posibilidades del fluido a cavitarse bajo situaciones de depresiones importantes (Franc *et al.*, 1994). La aparición de la cavitación en el flujo de líquidos pudiera ser retardada o adelantada debida a todos estos parámetros, que se suman a los efectos de tensión superficial y fricción interna en caso de haber flujo de fluidos. De esta manera en las zonas de baja presión, la cavitación pudiera, por ejemplo, ser retardada y el fluido en esa condición, estaría sometido a una situación de sub-presión conocida como meta estabilidad, donde la cavitación aparece más allá de la presión saturante y por debajo de ésta.

En el presente trabajo se desarrolla un modelo simplificado en donde no se considera la mecánica de las burbujas de vapor sino que se analiza el fenómeno desde un punto de vista macroscópico. Éste enfoque permitirá reproducir las macro-estructuras formadas por la fase de vapor para una determinada condición de flujo tratando al



fluido como una mezcla líquido vapor, sin necesidad de identificar y ubicar la interfase.

En éste capítulo se presenta a la cavitación como un fenómeno macroscópico y se tratan los aspectos fundamentales de cambio de fase a través de la termodinámica clásica.

### **Manifestación macroscópica de la cavitación en fluidos en movimiento**

La cavitación puede presentarse de diferentes formas dependiendo de las características del flujo en el cual ocurre. Particularmente resultan de interés aquellas manifestaciones macroscópicas en donde la presencia de dos fases afecta significativamente el patrón de flujo. Para que esto ocurra la presión en el fluido debe descender lo suficiente como para que los pequeños núcleos de vapor aumenten su tamaño, éstas serán más propensas a interactuar entre ellas y debido a la fuerte variación local de la densidad el campo de velocidad se ve afectado.

Brennen (1995) clasifica las manifestaciones de la cavitación a gran escala en tres grupos no necesariamente excluyentes entre si: cavitación en vórtices, cavitación en nubes y cavitación adherida.

#### ***Cavitación en Vórtices (Vortex Cavitation)***

Existen numerosos casos prácticos de flujos donde el número de Reynolds es elevado, en dichos casos es frecuente encontrar regiones de gran vorticidad en donde la presión en el centro de los vórtices es considerablemente menor al resto del flujo. Un ejemplo típico de éste tipo de flujos son las descargas de turbinas hidráulicas axiales o mixtas.

Si la presión en el núcleo del vórtice alcanza la presión de vapor comienza el proceso de generación de vapor que es transportado aguas abajo. En la figura 1.1 se observa la descarga de una turbina Francis con flujo cavitante, dicha fotografía fue tomada en el

Instituto de Máquinas Hidráulicas y Mecánica de Fluidos de la Escuela Politécnica de Laussane en Suiza.

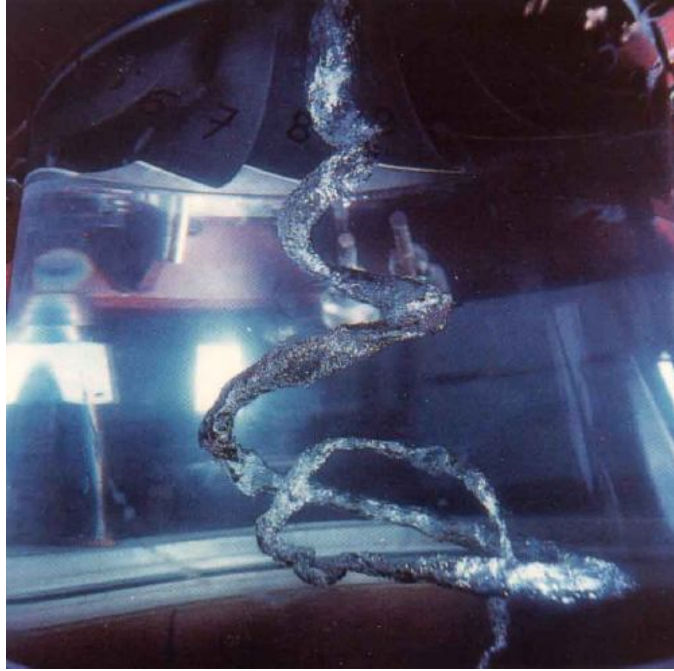


Fig 1.1. Ejemplo de cavitación en vórtices (Brennen, 1995).

### *Cavitación Adherida (Attached cavitation)*

Esta manifestación a gran escala de la cavitación ocurre cuando el fenómeno se presenta en forma de una cavidad unida a un cuerpo. En estos casos, y dependiendo de los niveles de presión, una cavidad de vapor comienza a formarse a partir de la zona de separación del flujo alrededor del perfil hasta encontrarse completamente desarrollada. Dependiendo de las características geométricas del perfil y el número de Reynolds, la interfase entre la cavidad de vapor y el líquido presentará un aspecto liso o irregular.

La característica primordial de éste patrón de cavitación es que debido a la continua generación de vapor la cavidad parece inmóvil y adherida al perfil, sin embargo existe un arrastre permanente de masas de vapor aguas abajo. El estudio de éste tipo de cavitación es relevante en el estudio de transporte de cuerpos sumergidos y

desempeño de perfiles hidrodinámicos. En la figura 1.2 se observan fotografías que muestran la cavidad adherida a cuerpos sólidos en donde la misma comienza a formarse después de la separación del flujo.

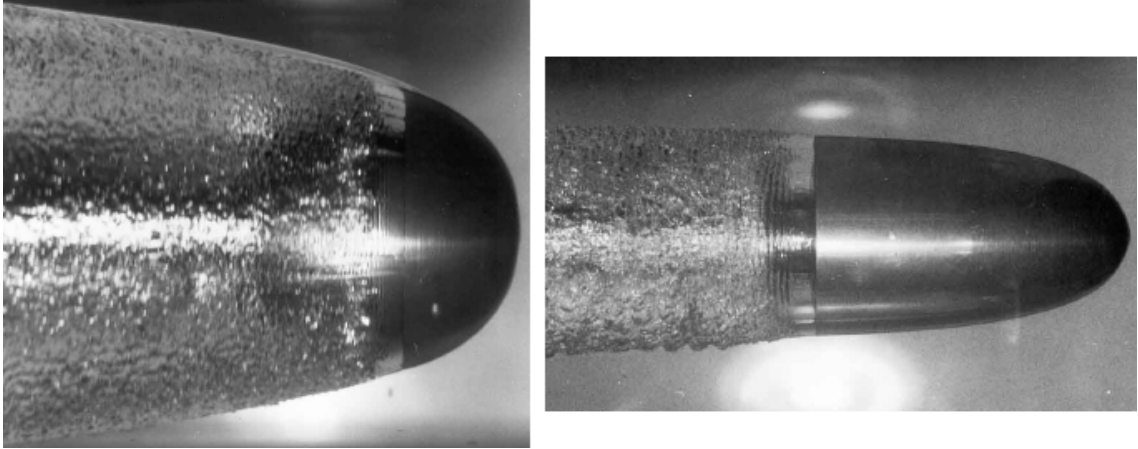


Fig 1.2. Ejemplos de cavitación adherida (Brennen, 1995)

### *Nubes de Cavitación (Cloud Cavitation)*

Existen numerosos casos prácticos donde es posible apreciar formación y colapso de cavidades de vapor. Las estructuras de vapor suelen formarse a partir de la generación de un número importante de burbujas de vapor de pequeño tamaño, lo que da a la masa de vapor un aspecto de “nube”, si ésta nube de vapor es transportada por efectos de flujo a una zona de alta presión la misma colapsará generando altos niveles de ruido y vibración. La periodicidad del fenómeno puede ocurrir por la influencia de factores externos, como por ejemplo la acción de una máquina rotativa, o naturalmente por efectos de la vorticidad del flujo.

Un ejemplo de la periodicidad natural de éstos patrones de cavitación ocurre cuando las nubes de cavitación comienzan a generarse adheridas a una superficie, en éste caso la presencia de la nube de cavitación puede llegar a afectar notablemente las condiciones de flujo, formándose un “jet” o chorro de agua reincidente que actúa en un pequeño espacio entre la nube de cavitación y la superficie. Éste reflujó afecta la estabilidad dinámica de la nube y la misma se desprende de la superficie siendo

arrastrada aguas abajo. En la figura 1.3 se observa el desprendimiento y colapso de una nube de cavitación adherida a la superficie de menor presión de un perfil hidrodinámico.



**Figura 1.3. Formación, desprendimiento y colapso de una nube de cavitación. (Brennen, 1995).**

El modelo desarrollado en el presente trabajo pretende reproducir la formación, desprendimiento y arrastre de una nube de cavitación. El hecho de que la fase de vapor en este tipo de estructuras se encuentre dispersa en pequeñas burbujas permitirá la aplicación de ciertas consideraciones que simplificarán el desarrollo del modelo.

### **Termodinámica del cambio de fase**

Tal como fue establecido anteriormente el presente trabajo se centra en el estudio de la cavitación como un fenómeno termodinámico de cambio de fase desde un enfoque macroscópico.

#### ***Cambio de fase líquido-vapor***

Supóngase un sistema termodinámico compuesto enteramente por una masa de líquido comprimido a una temperatura inferior a la temperatura crítica. Si se somete dicho sistema a una descompresión isotérmica se llegará a un punto en el cual una posterior descompresión llevará al mismo a un estado de equilibrio inestable; ante cualquier perturbación externa, o si bien existiese dentro del seno del líquido alguna

impureza, el sistema adopta rápidamente un nuevo estado de equilibrio estable, que se caracteriza por la aparición de una nueva fase, en este caso vapor. Las mismas observaciones pueden ser aplicadas a un proceso isobárico de calentamiento por debajo del punto crítico.

Los valores límites de presión y temperatura para que exista el cambio de fase se identifican como valores de saturación, y se ha demostrado que existe una dependencia directa entre los valores de presión y temperatura de saturación, relación que puede representarse en un diagrama Presión-Temperatura como una línea (figura 1.4), llamada línea de saturación (Adkins, 1968). En fin, cualquier proceso que lleve a un sistema a un estado termodinámico contenido dentro de la línea de saturación puede ocasionar un cambio de fase.

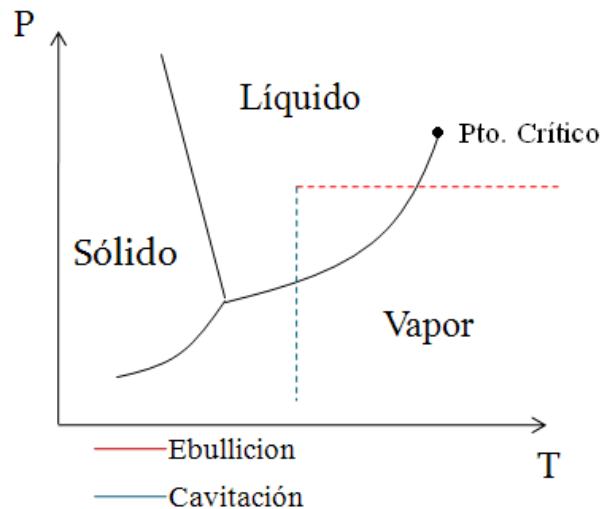


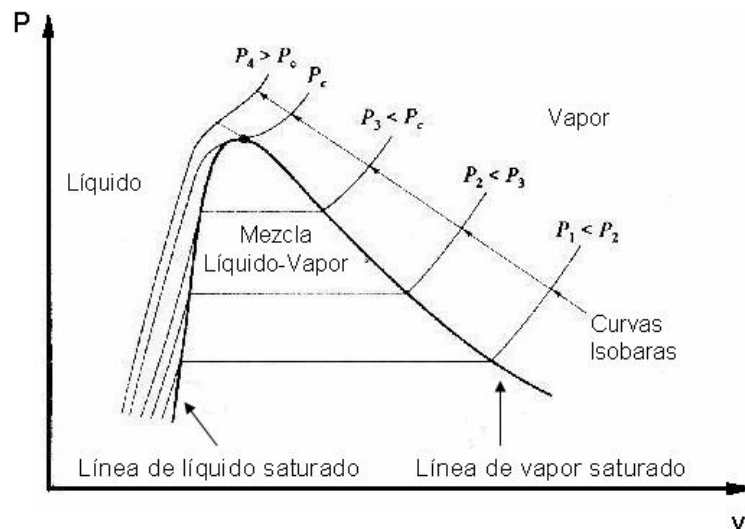
Figura 1.4. Línea de Saturación en un diagrama Presión vs. Temperatura.

Un proceso que lleve a un sistema de una fase líquida a una fase vapor evitando la línea de saturación por encima del punto crítico es un proceso supercrítico en donde no existen discontinuidades en las propiedades específicas y en donde no puede distinguirse claramente en que momento ocurre el cambio de fase.

Para que ambas fases puedan coexistir en un sistema a un mismo valor de presión y temperatura impuestas por el entorno, ambas fases deben permanecer en equilibrio

termodinámico. Las condiciones de equilibrio entre fases fueron plenamente establecidas por Richard Gibbs al aplicar a un sistema multifásico los principios de equilibrio de máxima entropía y mínima energía (Bejan, 1997).

Para éste caso en particular la condición de equilibrio dicta que todo el sistema, incluyendo ambas fases, debe tener un único valor de potencial químico o función de Gibbs (Callen, 1960). Éste tipo de cambio de fase ha sido clasificado como cambio de fase de primer orden y se caracteriza porque se presentan discontinuidades en el valor de las propiedades específicas entre la fase líquida y la fase vapor (Callen, 1960). El sistema termodinámico, desde un punto de vista macroscópico, presentará propiedades termodinámicas intermedias entre las del líquido y el vapor a la presión y temperatura establecidas (Figura 1.5). Dichas propiedades del sistema pueden calcularse como un promedio ponderado con las masas de cada fase.



**Figura 1.5. Esquema de un diagrama P-v para las fases líquido y vapor.**

A medida que el cambio de fase ocurra más cercano al punto crítico la discontinuidad será menor. Tomando en cuenta que el punto crítico del agua se encuentra a  $373\text{ C}$  y  $5\text{ MPa}$ , a condiciones regulares el cambio de fase del agua se caracteriza por una fuerte discontinuidad, en éste sentido una determinada masa de vapor puede ocupar  $60.000$  veces más el volumen ocupado por una masa de líquido a  $20\text{ C}$ . En la figura

1.6 se muestra la relación entre la calidad (relación masa de vapor con la masa del sistema) contra la fracción volumétrica (relación volumen de vapor con el volumen del sistema), donde se evidencia que pequeñas fracciones de masa pueden generar grandes fracciones de volumen si el cambio de fase ocurre muy por debajo del punto crítico, describiéndose curvas de naturaleza hiperbólica.

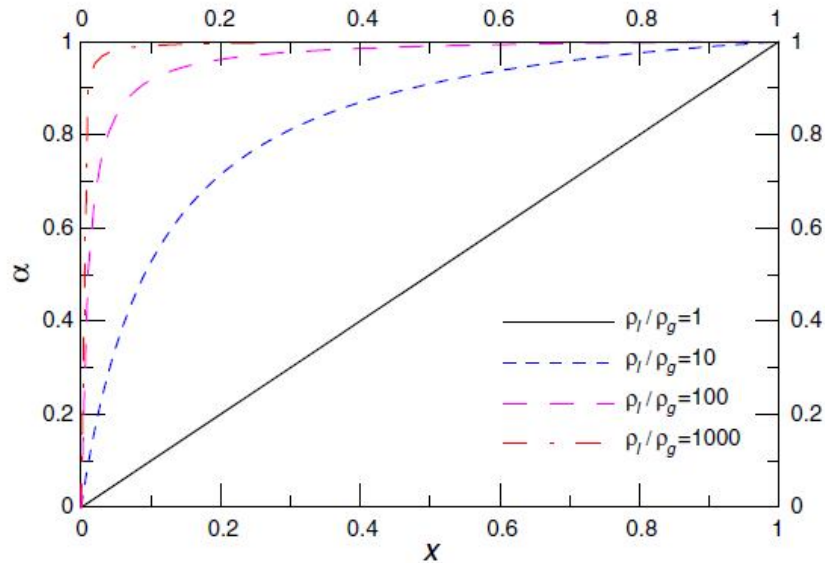


Fig. 1.6. Relación entre la fracción masa y la fracción volumen . (Awad y Muzychka, 2008)

### *Proceso termodinámico de generación de vapor por Cavitación*

Considérese para éste análisis un sistema conformado por una porción muy pequeña de líquido que es transportado por un flujo, si el sistema es llevado a una zona de baja presión en donde se alcancen presiones por debajo a la presión de saturación, el sistema alcanzará un estado de equilibrio inestable y posteriormente comenzará un proceso de cambio de fase. Aplicando el primer principio de la termodinámica al proceso de cambio de fase:

$$\delta Q = dE + \delta W \quad (1.1)$$

Si se considera que el proceso de cambio de fase ocurre muy rápidamente y la distribución de velocidades dentro del flujo es una función suave, los cambios de energía cinética y potencial se hacen despreciables:

$$\delta Q = dU + \delta W \quad (1.2)$$

Si se considera que el proceso de cambio de fase ocurre sobre la superficie de la pequeña porción de masa escogida como sistema y en un intervalo de tiempo reducido, se concluye que la transferencia de calor ocurrida durante el proceso pudiera ser despreciada:

$$dU + \delta W = 0 \quad (1.3)$$

Si se considera despreciable el trabajo viscoso y de tensión superficial, y se aproxima el proceso, debido a las dimensiones del sistema, a un proceso de cuasi-equilibrio:

$$dU + pdV = 0 \quad (1.4)$$

Finalmente, si se toma en cuenta que el campo de presiones dentro del flujo es una función suave, se concluirá que los cambios de presión pueden ser ignorados durante el proceso, por lo tanto:

$$dU + pdV = dU + d(pV) = dH \quad (1.5)$$

$$dH = 0 \quad (1.6)$$

Se concluye entonces que el proceso de cambio de fase por cavitación para una porción pequeña de líquido puede aproximarse a un proceso isoentálpico (figura 1.7), aproximaciones similares fueron propuestas por Iben en sus simulaciones numéricas de cavitación (Iben, 2002).



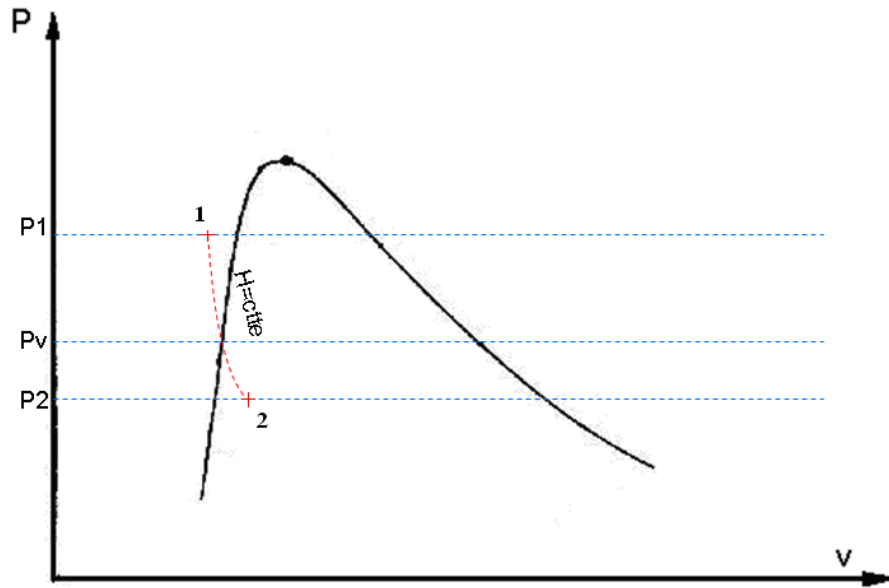


Fig 1.7. Diagrama de un proceso isoentálpico de formación de vapor

## Antecedentes

En el presente capítulo se presenta un breve recuento de los trabajos que han sido desarrollados para el estudio de la cavitación, haciendo énfasis en aquellos desarrollados para el estudio de macro-estructuras de cavitación.

El modelado de la cavitación requiere el tratamiento adecuado de varios aspectos que pueden presentar problemas desde un punto de vista matemático y numérico. Entre las principales dificultades que deben ser cubiertas por los modelos se encuentran:

- (a) Grandes gradientes de las propiedades termodinámicas y termofísicas del fluido. Dichas propiedades varían desde los valores representativos de la fase líquida a los de la fase vapor en un espacio sumamente reducido conocido como interfase. Grandes gradientes en dichas propiedades son una de las principales fuentes de divergencia numérica.
- (b) La transitoriedad del fenómeno. Los flujos cavitantes pueden llegar a ser sumamente inestables, como lo es el caso de cavitación de vórtices o cavitación en nubes. Los modelos deben ser capaces de predecir la compleja dinámica del fenómeno de cavitación.

- (c) Complejidad de los patrones de flujo. La aparición de cavidades de vapor pueden afectar fuertemente el campo de velocidades dentro del fluido, los modelos deben ser capaces de predecir éstos campos. Un ejemplo típico de estos estudios es la simulación del jet o chorro reincidente que aparece en nubes de cavitación.

Los primeros modelos de cavitación propuestos consistieron en estudiar de forma teórica el flujo externo a la cavidad de vapor y se pueden citar por ejemplo, el trabajo de Helmholtz (1868), donde se utilizan técnicas no lineales de transformación hodográfica. Los estudios de Tulin (1955 y 1964) donde se presenta un trabajo basado en el método de aplicación de pequeñas perturbaciones en perfiles supercavitantes y el trabajo de Wu (1962) que utiliza una técnica de transformación conforme para el estudio de la cavitación parcial y total.

Posteriormente numerosos modelos numéricos fueron desarrollados para el estudio de formación de vapor en el seno de fluidos en movimiento. Sansone, en su tesis doctoral, propone una clasificación para estos modelos (Sansone, 2007), la cual es explicada a continuación y resumida en la tabla 1.1.

### ***Modelos de flujo externo***

#### *Estacionarios*

Los métodos estacionarios son apropiados para el estudio de cavidades que permanecen unidas a un cuerpo sólido. La forma de la interfase es obtenida mediante procedimientos iterativos. La aceptación de la convergencia se establece una vez que sea satisfecha la condición de Jukowsky sobre el perfil. El punto de partida de la cavidad corresponde, al de mínima presión, situado en el borde de ataque del perfil y en general, la geometría de la cavidad puede ser de dos tipos: cerrada y abierta. Los métodos basados en cavidades abiertas no permiten obtener la zona de re-compresión que se forma en el punto de cierre de la cavidad sobre el extrados y producen una sobre estimación de la fuerza de sustentación. Mientras que en los métodos de cavidad cerrada, se pueden simular los efectos de la interacción con la estela del

flujo. Los primeros modelos propuestos son aquellos en los cuales se utilizaron cavidades cerradas. Para estos métodos, el flujo externo a la cavidad puede ser calculado por métodos potenciales (Laplace) o bien por medio de la ecuación de Euler estacionaria. En el caso de los métodos que no simulan efectos de interacción con la estela a partir del punto de cierre de la cavidad, se pueden citar, los trabajos de Desphanche *et al* (1994), Furuya (1975), Nishiyama y Niyamoto (1969).

Una evolución de los modelos para tratar cavidades cerradas consistió en la introducción de una zona de interacción con la estela que constituye en si, una prolongación de la cavidad más allá del punto de cierre y donde se considera que la presión de re-compresión al final de ésta no es igual a la presión de vapor. Con esta técnica fueron obtenidos buenos resultados en cavidades estiradas a bajo número de cavitación,  $\sigma$ . Sin embargo algunos problemas surgieron para altos valores de  $\sigma$  (cavidades pequeñas), donde las zonas de interacción con la estela eran proporcionales al tamaño de la cavidad. Dentro de esta línea de investigación se citan los trabajos de Lemonnier & Rowe (1988), y Rousset (1990).

Los modelos de cavidad abierta fueron propuestos a fin de mejorar el desenvolvimiento de los modelos de cavidad cerrada, donde se utiliza una zona de interacción adicional. Tales modelos son generados mediante la adición de un flujo ficticio al final de la cavidad que impide que ésta se cierre. Estos modelos son sensibles al valor del caudal ficticio impuesto y sus parámetros de adaptación computacional son difícilmente traspasables entre perfiles. En esta línea se sitúan los trabajos de Pellone *et al.* (2000) y Pellone & Rowe (1988).

Tabla. 1.1. Clasificación de los modelos numéricos de cavitación

Clasificación	Sub clasificación	Ecuaciones Resueltas	Tipo de cavitación modelada	Formulación Temporal	Método de Calculo
Modelo de Flujo Externo	Estacionario	* Laplace	Adherida	Estacionaria	Calculo iterativo de la cavitación. Métodos de Volúmenes y Elementos Finitos. Métodos Integrales.
	Transitorio	* Euler	Adherida	Transitoria	Calculo iterativo de la cavitación. Métodos de Volúmenes y Elementos Finitos.
Modelos de mezcla homogénea	Sin ecuación de transporte	* Navier Stokes, * Continuidad * Ecuación de Estado o Ecuación basada en Rayleigh-Plesset	Nubes. Adherida.	Estacionaria o Transitoria	Resolución por método de volúmenes o Elementos Finitos. La fracción volumen es un resultado indirecto de la simulación.
	Con una ecuación de transporte	* Navier Stokes. * Continuidad. * Ecuación de transporte para la fracción volumétrica	Nubes. Adherida.	Estacionaria o Transitoria	Resolución por método de volúmenes o Elementos Finitos. La fracción de volumen es resultado directo de la simulación.
Modelos de dos fluidos	-----	*Navier Stokes para cada fase. * Ecuación de transporte de la fracción volumen para cada fase.	Nubes. Adherida.	Estacionaria o Transitoria.	Resolución por método de volúmenes o Elementos Finitos. Requieren el modelado de los términos de interacción interfacial.

### *Transitorios*

Los modelos no estacionarios o transitorios fueron desarrollados con el propósito de simular los efectos de un chorro re-incidente al final de la cavidad. Es tal chorro lo que produce la marcada inestabilidad que presenta la cavidad, que se traduce por repetidos procesos de estiramiento, fragmentación y recogimiento de la cavidad de vapor. Furness & Hutton (1975) describen el comportamiento dinámico del chorro re-incidente mediante una simulación basada en la ecuación de Euler no estacionaria y utilizando las mismas técnicas iterativas para encontrar la forma de la cavidad que fueron reportadas previamente, sin embargo, el modelo no puede reproducir los procesos de fragmentación y desprendimiento de la cavidad que ocurren corriente abajo del borde de ataque. Un trabajo comparable a éste fue realizado por De Lange (1996) utilizando un método integral de frontera o método de paneles, logrando simular los efectos de un chorro reincidente al extremo de la cavidad sobre un perfil tipo NACA.

### *Modelos de Mezcla Homogénea*

Los modelos de mezcla homogénea consisten en la suposición de la existencia de un único pseudo-fluido prácticamente incompresible en las regiones donde solo se encontraría una de las fases y de una gran compresibilidad en las regiones donde están presentes ambas fases. Las propiedades de éste fluido son calculadas como un promedio ponderado de las propiedades de las fases. El nombre de mezcla homogénea obedece al hecho que el fluido se supone constituido por un número grande de micro gérmenes de gas, inicialmente disueltos en el líquido y cuya densidad por unidad de volumen de líquido puro, es constante. Cuando la sustancia entra en cavitación se supone que en la zona del vapor, los micro gérmenes crecen al unísono con la misma velocidad y de forma viceversa, en el caso de la desaparición del vapor.

Estos modelos no requieren introducir la forma inicial de la cavidad. Sin embargo presentan el problema de no ser capaces de reproducir exactamente la ubicación de la

interfase, en cambio los resultados permiten apreciar una región en donde existen fuertes gradientes de densidad, se puede presumir que la interfase se encuentra dentro de ésta región. A pesar de ésta limitante estos modelos reproducen bastante bien los fenómenos dinámicos asociados al chorro re-incidente y la fragmentación de las cavidades adheridas a perfiles. Debido a estas características éste tipo de modelos se han utilizado ampliamente para simular fenómenos en donde una de las fases se encuentra dispersa y es arrastrada por la otra fase.

El sistema de ecuaciones resuelto por el sistema esta conformado por la ecuación de conservación de la masa o continuidad, la ecuación de momentum y una ecuación de estado o una ecuación de transporte:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + u_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho g + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \frac{2\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \quad (1.8)$$

En donde la densidad y la viscosidad son propiedades promediadas para la mezcla.

#### *Modelos sin ecuación de transporte*

Este tipo de modelos resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad para el pseudo-fluido y adicionalmente una ecuación de estado que coloca a la densidad como función de otra variable, para la cavitación esta variable es típicamente la presión. A continuación se mencionan algunos ejemplos de éste tipo de modelos.

Kubotta *et al.* (1992) desarrollaron un modelo fundamentado en la idea de que la cavitación en forma de nubes esta compuesta por la interacción de burbujas esféricas de vapor. En este caso, la fracción de vapor local resulta de la interacción de un número  $n$  determinado de micro gérmenes de cavitación. El numero de gérmenes de cavitación es elevado y normalmente según datos experimentales puede situarse entre  $10^6 < n < 10^8$  núcleos por volumen de liquido. La contribución del momentum individual de cada germen es considerada dentro de una cierta región esférica (cavitation cluster) a través de un modelo de interacción cinemática que se incluye en la ecuación de Rayleigh-Plesset clásica. La solución de esta ecuación se obtiene por vía de una ecuación tipo Poisson para la presión de la mezcla que se resuelve de

forma acoplada con la ecuación de momentum y que permite la obtención de los radios locales de cada región de vapor (cluster).

$$(1 + 2\pi\Delta r^2 nR)R \frac{d^2 R}{dt^2} + \left(\frac{3}{2} + 4\pi\Delta r^2 nR\right) \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{p - p_s}{\rho_l} \quad (1.9)$$

Estos radios permiten conseguir de forma local la fracción de vapor de la siguiente manera:

$$\alpha_v = n \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (1.10)$$

Coutier-Delgosta *et al.* (2003a) propusieron un modelo barotrópico donde la densidad de la mezcla está ligada a la presión del flujo a través de una ecuación de tipo exponencial. La pendiente de la formulación barotrópica representa a la relación recíproca de la velocidad del sonido de la mezcla (figura 1.6):

$$\rho(P) = \rho_L + \left(\frac{p_s - p}{p_s - p_L}\right)^n (\rho_l - \rho_v) \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2$$

La mezcla es entonces simulada por un flujo ficticio que resulta incompresible para presiones superiores a la presión de vapor y altamente compresible para las presiones cercanas a la presión de vapor (Número de Mach de 2 a 5). La fracción de líquido se deduce después de haber sido calculada la densidad de la mezcla de la siguiente forma:

$$\alpha_v = \frac{\rho - \rho_v}{\rho_l - \rho_v} \quad (1.12)$$

Una tratamiento similar fue utilizado por Chen *et al.* (2005) donde la ecuación barotrópica es de la forma:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_l & p &\geq p_v + \Delta p \\ \rho &= \rho_v & p &\leq p_v + \Delta p \\ \rho &= \rho_v + \Delta \rho \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \frac{p - p_v}{\Delta p}\right) & p_v - \Delta p &\leq p \leq p_v + \Delta p \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\Delta p = 0,01 p_{salida}$$

En estas metodologías también se busca que la pendiente del modelo barotrópico sea acorde a la velocidad del sonido en la mezcla (figura 1.8).

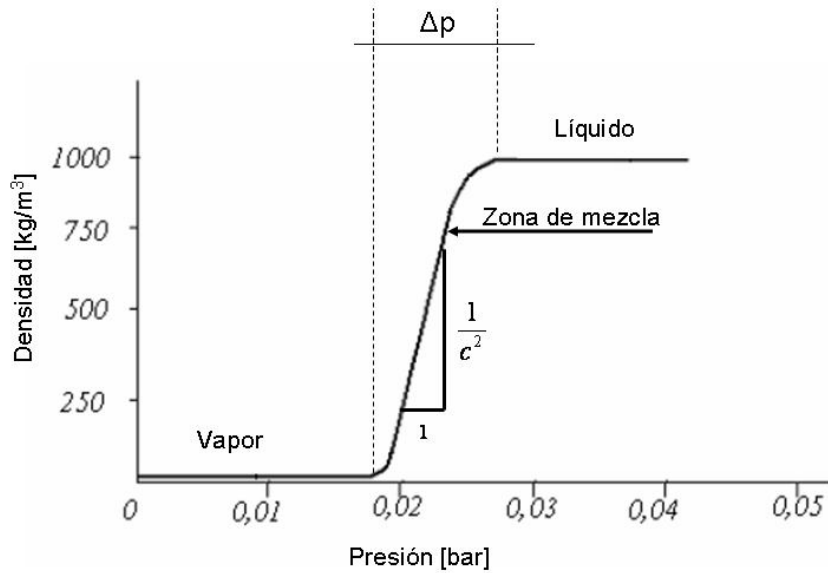


Figura 1.8. Representación de una ecuaciones barotrópicas

#### Modelos con una ecuación de transporte

De fecha más recientes son los modelos de mezcla homogénea tipo Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) donde se utiliza una ecuación de transporte adicional para la fracción de líquido o de vapor, en la cual se introduce un término fuente que reproduce los efectos de generación y absorción del vapor en la mezcla. Se define la densidad de la mezcla de la siguiente manera:

$$\rho = \sum_{k=1}^N \alpha_k \rho_k \quad (1.14)$$

En donde  $N$  es el número de fases que pueden coexistir en la mezcla, la ecuación de continuidad adquiere la forma:

$$\sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial(\alpha_k \rho_k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_k \rho_k u_i)}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (1.15)$$

Donde ésta ecuación de continuidad puede separarse en dos ecuaciones de transporte, una para la fracción de volumen de cada fase:



$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_l \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_l \rho_l u_i)}{\partial x_j} &= \Gamma_l \\ \frac{\partial \alpha_v \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_v \rho_v u_i)}{\partial x_j} &= \Gamma_v \\ \Gamma_l &= -\Gamma_v\end{aligned}\tag{1.16}$$

En donde los términos  $\Gamma$  son las ratas de flujo de masa por unidad de volumen de cada fase, es decir la velocidad a la cual el líquido se evapora o se condensa el vapor según sea el caso. Para que se mantenga el principio de conservación de la masa la velocidad a la cual se genera masa para una fase es igual a la velocidad a la que la otra fase es absorbida. En el manejo de modelos de mezcla solo es necesario implementar una de las ecuaciones de transporte del conjunto de ecuaciones (1.16) ya que la suma de las fracciones de volumen de cada fase debe ser igual a la unidad. Siguiendo esta línea se citan algunos trabajos de interés:

En el trabajo de Merkle *et al.* (1998) la rata de producción de vapor se determina por medio de una función a trozos parametrizada por la presión de la mezcla. La función depende del número de cavitación y se han introducido algunas constantes que expresan los tiempos característicos de evaporación y condensación ligados a las cavidades de vapor.

$$\Gamma_v = K_l \alpha_l \rho_l + K_v \alpha_v \rho_v\tag{1.17}$$

En donde:

$$\begin{aligned}K_l &= \begin{cases} 0 & p > p_v \\ \frac{1}{\tau_f} \frac{u_\infty}{L_\infty} \rho_l \alpha_l \left[ \frac{2(p - p_s)}{\rho_\infty u_\infty^2} \right] & p \leq p_v \end{cases} \text{ si} \\ K_v &= \begin{cases} \frac{1}{\tau_b} \frac{u_\infty}{L_\infty} \rho_v \alpha_v \left[ \frac{2(p - p_s)}{\rho_\infty u_\infty^2} \right] & p \leq p_v \\ 0 & p > p_v \end{cases} \text{ si}\end{aligned}\tag{1.18}$$

En donde los términos  $\tau$  son los tiempos característicos de condensación y vaporización.

El modelo de Kunz *et al.* (2000) propone una formulación cuya estructura recuerda a aquella de Merkle *et al.* previamente comentada, pero se utilizan otro conjunto de parámetros asociados a los tiempos de absorción y producción de vapor.

Iben *et al.* (2002) propone un estudio termodinámico para construir el término fuente de producción y absorción de vapor, el cual se acopla a una ecuación de transporte por convección para la fracción de vapor. El término fuente depende de las entalpías de saturación de vapor y líquido a una temperatura determinada. El estudio fue hecho para realizar un análisis unidimensional del problema de cavitación en sistemas hidráulicos simples. El término de generación de vapor fue modelado de la siguiente manera:

$$\Gamma_v = \rho \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$x(p) = \frac{h - h_l(p)}{h_v(p) - h_l(p)} \quad (1.19)$$

$$\Gamma_v = \rho \frac{\partial x}{\partial p} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

En los trabajos de Sauer (2000) y Yuan & Schenerr (2003) , la rata de producción de vapor se expresa en función de la ecuación de Rayleigh-Plesset multiplicada por una constante que expresa la concentración de burbujas de vapor por unidad de volumen de líquido y se supone que durante los procesos de formación y absorción de vapor , todas las burbujas contenidas en una región de mezcla, colapsan o implotan simultáneamente y por lo tanto no se toma en cuenta el proceso de coalescencia durante la formación de las cavidades de vapor.

Sansone, E. (2007) utiliza un modelo de producción y absorción de vapor basada en la ecuación de Rayleigh-Plesset con base al trabajo de Yuan citado previamente. En este estudio, el flujo cavitante fue resuelto en un rodete de una turbina hidráulica con eje vertical, a diferentes velocidades de rotación de la máquina.

### ***Modelos de dos fluidos***

Los modelos de dos fluidos a diferencia de los modelos de mezcla tratan de estudiar a ambas fases por separado considerándolos dos fluidos distintos con diferentes propiedades. En éste sentido los modelos de dos fluidos resuelven un sistema de ecuaciones conformado por ecuaciones de transporte para la fracción de volumen de cada fase y ecuaciones conservativas para cada fase (conservación de momentum y de energía). La complejidad que presentan éstos modelos esta en modelar los términos de interacción entre fases o términos interfaciales (Larreteguy, 2008). Una de las principales ventajas de éste tipo de métodos es que pueden acoplarse a un procedimiento de reconstrucción de la interfase (métodos VoF).

### **Planteamiento del Problema**

El modelo matemático desarrollado en el presente trabajo será aplicado a un problema de cavitación previamente estudiado a fin de validar los resultados obtenidos a través de su aplicación.

El caso de cavitación a estudiar se trata de un ducto tipo Venturi con ángulos de convergencia y divergencia de 18° y 8° respectivamente. Para este ducto se cuenta con una amplia gama de resultados experimentales y numéricos que describen el comportamiento de la cavitación en dicho dispositivo (Coutier-Delgosha *et. al.*, 2003a).

En el presente trabajo se validará el modelo para una única condición de flujo caracterizado principalmente por el número de Reynolds y el número de cavitación. En éste capítulo se establecen claramente las condiciones y características del flujo cavitante a ser modelado

### La Geometría

Tal como fue mencionado la geometría se trata de un ducto convergente-divergente con ángulos de  $18^\circ$  y  $8^\circ$  respectivamente. Las coordenadas del perfil de ésta geometría fueron encontrados en una publicación de Coutier-Delgosha *et al.* (2003b) lo cual permitió reproducir la misma con bastante exactitud (fig.1.9). La geometría ha sido estudiada a través de modelos bidimensionales, por lo cual se asume que los efectos de flujo en la dirección  $z$  son despreciables.

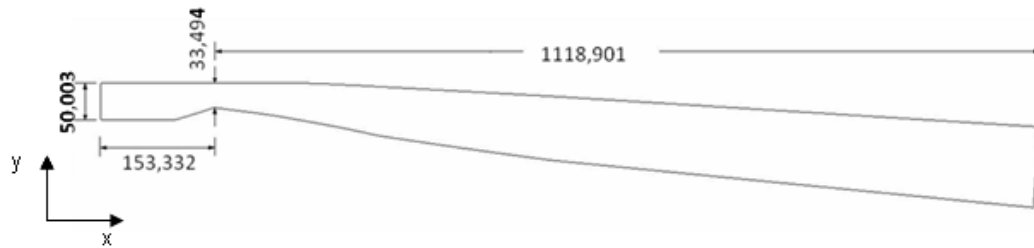


Fig. 1.9. Medidas de la geometría en milímetros.

### Condiciones del Flujo Cavitante

Las condiciones de flujo cavitante para las que se cuentan datos experimentales y numéricos se especifican en la tabla 1.2.

Tabla 1.2. Condiciones de flujo cavitante.

Parámetro	Símbolo	Magnitud
Velocidad media a la entrada	$u_\infty$	7,2 m/s
Presión de saturación	$p_s$	2000,0 Pa
Número de Cavitación	$\sigma$	2,4
Densidad de referencia	$\rho_\infty$	998,64 kg/m <sup>3</sup>
Longitud de Referencia	$Di$	50,003 mm
Viscosidad de Referencia	$\mu_\infty$	9,5x10 <sup>-6</sup> Pa s
Número de Reynolds	$Re$	3,78x10 <sup>7</sup>

Cabe destacar que el número de cavitación fue definido con la presión en la salida del dominio de la siguiente manera:

$$\sigma = \frac{2(p_{salida} - p_s)}{\rho_{\infty} u_{\infty}^2} \quad (1.20)$$

El número de Reynolds es definido con la velocidad, densidad y viscosidad de referencia, que corresponden a los parámetros de flujo a la entrada. La longitud de referencia corresponde a la distancia entre la pared superior e inferior en la sección de entrada del flujo.

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\infty} u_{\infty} D_i}{\mu_{\infty}} \quad (1.21)$$

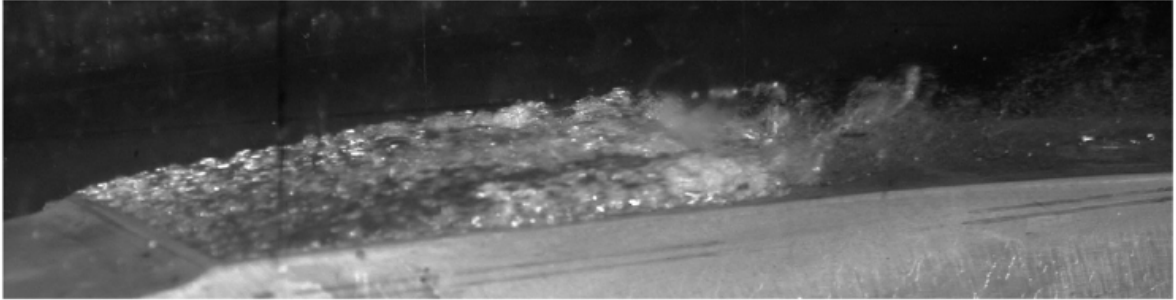
### ***Características del Flujo Cavitante***

A pesar de la sencillez de la geometría los fenómenos a ser simulados pueden llegar a ser bastante complejos. La ocurrencia de la cavitación en éste tipo de dispositivos a un alto número de Reynolds esta asociado a un flujo turbulento, que junto a un gradiente de presión adverso, tiende a provocar una separación del flujo corriente abajo de la garganta, pudiéndose generar vórtices de tamaño apreciable. A esto se suma la importancia de los efectos viscosos debido a la fuerte proximidad de las paredes.

Como resultado de estas condiciones los perfiles de velocidad del fluido son típicamente achatados hacia el centro por el efecto convectivo de las perturbaciones turbulentas, y con fuertes gradientes de velocidad hacia las paredes, zonas en donde los efectos de la viscosidad tienden a ser dominantes sobre la turbulencia del flujo. Es necesario por lo tanto llevar a cabo un tratamiento especial de las ecuaciones a fin de reproducir correctamente este proceso.

Una vez conocidas las características del flujo se describen las condiciones en las cuales ocurre la cavitación. Una vez que el fluido entra en el dispositivo como un flujo turbulento completamente desarrollado y con una presión relativamente baja, el mismo es forzado a aumentar aun más su velocidad a medida que avanza a través del

tramo convergente. Este aumento en energía cinética ocurre a expensas de la presión del fluido el cuál alcanza un mínimo justo en la garganta. Si ése mínimo de presión es igual o inferior a la presión de vapor a esa temperatura parte del líquido cambia de fase conformando una nube dispersa de vapor que es arrastrada por la fase líquida (figura 1.10).



**Fig 1.10. Fotografía de la formación de una nube de cavitación (Barre et al. 2008)**

Otro aspecto a considerar, es la interacción existente entre la nube de cavitación y el flujo. En varios trabajos vinculados, se destaca el hecho de la aparición de un chorro re-incidente (re-entrant jet) cerca de la pared en la cual se encuentra adherida la cavidad, propiciando eventos fuertemente transitorios que se manifiestan macroscópicamente por procesos cíclicos de formación-avance y fragmentación.

Los resultados experimentales muestran que éste proceso transitorio ocurre a una frecuencia aproximada de  $55 \text{ Hz}$  con una longitud de nube máxima de aproximadamente  $45 \text{ mm}$  (Coutier-Delgosha *et. al.*, 2003a)

## CAPITULO II

### EL MODELO FÍSICO

El modelo físico-matemático consiste en un conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento de un fenómeno físico. En este capítulo se presentan el conjunto de ecuaciones que constituyen el modelo de flujos cavitantes a ser resuelto numéricamente, se hace énfasis en la aplicabilidad de las ecuaciones y la justificación de su implementación en el trabajo. Al final del capítulo se presenta el algoritmo de cálculo a ser implementado en un método numérico de resolución de ecuaciones.

El presente modelo está constituido por tres ecuaciones de transporte y una ecuación de estado que son resueltas simultáneamente, al que se le denominará sistema de ecuaciones principal, y un conjunto de ecuaciones de cierre que son involucradas fuera del sistema de ecuaciones durante el proceso iterativo de resolución numérica.

#### **Sistema de Ecuaciones Principal**

Considerando que el caso de cavitación a ser estudiado involucra la formación, desprendimiento y colapso de una nube de cavitación constituida por pequeñas entidades de vapor que son arrastradas por el flujo de líquido, se decidió adoptar un *modelo de mezcla homogénea* que ha demostrado, pese a su relativa simplicidad, presentar buenos resultados para éste tipo de flujos cavitantes.

Las ecuaciones a resolver en el sistema son por lo tanto la ecuación de conservación momentum, de continuidad y de energía para la mezcla, aparte de una ecuación de estado que relacione la densidad de la mezcla con otras propiedades termodinámicas del sistema.

Considerando el alto número de Reynolds ( $3,78 \times 10^7$ ) asociado al flujo cavitante a estudiar, se espera que existan fuertes efectos de turbulencia en el mismo. Por lo tanto

la solución directa del sistema de ecuaciones planteado a través de un método numérico requeriría una discretización del dominio tal que las celdas computacionales sean lo suficientemente pequeñas como para poder considerar las escalas de turbulencia de menor tamaño, éste método se conoce como simulación numérica directa (*Direct Numerical Simulation DNS*). El tamaño de la celda computacional según éste método es inversamente proporcional a una potencia del número de Reynolds, lo que hace éste tipo de procedimiento impráctico desde un punto de vista de recursos computacionales (Sansone, 1999).

Se han planteado distintos métodos para resolver éste problema, uno de los más conocidos es el de considerar al flujo turbulento como un flujo fluctuante en el tiempo a través de la hipótesis de Reynolds, tomando esto en cuenta, se realiza un promediado temporal de los términos en las ecuaciones de transporte, éste tipo de enfoque lleva a ecuaciones tipo RANS (*Reynolds Averaged Navier Stokes*).

Otro tipo de metodología empleada esta fundamentada en modelos que trabajan con las grandes escalas del flujo turbulento (*Large Eddy Simulation LES*), donde se establece que los vórtices grandes contienen la mayor parte de la energía, por lo tanto son éstos los responsables del transporte de las propiedades de flujo, mientras que los vórtices más pequeños se consideran universales en cuanto a su forma y son menos importantes, por lo tanto éstas pequeñas escalas pudiera ser fáciles de modelar (Sansone, 1999).

En la metodología LES se sustituyen en las ecuaciones diferenciales de transporte un campo de velocidad que contiene sólo información de grandes escalas de turbulencia y que representen un promedio del campo total de velocidad. Al efectuar la sustitución en las ecuaciones y llevar a cabo un proceso de filtrado o promediado (denotado por una supra-barra) se obtiene una diferencia de términos que se han definido como Esfuerzo de Reynolds de Escala de Subrejilla (SGS):

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (2.1)$$

El cual es un término análogo, pero de distinta naturaleza según lo antes explicado, al tensor de esfuerzos de Reynolds que se encuentra en las metodologías RANS, y de



forma análoga a como se define la viscosidad turbulenta a través de la hipótesis de Boussinesq en dicha metodología, Smagorinsky (1963) plantea calcular el esfuerzo de subrejilla como:

$$\tau_{ij} = -\frac{2\mu_t \tilde{d}_{ij}}{\rho} \quad (2.2)$$

En donde  $\mu_t$  es la viscosidad turbulenta y  $d_{ij}$  es el tensor de deformación definido como:

$$\tilde{d}_{ij} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

De manera análoga al aplicar dicha metodología a la ecuación de la energía se obtiene un término de conductividad térmica turbulenta  $k_t$ .

Para el desarrollo del presente trabajo se utilizó como base un código computacional para el estudio de flujo de fluidos monofásicos programado utilizando la metodología LES. Al aplicar la metodología LES a las ecuaciones de conservación de masa, momentum y energía de la mezcla junto a la ecuación de estado se obtiene el sistema de ecuaciones principal a ser resuelto. A continuación se presentan las ecuaciones obviando el símbolo suprabarra recordando que cada término de la ecuación ha sido sometido a un proceso de promediado o filtraje:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \rho g_i \quad (2.5)$$

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_v u_i \frac{\partial T}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - (k + k_t) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \quad (2.6)$$

$$\rho = (1 - \alpha) \rho_l(T) + \alpha \rho_v(T) \quad (2.7)$$

En donde:

$$\begin{aligned} \rho_l(T) &= AT^2 + BT + C \\ A &= -3,41094884 \times 10^{-03} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
B &= 1,77190200 \\
C &= 7,7161086 \times 10^2 \\
\rho_v(T) &= DT^4 + ET^3 + FT^2 + GT + I \\
D &= 4,44042975 \times 10^{-9} \\
E &= -4,91751937 \times 10^{-6} \\
F &= 2,06145215 \times 10^{-3} \\
G &= -3,87272498 \times 10^{-1} \\
I &= 27,4822061
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Los polinomios  $\rho_l$  y  $\rho_v$  son el producto del ajuste de una curva a los datos de densidad de líquido saturado y vapor saturado en un rango de temperaturas entre 277,15 K (4 C) a 373,15 K (100 C). De ésta forma la densidad del líquido comprimido se aproximará a la densidad del líquido saturado.

El parámetro  $\alpha$  es la fracción volumétrica de la mezcla y es calculada fuera del sistema de ecuaciones como será explicado detalladamente mas adelante en éste capítulo.

Se destaca adicionalmente que para obtener la ecuación de energía en términos de la temperatura se utiliza la siguiente relación:

$$de = C_v dT \tag{2.10}$$

Considerando además que el fluido dominante en el proceso será el líquido las derivadas espaciales de las capacidades caloríficas son despreciables.

### ***Modelo de Viscosidad Turbulenta***

El término de viscosidad turbulenta puede ser modelado a partir de consideraciones teóricas y experimentales. En 1963 Smagorinsky, basado en el trabajo de Kolgomorov (Sansone, 1999), realiza un análisis de magnitud de las escalas de turbulencia para estudiar la forma como se transporta la energía desde los vórtices grandes hacia aquellos de menor tamaño, involucrando para esto el término de viscosidad turbulenta responsable de la “difusión” de dicha energía.

El modelo planteado por Smogorinsky es el siguiente:

$$\mu_t = \rho C_s \Delta^2 \|\tilde{d}_{ij}\| \quad (2.10)$$

En donde  $\|\tilde{d}_{ij}\|$  es la norma de las componentes promediadas del tensor de deformación definido como:

$$\|\tilde{d}_{ij}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{ij}^2} \quad (2.11)$$

En éste caso  $N$  es el número de dimensiones del problema.

El término  $\Delta$  es el tamaño del vórtice más pequeño que puede ser despreciado en el proceso de filtraje espacial y esta relacionado al tamaño de la celda computacional. Y finalmente el término  $C_s$ , conocido como coeficiente de turbulencia, es un parámetro que depende del número de Reynolds y de  $\Delta$  por lo que debe ser calibrado para cada flujo y malla computacional estudiada.

Sin embargo éste modelo fue propuesto inicialmente para el estudio de flujos atmosféricos razón por la cual no fue diseñado para tomar en cuenta el efecto de disminución de la turbulencia en las cercanías de un límite sólido.

En flujos turbulentos confinados, como es el caso de estudio, los efectos de turbulencia deben desaparecer en las cercanías de los contornos sólidos, como consecuencia de esto la viscosidad y otras propiedades difusivas como la conductividad térmica deben reducirse a sus valores moleculares (Benim y Zinser, 1984). Es necesario por lo tanto modificar el modelo de turbulencia de tal manera que sean considerados estos efectos.

A fin de amortiguar el valor de la viscosidad turbulenta hasta llevarlo a un valor cero en el límite sólido se implementa la metodología planteada por Gatski (1996), en la cual solamente se modifica el coeficiente de turbulencia  $C_s$  de la siguiente forma:

$$C_s = C_s \left[ 1 - e^{-y^+/26} \right] \quad (2.12)$$

En donde  $y^+$  puede interpretarse como la distancia adimensional a la pared o como el número de Reynolds local definido de la siguiente manera:

$$y^+ = \frac{\rho u^* y}{\mu} \quad (2.13)$$

En donde  $y$  es la distancia normal a la pared y  $u^*$  es la velocidad de corte que es, a su vez, una función del esfuerzo cortante en la pared. Dicho esfuerzo cortante puede estimarse suponiendo el conocimiento previo de la distribución de velocidad de un flujo turbulento. La metodología seguida en el presente trabajo se fundamenta en el trabajo de Benim y Zinser (1984), donde el esfuerzo cortante se estudia como una función a trozos compuesta en dos partes.

$$\tau_w = \begin{cases} \frac{\mu \cdot u_{\min}}{y_{\min}} \\ \frac{\kappa C_D^{1/4} \rho u_{\min} K_{\min}^{1/2}}{\ln \left( EC_D^{1/4} y_{\min} \frac{\rho K_{\min}^{1/2}}{\mu} \right)} \end{cases} \quad \text{si } \begin{cases} y_{\min}^+ < 11,6 \\ y_{\min}^+ \geq 11,6 \end{cases} \quad (2.14)$$

$$K_{\min} = \frac{\tau_w}{\rho C_D^{1/2}} \quad C_D=0,09 \quad \kappa=0,4 \quad E=9,0$$

En donde  $u_{\min}$  y  $y_{\min}$  son respectivamente la velocidad y distancia a la pared del nodo computacional más cercano al contorno. En donde la constante  $C_D$  pertenece al modelo de turbulencia  $\kappa$ - $\varepsilon$  y las dos últimas constantes se atribuyen a la teoría de longitud de mezcla de Prandtl (Benim y Zinser,1984).

Las ecuaciones (2.14) se pueden obtener utilizando la distribución unidimensional en la subcapa laminar y turbulenta de Prandtl-Von Kàrmàn considerando paredes lisas, suponiendo adicionalmente que dicha distribución será encontrada a lo largo de todo el dominio.

Según la ley de la pared de Prandtl-Von Kàrmàn la distribución de velocidad adimensional en dirección normal a la pared esta dada por las siguientes ecuaciones:

$$u^+ = \begin{cases} y^+ \\ 2,5 \ln(y^+) + 5,5 \end{cases} \quad \text{si } \begin{cases} y_{\min}^+ < 11,6 \\ y_{\min}^+ \geq 11,6 \end{cases} \quad (2.15)$$

$$u^+ = \frac{u^t}{u^*} \quad (2.16)$$

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.17)$$

En donde  $u'$  es la velocidad tangencial a la pared,  $u^+$  la velocidad adimensional y  $u^*$  la velocidad de corte anteriormente señalada. Debe observarse que este conjunto de ecuaciones constituyen un sistema que debe resolverse iterativamente. Se escogió para la resolución iterativa de éste sistema el Método de la Secante que demostró ser lo suficientemente rápido y estable como para ser implementado en el método computacional.

### ***Modelo de conductividad térmica turbulenta***

Tal como fue mencionado anteriormente al someter a la ecuación de la energía a un proceso de filtraje por la metodología LES, aparece un término asociado a la transferencia de calor debido al transporte macroscópico de la energía por las fluctuaciones turbulentas.

De manera análoga a la hipótesis de Smagorinsky para el cálculo de los esfuerzos de Reynolds de Subrejilla, se plantea modelar el transporte de energía por efectos turbulentos como un efecto difusivo a través de la definición de una conductividad térmica turbulenta que permita relacionar los gradientes filtrados de temperatura con las oscilaciones turbulentas.

En primera instancia los mecanismos de difusión turbulenta del momentum y de calor no son necesariamente los mismos, sin embargo una manera de simplificar el problema es definir un número de Prandtl turbulento de la siguiente manera:

$$Pr_t = \frac{\mu_t C_p}{k_t} \quad (2.18)$$

La hipótesis más sencilla fue propuesta por Reynolds que consideró el  $Pr_t$  igual a la unidad, lo que implica que los mecanismos de transferencia de calor y momentum turbulentos ocurren debido al mismo proceso convectivo, lo cual ha mostrado buenos resultados en algunos problemas de transferencia de calor (Özişik, 1979) por lo que se asumirá para este trabajo un número de Prandtl turbulento igual a la unidad. Sin

embargo se ha demostrado que dicho parámetro depende de las condiciones de flujo (Öziçik, 1979).

### **Ecuaciones de Cierre**

El conjunto de ecuaciones de cierre esta dirigido al cálculo de la fracción volumétrica que aparece en la ecuación de estado del sistema de ecuaciones principal. Estas ecuaciones de cierre están constituidas por ecuaciones de estado termodinámicas, correlaciones para el cálculo de propiedades difusivas y ecuaciones para la estimación de propiedades de mezcla.

Es importante, sin embargo, considerar que desde un punto de vista estricto las propiedades termodinámicas solo tienen sentido en el estudio de sistemas en equilibrio o en la descripción de procesos cuasi-estáticos (Callen, 1960), lo cual se aleja mucho del fenómeno estudiado, por lo cual queda en entredicho el uso de ecuaciones de estado termodinámicas. Sin embargo, aun cuando un sistema actúe irreversiblemente durante un proceso real, es posible considerar que dicho sistema se encuentra compuesto por partes infinitesimalmente pequeñas que se encuentran en equilibrio termodinámico. Dicha consideración se conoce como Modelo de Equilibrio Termodinámico Local (*The Local Thermodynamic Equilibrium Model*) (Bejan, 1997), y permite tratar la termodinámica del no equilibrio en situaciones en donde hay flujo de fluidos mostrando hasta el momento muy buenos resultados en el campo de la ingeniería termodinámica. Pudiéndose justificar su aplicación al considerar que las escalas de tiempo asociadas a los procesos macroscopicamente irreversibles (i.e. generación viscosa de calor) son mucho mayores al tiempo que necesitan las partes infinitamente pequeñas que conforman el sistema para alcanzar el equilibrio termodinámico (Bejan, 1997).

### ***Ecuaciones de estado***

Las ecuaciones de estado son relaciones matemáticas desarrolladas a partir de datos experimentales o análisis teóricos, generalmente aplicables a un rango restringido dentro de una sola fase, que permiten relacionar propiedades termodinámicas. Para el desarrollo de éste trabajo las ecuaciones de estado serán utilizadas como ecuaciones de cierre que permitan relacionar las variables calculadas por el método numérico con el resto de las propiedades termodinámicas de interés.

Las ecuaciones de estado utilizadas en este trabajo fueron tomadas de las publicaciones de *The International Association for the Properties of Water and Steam* (IAPWS, 2007) una asociación internacional sin fines de lucro dedicada al estudio de las propiedades termofísicas del agua para aplicaciones industriales y de investigación. Las ecuaciones de estado formuladas por IAPWS fueron el resultado del trabajo W. Wagner y A. Pruß quienes utilizaron una colección de datos experimentales recopilados durante años por grupos de investigación adscritos a dicha asociación.

La formulación del IAPWS cubre los estados termodinámicos contenidos en el siguiente rango:

$$\begin{aligned} 273.15 \leq T \leq 1073.15 \text{ si } p \leq 100 \text{MPa} \\ 1073.15 \leq T \leq 2273.15 \text{ si } p \leq 50 \text{MPa} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Dicho rango es dividido en cinco regiones tal como se muestra en la figura 2.1, para cada región se presenta una ecuación de estado fundamental de la cual pueden ser obtener el resto de las propiedades termodinámicas al aplicar las ecuaciones de Maxwell. Para las regiones 1, 2 y 5 la ecuación fundamental es para el cálculo de la función de Gibbs dependiente de la presión y temperatura, para la región 3 la ecuación fundamental coloca a la función de Helmholtz dependiente de la densidad y temperatura. La región 4 correspondiente a la línea de saturación es cubierta por un polinomio que relaciona a la presión y la temperatura.

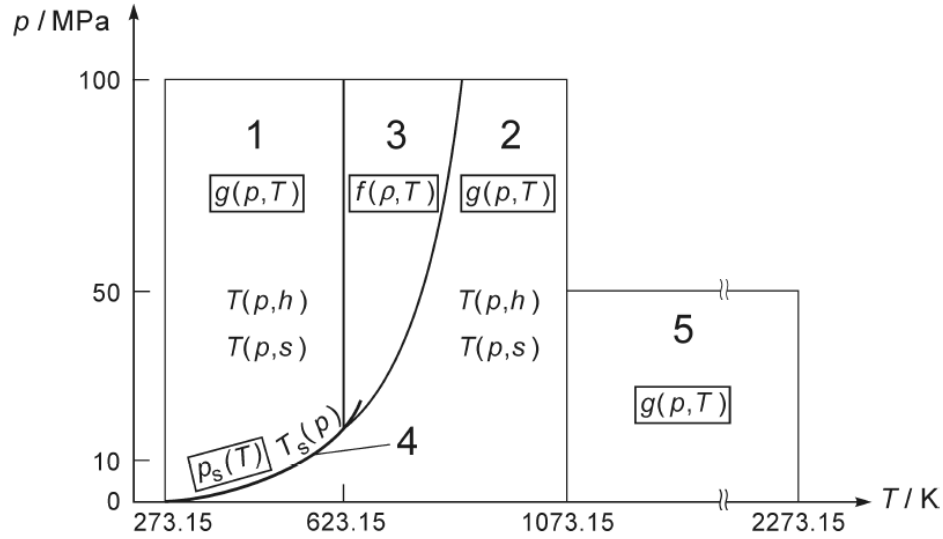


Fig 2.1. Regiones y ecuaciones fundamentales del IAPWS. (IAPWS, 2007)

Para el desarrollo del presente trabajo resultaron de interés las ecuaciones de las regiones 1, 2 y 4, que corresponden a los estados de saturación, y los estados de líquido comprimido y vapor sobrecalentado por debajo del punto crítico.

*Ecuación de estado para el líquido comprimido*

Como ya fue mencionado la fase de líquido comprimido, correspondiente a la región 1, es cubierta por una ecuación fundamental de la función de Gibbs. Dicha ecuación se formula de la siguiente manera:

$$\frac{g(p,T)}{RT} = \gamma(\pi, \tau) = \sum_{i=1}^{34} n_i (7,1 - \pi)^{I_i} (\tau - 1.222)^{J_i} \quad (2.21)$$

$$\pi = \frac{p}{p^*} \quad \tau = \frac{T}{T^*}$$

En donde  $p^* = 16.53 \text{ MPa}$ ,  $T^* = 1386 \text{ K}$  como valores de referencia,  $R = 0,461526 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  es la constante del vapor de agua como gas perfecto y los coeficientes  $n_i$ ,  $I_i$  y  $J_i$  son constantes de ajuste (IAPWS, 2007), las cuales son anexadas en el apéndice A del presente trabajo.

Para el cálculo de las propiedades de estado de interés se utilizan las relaciones de Maxwell adecuadas, para el volumen específico, entalpía, capacidades caloríficas isobáricas e isocóricas y la velocidad del sonido son:



$$\begin{aligned}
 v &= \left( \frac{\partial g}{\partial p} \right)_T \\
 h &= g - T \left( \frac{\partial g}{\partial T} \right)_p \\
 C_p &= \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \\
 C_v &= \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_p \\
 c &= \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s^{1/2} = v \left[ - \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \right]^{1/2}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

*Ecuación de estado para el vapor sobrecalentado*

La ecuación para la región 2 también se formula para la función de Gibbs adimensional, ésta función sin embargo esta compuesta de dos partes:

$$\frac{g(p,T)}{RT} = \gamma(\pi, \tau) = \gamma^0(\pi, \tau) + \gamma^r(\pi, \tau) \tag{2.23}$$

En donde  $\pi$  y  $\tau$  se definan de la misma manera que la sección anterior pero con valores de referencia  $p^* = 1 \text{MPa}$  y  $T^* = 540 \text{ K}$ . La función  $\gamma^0(\pi, \tau)$  representa el comportamiento de la función de Gibbs para el vapor de agua como un gas perfecto, mientras que la función  $\gamma^r(\pi, \tau)$  es llamada parte residual y contempla el comportamiento de el vapor en las cercanías de la línea de saturación.

La forma de cada una de estas funciones es la siguiente:

$$\gamma^0(\pi, \tau) = \ln(\pi) + \sum_{i=1}^9 n_i^0 \tau^{J_i^0} \tag{2.24}$$

$$\gamma^r(\pi, \tau) = \sum_{i=1}^{43} n_i \pi^{I_i} (0,5 - \tau)^{J_i} \tag{2.25}$$

En donde  $n_i^0$ ,  $J_i^0$ ,  $n_i$ ,  $I_i$ , y  $J_i$  son constantes de ajuste (IAPWS, 2007) cuyo valor numérico puede encontrarse en apéndice A de éste informe. Para calcular el resto de las propiedades termodinámicas se aplican las ecuaciones de Maxwell del conjunto de ecuaciones (2.22).

*Ecuación de la línea de saturación*

La ecuación que describe la línea de saturación es una ecuación cuadrática e implícita que puede ser directamente resuelta para la presión o temperatura de saturación. La ecuación es de la forma:

$$\pi^2 \tau^2 + n_1 \pi^2 \tau + n_2 \pi^2 + n_3 \pi \tau^2 + n_4 \pi \tau + n_5 \pi + n_6 \tau^2 + n_7 \tau + n_8 = 0 \quad (2.26)$$

En donde  $\pi$  y  $\tau$  son expresiones adimensionales para la presión y la temperatura respectivamente, con valores de referencia  $p^* = 1 \text{ MPa}$  y  $T^* = 1 \text{ K}$ , la forma de estas expresiones es la siguiente:

$$\pi = \left( \frac{p}{p^*} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \tau = \frac{T}{T^*} + \frac{n_9}{T/T^* - n_{10}} \quad (2.27)$$

Y las constantes  $n_i$  son constantes de ajuste. La formulación del IAPWS incluye ecuaciones explícitas para el cálculo de la presión y temperatura de saturación (IAPWS, 2007).

***Propiedades Difusivas***

Para el desarrollo del trabajo es necesaria también la estimación de las propiedades difusivas del fluido, particularmente la viscosidad y la conductividad térmica, estas propiedades indican la capacidad del fluido para difundir el momentum y el calor.

Estas propiedades han sido catalogadas como termofísicas ya que han demostrado cierta dependencia a la temperatura del medio. La IAPWS ha publicado ecuaciones basadas en mediciones experimentales para la estimación de dichas propiedades, dichas formulaciones fueron implementadas en el desarrollo del trabajo ya que permiten obtener con un alto grado de precisión el valor de las propiedades tanto para la fase líquida como para la fase vapor del agua.

*Viscosidad*

La formulación del IAPWS coloca a la viscosidad como una función de la densidad y la temperatura, ésta ecuación tiene el siguiente rango de validez:

$$\begin{aligned}
 0 < p < p_t & \quad \text{para} \quad 273.16K \leq T < 1173.15K \\
 p_t < p \leq 300MPa & \quad \text{para} \quad T_m(p) \leq T \leq 1173.15K \\
 300MPa < p \leq 350MPa & \quad \text{para} \quad T_m(p) \leq T \leq 1173.15K \quad (2.28) \\
 350MPa < p \leq 500MPa & \quad \text{para} \quad T_m(p) \leq T \leq 433.15K \\
 500MPa < p \leq 1000MPa & \quad \text{para} \quad T_m(p) \leq T \leq 373.15K
 \end{aligned}$$

En donde  $T_m$  es la temperatura de fusión del agua a la presión establecida y  $p_t$  es la presión de la línea triple.

La correlación es adimensional y está compuesta por tres términos agrupados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mu} &= \bar{\mu}_0(\tau) \cdot \mu_1(\tau, \bar{\rho}) \cdot \bar{\mu}_2(\tau, \bar{\rho}) \\
 \bar{\mu} &= \frac{\mu}{\mu^*} \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho^*} \quad \tau = \frac{T}{T^*} \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

En donde  $T^*=647,096$  K,  $\rho^*=322,0$  kg  $m^{-3}$  y  $\mu^*=10^{-6}$  Pa s, como constantes de referencia.

El primer término de la correlación corresponde al comportamiento de la viscosidad para el agua como un gas perfecto, y tiene la siguiente forma:

$$\bar{\mu}_0(\tau) = \frac{100\sqrt{\tau}}{\sum_{i=0}^3 \frac{H_i}{\tau^i}} \quad (2.30)$$

En donde los coeficientes  $H_i$  son constantes de ajuste (IAPWS,2008).

El segundo término corresponde a la contribución de la viscosidad debido a una densidad finita, el mismo tiene la forma:

$$\bar{\mu}_1(\tau, \bar{\rho}) = \exp \left[ \bar{\rho} \sum_{i=0}^5 \left( \frac{1}{\tau} - 1 \right)^i \sum_{j=0}^6 H_{ij} (\bar{\rho} - 1)^j \right] \quad (2.31)$$

Donde los coeficientes  $H_{ij}$  son constantes de ajuste (IAPWS, 2008).

Finalmente el último término corresponde a la ampliación crítica de la viscosidad, ya que justo en el punto crítico la viscosidad es teóricamente infinita (Callen, 1960) éste término contribuye con un considerable incremento de la viscosidad en los alrededores de dicho punto, sin embargo su influencia fuera de dicha región es menor

a la incertidumbre de la formulación por lo que la IAPWS recomienda asignar un valor unitario a dicho término si los estados a considerar se encuentran lejos del punto crítico, como es el caso tratado en el presente trabajo.

*Conductividad térmica*

La correlación de la IAPWS para el cálculo de la conductividad térmica del agua se coloca en función de la temperatura y la densidad y tiene el siguiente rango de validez:

$$\begin{array}{lll}
 p \leq 400MPa & \text{para} & 0C \leq T \leq 125C \\
 p \leq 200MPa & \text{para} & 125C \leq T \leq 250C \\
 p \leq 150MPa & \text{para} & 250C \leq T \leq 400C \\
 p \leq 100MPa & \text{para} & 400C \leq T \leq 800C
 \end{array} \tag{2.32}$$

La correlación es adimensional y tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 k &= k_0(\tau) \cdot k_1(\tau, \bar{\rho}) + \bar{k}_2(\tau, \bar{\rho}) \\
 \kappa &= \frac{k}{k^*} \quad \tau = \frac{T}{T^*} \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho^*}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Donde  $T^*=647,226 \text{ K}$ ,  $k^*=0,4945 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  y  $\rho^*=317,763 \text{ kg m}^{-3}$  como valores de referencia.

El primer término de la correlación corresponde a la conductividad térmica del vapor de agua como un gas perfecto, y tiene la forma:

$$\kappa_0(\tau) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sum_{i=0}^3 \frac{L_i}{\tau^i}} \tag{2.34}$$

Donde los coeficientes  $L_i$  son constantes de ajuste (IAPWS, 2008).

El segundo término de la correlación corresponde al aporte de densidades finitas en la conductividad térmica, le corresponde la expresión:

$$\kappa_1(\tau, \bar{\rho}) = \exp \left[ \bar{\rho} \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^5 L_{ij} \left( \frac{1}{\tau} - 1 \right)^i (\bar{\rho} - 1)^j \right] \tag{2.35}$$

Donde los coeficientes  $L_{ij}$  son constantes de ajuste (IPAWS, 2008).

El último término de la correlación corresponde a una ampliación para la zona crítica, dicho término presenta una contribución despreciable en estados alejados del punto crítico y la IAPWS recomienda su desincorporación.

### ***Propiedades de mezcla***

Como se esta utilizando un modelo de mezcla es necesario estimar las propiedades de dicho fluido constituido por la mezcla líquido-vapor. Estas propiedades de mezcla pueden ser estimadas como un promedio ponderado con el aporte de cada una de las fases.

Las propiedades termodinámicas extensivas en una mezcla se calculan como la suma del aporte de cada una de las fases, así por ejemplo el volumen de la mezcla es la suma del volumen ocupado por el vapor mas el volumen ocupado por el líquido. Es a partir de esto que surge la propiedad calidad (fracción masa) que permite estimar el aporte de cada una de las fases en la magnitud propiedades termodinámicas específicas de una mezcla de esta forma:

$$v = (1 - x)v_l + xv_v \quad (2.36)$$

$$C_p = (1 - x)C_{pl} + xC_{pv} \quad (2.37)$$

$$C_v = (1 - x)C_{vl} + xC_{vv} \quad (2.38)$$

$$h = (1 - x)h_l + xh_v \quad (2.39)$$

La densidad, en cambio, es la cantidad de masa por unidad de volumen y debe ser promediada con la fracción de volumen:

$$\rho = (1 - \alpha)\rho_l + \alpha\rho_v \quad (2.40)$$

Las propiedades difusivas como la viscosidad y la conductividad térmica, en cambio, no pueden clasificarse como propiedades extensivas o intensivas, sería incorrecto por ejemplo, pensar que la conductividad térmica de una mezcla es igual a la suma de la conductividad de cada una de las fases. La experiencia ha demostrado que los efectos viscosos en el flujo de una mezcla presenta una magnitud intermedia entre las correspondientes a las fases puras, pero la magnitud de dicha propiedad depende

también de las condiciones de flujo y la forma como se encuentren distribuidas las fases (Awad y Muzychca, 2008).

Ha sido objeto de numerosos estudios el plantear correlaciones para la estimación de las propiedades difusivas de mezcla, basándose en mediciones experimentales de flujos multifásicos (Awad y Muzychca, 2008). Dichas correlaciones han sido utilizadas principalmente para la estimación de la caída de presión en sistemas de tuberías a través de modelos unidimensionales, en donde los errores obtenidos pueden llegar a ser considerables dependiendo de las ecuaciones de propiedades de mezcla escogidas (García y García, 2009).

En estudios de nubes de cavitación previos el promediado ponderado de las propiedades con la fracción volumen han mostrado resultados aceptables (Goncalves y Patella), dicha ecuación fue planteada por Cichitti *et. al* en 1960. Las ecuaciones son:

$$\mu = (1 - \alpha)\mu_l + \alpha\mu_v \quad (2.41)$$

$$k = (1 - \alpha)k_l + \alpha k_v \quad (2.42)$$

Con respecto a la velocidad del sonido, se puede constatar, a través de las ecuaciones (2.22), que se trata de una propiedad al ser definida como una relación entre propiedades termodinámicas. La obtención de un valor para dicha propiedad en una mezcla merece consideraciones adicionales.

La experiencia ha demostrado que la velocidad del sonido en una mezcla es al menos un orden de magnitud menor a la velocidad en cada una de las fases puras, incluso para bajos valores de fracción volumétrica. La razón de esto reside en el hecho de que el sonido es la propagación dinámica de una onda de presión, una burbuja dispersa de vapor sometida a dicha onda en un medio viscoso realizará procesos de expansión y compresión, en donde además pudieran ocurrir fenómenos de cambio de fase, disipándose en éstos procesos una cantidad importante de la energía asociada a la onda acústica (Coste y Laroche, 1993).

Existen numerosas ecuaciones teóricas y semi-empíricas para la estimación de la velocidad del sonido en mezclas, una de las más sencillas y que ha logrado al mismo

tiempo ofrecer resultados en buena concordancia con las mediciones experimentales en mezclas homogéneas es el modelo de medio efectivo, la cual toma en cuenta el efecto del cambio de densidad de la mezcla y la compresibilidad de la misma (Coste y Laroche, 1993):

$$c^2 = \frac{1}{\rho\chi} = \frac{\rho_l \rho_v c_l^2 c_v^2}{\rho [\rho_v c_v^2 (1-\alpha) + \rho_l c_l^2 \alpha]} \quad (2.43)$$

En donde  $\chi$  es el factor de compresibilidad de la mezcla. Es importante tomar en cuenta que ésta ecuación no considera los efectos de disipación viscosa razón por la cual tiende a sobre estimar cuando el medio líquido es de alta viscosidad (Coste y Laroche, 1993).

### ***Fracción Volumétrica***

Una vez que han sido establecidas el conjunto de ecuaciones estado se plantean las ecuaciones necesarias para el cálculo de la fracción de volumen en el dominio. Recordando la ecuación (1.7) se considera la cavitación como un proceso isoentálpico.

Por lo tanto si en un determinado punto en el dominio de solución se registra una caída de presión por debajo de la presión de saturación se puede estimar la calidad a partir de la ecuación (2.39) (véase la figura 1.7):

$$x = \frac{h_1 - h_l(p_2)}{h_v(p_2) - h_l(p_2)} \quad (2.44)$$

La fracción de volumen puede ahora estimarse a partir de la siguiente relación:

$$\alpha = \frac{\rho x}{\rho_v} \quad (2.45)$$

De ésta manera la fracción volumen solo presentará valores diferentes de cero en regiones donde la presión sea inferior a la presión de vapor, y provocando una condensación prematura apenas la presión aumenta por encima de la de vapor. Se sabe que las estructuras de vapor pueden ser transportadas a regiones de presión

ligeramente mayores a la presión de saturación sin que ocurra un colapso de las mismas, efecto atribuible a la tensión superficial en la interfase líquido vapor (Brennen, 1995).

Para solventar ésta situación se introduce el concepto de velocidad del sonido de mezcla. Al predecirse una perturbación en la densidad del medio, la misma debe propagarse obedeciendo el límite físico impuesto por la velocidad de propagación de ondas acústicas. De esta forma se considera que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \cong \frac{\rho - \rho_{in}}{p - p_{in}} = \frac{1}{c^2} \quad (2.46)$$

En donde  $\rho_{in}$  y  $p_{in}$  son la densidad y la presión encontradas en el punto de menor presión en el dominio donde ocurre la inyección de la cavitación, y la velocidad del sonido  $c$  es calculado por la ecuación (2.43) en el mismo punto.

De ésta forma se puede calcular el campo de densidades en los alrededores de la región de presión inferior a la presión de saturación, y a partir de éstos calcular el campo de fracciones volumétricas a introducirse en el sistema de ecuaciones principal:

$$\rho = \frac{p - p_{in}}{c^2} + \rho_{in} \quad (2.47)$$

$$\alpha = \frac{\rho - \rho_l}{\rho_v - \rho_l} \quad (2.48)$$

Estas ecuaciones deben ser aplicadas en un rango de presiones que va desde la presión mínima del dominio ( $p_{in}$ ) hasta un nivel de presión que resulte en la densidad del medio líquido ( $\rho_{\infty}$ ), dicha presión límite puede ser estimada como:

$$p_{lim} = c^2(\rho_{\infty} - \rho_{in}) + p_{in} \quad (2.49)$$

De ésta manera queda determinado el cálculo de todas las propiedades a ser utilizadas en el sistema de ecuaciones principal. En la figura 2.2 se presenta un diagrama del algoritmo de cálculo para la implementación del modelo, destacándose que se trata de un proceso iterativo debido a la no linealidad del sistema.



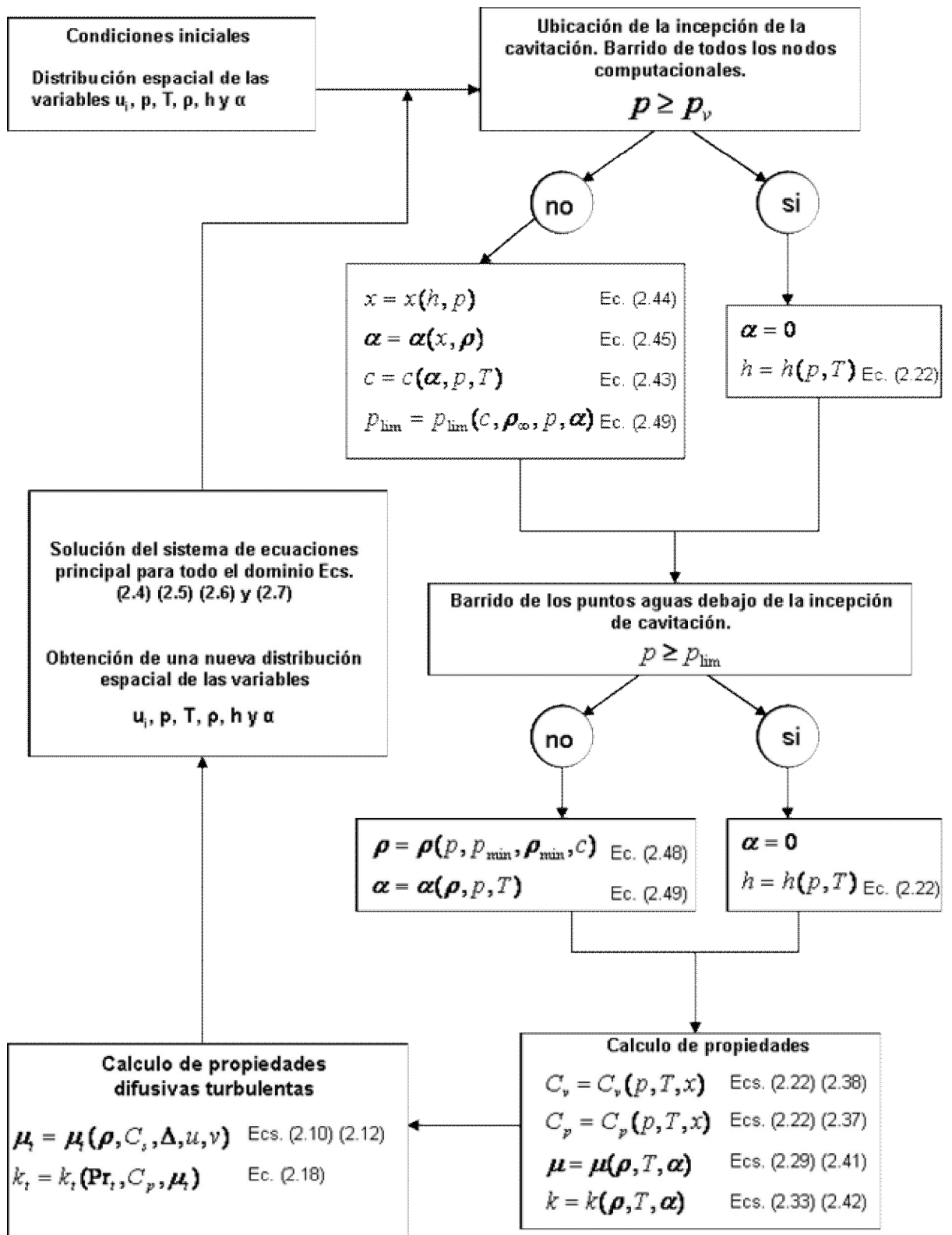


Fig. 2.2. Algoritmo para el cálculo de flujos cavitantes según el modelo planteado.

## Método de Elementos Finitos

Debido a la complejidad del modelo físico planteado, la solución del sistema principal de ecuaciones requiere la utilización de una técnica de solución numérica adecuada. En la actualidad los métodos más empleados en el campo de la Dinámica de Fluidos son: el Método de las Diferencias Finitas, el Método del Volumen Finito y el Método del Elemento Finito, sin embargo, este último presenta ventajas en cuanto a la manera matemática como son tratadas las ecuaciones diferenciales, ya que se utilizan formulaciones basadas en el método de los residuos ponderados, las cuales bastante robustas, así como la forma en la cual es discretizado el dominio de cálculo, que permite la utilización de elementos de diversa forma. En este trabajo fue escogido el Método de Elementos Finitos (MEF) para la solución numérica del modelo partiendo de un código computacional basado en el código publicado por C. Taylor y T. Hughes (1981) para la solución de problemas de flujos bidimensionales, laminares e incompresibles, y modificado por E. Sansone (1999) para el cálculo de flujos bi y tri-dimensionales, transitorios, turbulentos y con transferencia de calor. El MEF es utilizado en su formulación tradicional (Bubnov-Galerkin) en donde las funciones de ponderación son iguales a las funciones de forma. El tipo de elementos utilizados son elementos cuadrilaterales cuadráticos de ocho nodos, uno en cada vértice y otros cuatro en la mitad de las aristas. Las variables a ser resueltas por el sistema de ecuaciones son:

- (a) Componentes de la velocidad ( $u_i$ )
- (b) Presión ( $p$ ).
- (c) Temperatura ( $T$ ).
- (d) Densidad ( $\rho$ ).

Las componentes de velocidad son calculadas iso-paramétricamente, es decir, para este caso su distribución es aproximada con funciones cuadráticas, y se calculan para todos los nodos de la malla computacional. La presión, temperatura y densidad son calculadas sub-paramétricamente con funciones lineales, y solo son calculadas para

los nodos ubicados en los vértices (fig. 2.3). El campo de propiedades es calculado en forma discreta a partir de los valores nodales a partir de la siguiente aproximación:

$$\tilde{u}_x = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_{x_i} \quad (2.50)$$

$$\tilde{u}_y = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_{y_i} \quad (2.51)$$

$$\tilde{p} = \sum_{i=1}^4 M_i(\xi, \eta) p_i \quad (2.52)$$

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^4 M_i(\xi, \eta) T_i \quad (2.53)$$

$$\tilde{\rho} = \sum_{i=1}^4 M_i(\xi, \eta) \rho_i \quad (2.54)$$

En donde  $\eta$  y  $\xi$  son las coordenadas locales de cada elemento (fig. 2.3),  $N$  es la función cuadrática de interpolación y  $M$  es la función lineal de interpolación.

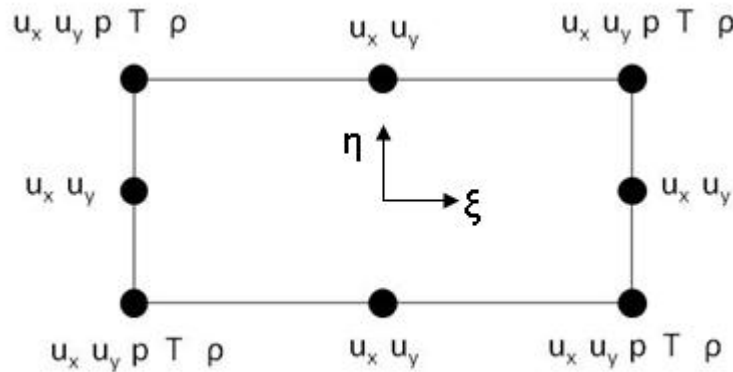


Fig. 2.3. Elemento Finito con los grados de libertad correspondiente a cada nodo.

Aplicando la metodología bajo el esquema de Bubnov-Galerkin se procede a integrar por partes los términos difusivos a fin de disminuir el orden de derivación y adicionalmente se plantea un proceso iterativo a fin de tratar los términos no lineales, se obtiene finalmente el siguiente sistema de ecuaciones:

Ecuación de momentum:

$$\begin{aligned}
 & \int_A \hat{\rho} N^P N^Q dA\{\dot{u}_i\} + \int_A N^P \hat{\rho} \hat{u}_j \frac{\partial N^Q}{\partial x_j} dA\{u_i\} + \int_A \mu_{eff} \frac{\partial N^P}{\partial x_j} \frac{\partial N^Q}{\partial x_j} dA\{u_i\} + \\
 & \int_A \mu_{eff} \frac{\partial N^P}{\partial x_j} \frac{\partial N^Q}{\partial x_i} dA\{u_i\} + \int_A N^P \frac{\partial M^Q}{\partial x_j} dA\{p_i\} - \int_A \frac{2}{3} \mu \frac{\partial N^P}{\partial x_j} \frac{\partial N^Q}{\partial x_i} dA\{u_i\} \quad (2.55) \\
 & = \int_{\Gamma} \mu_{eff} \frac{\partial N^P}{\partial x_j} \frac{\partial N^Q}{\partial x_j} n_i d\Gamma\{u_i\} + \int_{\Gamma} \mu_{eff} \frac{\partial N^P}{\partial x_j} \frac{\partial N^Q}{\partial x_i} n_j d\Gamma\{u_i\}
 \end{aligned}$$

Ecuación de continuidad:

$$\int_A M^R M^S dA\{\dot{\rho}\} + \int_A M^R \hat{u}_i \frac{\partial M^S}{\partial x_j} dA\{\rho\} + \int_A M^R \hat{\rho} \frac{\partial N^S}{\partial x_j} dA\{u_i\} = 0 \quad (2.56)$$

Ecuación de la energía:

$$\begin{aligned}
 & \int_A M^R \hat{\rho} \hat{C}_v M^S dA\{\hat{T}\} + \int_A M^R \hat{\rho} \hat{C}_v \hat{u}_i \frac{\partial M^S}{\partial x_j} dA\{T\} + \int_A M^R \hat{\rho} \frac{\partial N^S}{\partial x_j} dA\{u_i\} - \\
 & \int_A k_{eff} \frac{\partial M^R}{\partial x_i} \frac{\partial M^S}{\partial x_i} dA\{T\} - \int_A M^R \mu \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial N^S}{\partial x_j} dA\{u_i\} + \int_A M^R \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} \frac{\partial N^S}{\partial x_i} dA\{u_i\} \quad (2.57) \\
 & = \int_{\Gamma} k_{eff} \frac{\partial M^R}{\partial x_i} \frac{\partial M^S}{\partial x_i} n_i d\Gamma\{T\}
 \end{aligned}$$

Ecuación de Estado:

$$\begin{aligned}
 & \int_A M^R M^S dA\{\rho\} - (1 - \alpha) \left[ \int_A M^R M^S \left( A \hat{T} + B + \frac{C}{\hat{T}} \right) dA\{T\} \right] + \\
 & \alpha \left[ \int_A M^R M^S \left( D \hat{T}^3 + E \hat{T}^2 + F \hat{T} + G + I / \hat{T} \right) dA\{T\} \right] = 0 \quad (2.58)
 \end{aligned}$$

En donde los términos identificados con el símbolo  $\hat{\phantom{x}}$  son considerados constantes y son calculados a partir de los campos de propiedades obtenidos de la iteración anterior y los términos identificados con un supra-punto indican que los mismos se encuentran derivados temporalmente.

Es necesario especificar como fueron tratados los efectos transitorios, para esto es conveniente expresar las ecuaciones en una formulación más compacta, se procede ahora a agrupar los términos que conforman matrices:

$$\begin{aligned}
 & [I]_M \{\dot{u}_i\} + [C]_M \{u_i\} + [D_1]_M \{u_i\} + [D_2]_M \{u_i\} + \\
 & [L]_M \{p\} + [V]_M \{u_i\} = [B]_M \quad (2.59)
 \end{aligned}$$

$$[I]_C \{\dot{\rho}\} + [C_1]_C \{\rho\} + [C_2]_C \{u_i\} = 0 \quad (2.60)$$

$$[I]_E \{\dot{T}\} + [C]_E \{T\} + [L]_E \{u_i\} - [D]_E \{T\} - [V_1]_E \{u_i\} + [V_2]_E \{u_i\} = [B]_E \quad (2.61)$$

$$[I]_S \{\rho\} + [Y_1]_S \{T\} + [Y_2]_S \{T\} = 0 \quad (2.62)$$

En donde el subíndice  $M$  indica que esta referido a la ecuación de momentum,  $C$  a la de continuidad,  $E$  a la de energía y  $S$  a la ecuación de estado. Con respecto al nombre de las matrices, las matrices  $I$  están asociadas a términos inerciales,  $C$  a términos convectivos,  $D$  a términos difusivos,  $V$  a términos viscosos y  $B$  a las condiciones de borde.

Utilizando una técnica de diferenciación temporal simple hacia atrás, las derivadas temporales pueden aproximarse como:

$$\{\dot{u}_i\} = \frac{\{u_i\}^{t+1} - \{u_i\}^t}{\Delta t} \quad (2.63)$$

$$\{\dot{\rho}\} = \frac{\{\rho\}^{t+1} - \{\rho\}^t}{\Delta t} \quad (2.64)$$

$$\{\dot{T}\} = \frac{\{T\}^{t+1} - \{T\}^t}{\Delta t} \quad (2.65)$$

Adicionalmente los vectores de variables y el vector de condiciones de contorno pueden ser ponderados temporalmente mediante un factor de relajación que puede ser escogido dentro del rango  $[0,1]$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \{u_i\} &= (1-\theta)\{u_i\}^t + \theta\{u_i\}^{t+1} \\ \{\rho\} &= (1-\theta)\{\rho\}^t + \theta\{\rho\}^{t+1} \\ \{T\} &= (1-\theta)\{T\}^t + \theta\{T\}^{t+1} \\ 0 &\leq \theta \leq 1 \end{aligned} \quad (2.66)$$

Siguiendo el esquema de ponderación de Crank-Nicolson el valor de  $\theta$  es de  $0,5$ , valor con el cual se obtiene una gran estabilidad del sistema numérico.

Sustituyendo las ecuaciones (2.63), (2.64), (2.65) y (2.66) en las ecuaciones (2.59), (2.60) y (2.61) se obtienen las ecuaciones a ser resueltas por el método numérico:

$$\begin{aligned}
 & [I]_M \{u_i\}^{t+1} + \theta \Delta t [C]_M \{u_i\}^{t+1} + \theta \Delta t [D_1]_M \{u_i\}^{t+1} + \theta \Delta t [D_2]_M \{u_i\}^{t+1} + \\
 & \theta \Delta t [L]_M \{p\}^{t+1} + \theta \Delta t [V]_M \{u_i\}^{t+1} = [B]_M + [I]_M \{u_i\}^t - (1-\theta) \Delta t [C]_M \{u_i\}^t - \\
 & (1-\theta) \Delta t [D_1]_M \{u_i\}^t - (1-\theta) \Delta t [D_2]_M \{u_i\}^t - (1-\theta) \Delta t [L]_M \{p\}^t - \\
 & (1-\theta) \Delta t [V]_M \{u_i\}^t
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned}
 & [I]_C \{\rho\}^{t+1} + \theta \Delta t [C_1]_C \{\rho\}^{t+1} + \theta \Delta t [C_2]_C \{u_i\}^{t+1} = [I]_C \{\rho\}^t - \\
 & (1-\theta) \Delta t [C_1]_C \{\rho\}^t - (1-\theta) \Delta t [C_2]_C \{u_i\}^t
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned}
 & [I]_E \{T\}^{t+1} + \theta \Delta t [C]_E \{T\}^{t+1} + \theta \Delta t [L]_E \{u_i\}^{t+1} - \theta \Delta t [D]_E \{T\}^{t+1} - \theta \Delta t [V_1]_E \{u_i\}^{t+1} + \\
 & \theta \Delta t [V_2]_E \{u_i\}^{t+1} = [B]_E + [I]_E \{T\}^t - (1-\theta) \Delta t [C]_E \{T\}^t - (1-\theta) \Delta t [L]_E \{u_i\}^t \\
 & + (1-\theta) \Delta t [D]_E \{T\}^t + (1-\theta) \Delta t [V_1]_E \{u_i\}^t - (1-\theta) \Delta t [V_2]_E \{u_i\}^t
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Las propiedades son calculadas para cada instante de tiempo y como en la ecuación de estado no existe ninguna derivada respecto al tiempo, la misma no necesita ningún tratamiento temporal, por lo que es resuelta en cada paso de tiempo según la ecuación (2.62).

## CAPITULO III

### METODOLOGÍA

El conjunto de ecuaciones y técnicas descritos en los anteriores capítulos requieren un procedimiento de aplicación, a fin de llevar un control de los parámetros involucrados en el desarrollo del trabajo y alcanzar resultados reproducibles y ligados a una metodología definida. En el presente capítulo se realiza un resumen de las actividades realizadas en el desarrollo del trabajo.

#### **Generación de la malla computacional**

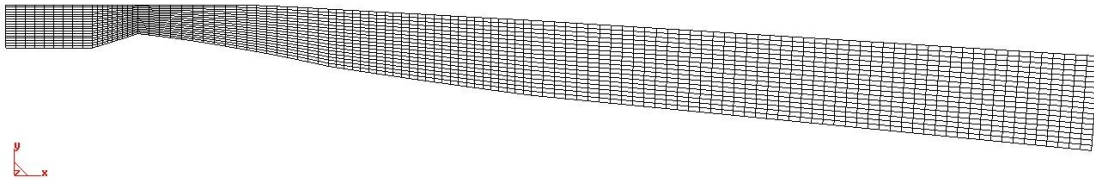
Uno de los aspectos más importantes en la aplicación del Método de Elementos Finitos es lograr la discretización del dominio en un conjunto de elementos lo suficientemente grande como para reproducir correctamente la física del problema a través de los modelos planteados. Los elementos deben adicionalmente cumplir con ciertos aspectos que disminuyen el error asociado a la aproximación del método, por ejemplo los elementos no deben tener ángulos muy agudos ( $<10^\circ$ ) así como también deben evitarse cambios bruscos en el tamaño de elementos contiguos.

Adicionalmente para la resolución del problema se requirió que la numeración de los nodos fuera en sentido ascendente de izquierda a derecha a fin de facilitar la programación de los módulos de amortiguación del coeficiente turbulento. Esto se logro a través de una técnica simple de renumeración de mallas y la condición de que la altura de los elementos fueran líneas completamente verticales.

Finalmente la malla debía ajustarse a la geometría del ducto convergente-divergente a ser estudiado, del cual se cuenta con las coordenadas del contorno. Para lograr esto se aplico un proceso de ajuste de mallas previamente generadas, se compararon las coordenadas de todos los nodos ubicados en el contorno con las coordenadas de la

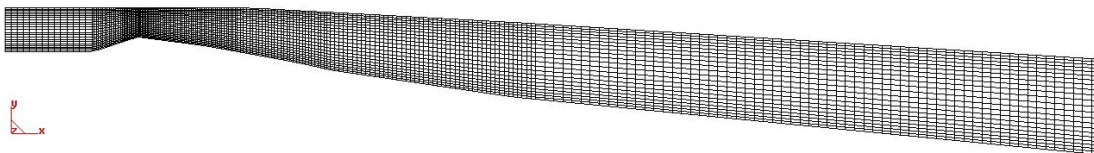
geometría real, a través de un proceso de interpolación lineal entre los datos de la geometría real se ajustaron las coordenadas de los nodos.

Varias mallas fueron generadas y utilizadas en los cálculos, particularmente se encontró que la diferencia en los resultados obtenidos para cálculos hidrodinámicos (sin generación de vapor) para una malla de 6253 nodos y 1998 elementos (fig.3.1) no fueron significativamente distintos a aquellos obtenidos para una malla de 15549 nodos y 5016 elementos (fig. 3.2), a pesar de esto se decidió trabajar con la malla más fina en vista de la complejidad de los fenómenos de flujo multifásico.



**Fig. 3.1. Malla de 6253 nodos y 1998 elementos.**

Un refinamiento especial se llevo a cabo hacia las paredes inferior y superior ya que en estas zonas se esperan fuertes gradientes de velocidad. Adicionalmente se concentraron elementos alrededor de la garganta del ducto, en ésta región se encuentran fuertes gradientes de presión además de la generación de vapor.



**Fig.3.2. Malla de 15549 nodos y 5016 elementos.**

### **Condiciones Iniciales y obtención de convergencia para flujos turbulentos**

En el uso de métodos numéricos para la solución de problemas no lineales, es común partir de una condición inicial o solución semilla cercana a la solución final del problema, de ésta forma se reducen significativamente los tiempos de cálculo.



La dificultad de simulación de flujos turbulentos está dada precisamente por la no linealidad de las ecuaciones que describen el flujo, es importante por lo tanto partir de una solución inicial adecuada. Se decidió por lo tanto simular flujos cada vez más complejos incrementando el número de Reynolds en cada simulación hasta alcanzar las condiciones de flujo deseadas. El punto de partida fue la solución de las ecuaciones de flujo no viscoso a través de la función corriente.

La distribución de la función corriente fue utilizada para calcular el campo de velocidades a través de las relaciones:

$$u_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \quad (3.1)$$

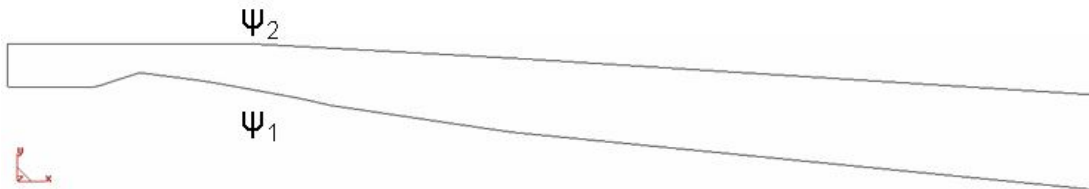
Ese campo de velocidades constituye el punto de partida para el conjunto de simulaciones de flujo viscoso necesarias para alcanzar el número de Reynolds correspondiente al problema, en donde la condición inicial de cada simulación es el resultado de la simulación anterior. En la tabla 3.1 se especifican las simulaciones realizadas.

**Tabla 3.1. Simulaciones para alcanzar convergencia en régimen de flujo turbulento.**

Tipo de Flujo	Re
Potencial	150
Laminar	200
Laminar	400
Laminar	600
Turbulento	1500
Turbulento	3000
Turbulento	$1 \times 10^5$
Turbulento	$3,78 \times 10^7$

### Condiciones de Contorno

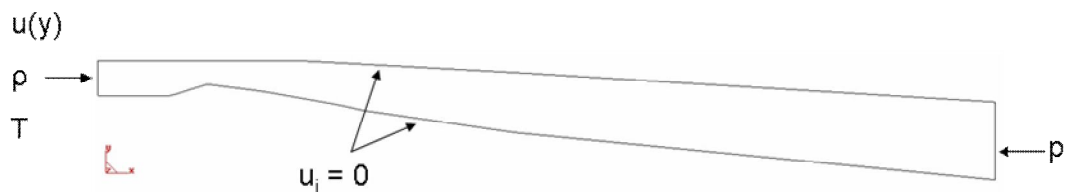
A fin de poder reproducir correctamente el fenómeno a partir del modelo es necesario colocar condiciones de contorno acordes con la física del problema. Estas condiciones de borde dependen del fenómeno a ser simulado, para el cálculo de flujo potencial se impuso una distribución uniforme de la distribución corriente en la pared inferior y superior (Fig. 3.3), recordando que la diferencia de la función corriente entre dos puntos es igual al caudal que fluye entre los mismos.



**Fig. 3.3. Condiciones de borde para simulación de flujo potencial**

En general las condiciones de borde impuestas para la simulación de flujos viscosos fueron (fig.3.4):

- Distribución de la componente horizontal de velocidad en la entrada del dominio.
- Distribución uniforme de Temperatura en la entrada del dominio.
- Distribución uniforme de densidad en la entrada del dominio.
- Condición de no deslizamiento en las paredes.
- Presión prescrita en dos nodos sobre la salida del dominio.



**Fig.3.4. Condiciones de borde para flujos viscosos.**

Para flujos laminares se impuso la distribución de velocidad conocida analíticamente para flujo entre dos placas paralelas:

$$u(y) = u_{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{2|y - D/2|}{D} \right)^2 \right] \quad (3.2)$$

En donde  $D$  es la distancia entre las paredes en la sección de entrada e  $y$  es la coordenada vertical.

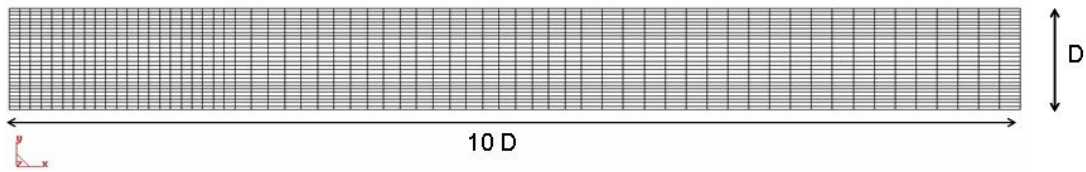
Para flujo turbulento se encontró que la solución era muy sensible a la distribución de velocidad impuesta a la entrada. En primera instancia se intentó prescribir una distribución de velocidad basada en la ley de potencias:

$$u(y) = u_c \left[ 1 - \left( \frac{2|y - D/2|}{D} \right) \right]^{1/n} \quad (3.3)$$

En donde  $u_c$  es la velocidad en el eje central y  $n$  es el exponente de la ley de potencias que para muchos casos prácticos se le ha asignado el valor de 7 obteniéndose buenos resultados (Munson et. al., 2005).

Se encontró que ésta ley de potencias establece fuertes gradientes de velocidad en las cercanías de la pared, los cuales no pueden ser reproducidos con el modelo de turbulencia escogido, como resultado, en la sección de entrada del ducto se encontraron altos niveles de presión generados por el ajuste del perfil de velocidades. Se observó adicionalmente que la aparición de estas sobre-presiones afectan el desempeño de la tobera reduciendo considerablemente la recuperación de la presión en el tramo divergente.

Para determinar una distribución de velocidad acorde con el modelo de turbulencia se decidió simular el flujo entre dos placas paralelas separadas una distancia  $D$  igual a la sección de entrada del ducto convergente-divergente y una longitud de 10 veces  $D$  (fig 3.5). Para la simulación se impuso una distribución uniforme de velocidad en la entrada (igual a la velocidad media a imponer en la tobera), una distribución de presión uniforme a la salida y la condición de no deslizamiento en las paredes.

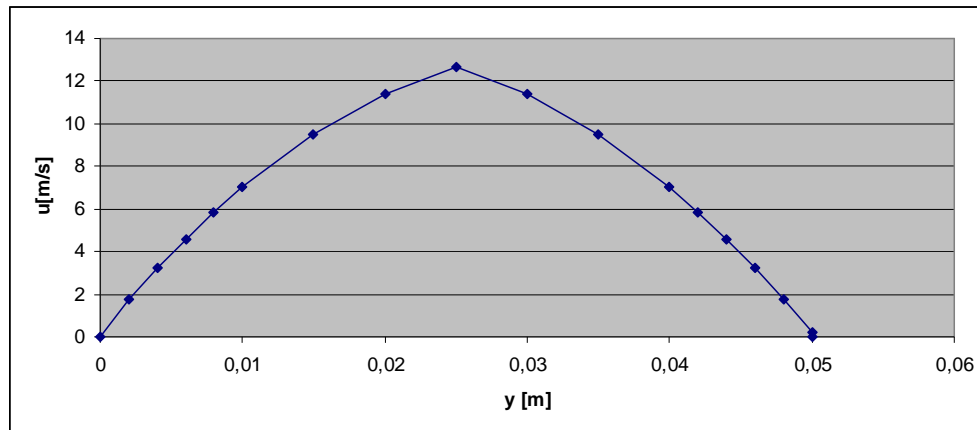


**Fig. 3.5. Malla para simulación de flujo entre placas paralelas**

Como resultado de ésta simulación se obtiene un perfil de velocidades desarrollado a la salida del dominio, que por ecuación de continuidad debe producir un caudal igual al impuesto a la entrada y que adicionalmente es acorde con el modelo de turbulencia implementado. Utilizando las coordenadas y magnitud de la velocidad en los nodos del contorno de salida se obtuvo una curva polinómica de segundo grado que describe la distribución de velocidades. Para confirmar que dicha distribución corresponde a un perfil completamente desarrollado fue impuesta como condición de entrada en una nueva simulación de las placas paralelas obteniéndose un perfil de velocidades idéntico a la salida. La distribución de velocidades encontrado para una velocidad media de  $7,2 \text{ m/s}$  es:

$$u(y) = -12150,2789\left(y - \frac{D}{2}\right)^2 - 193,70647\left|y - \frac{D}{2}\right| + 12,6544058 \quad (3.4)$$

El perfil de velocidades turbulento predicho por el modelo es un perfil parabólico levemente mas achatado que un perfil de velocidad laminar (fig. 3.6). Sin embargo se encontró que calibrando el coeficiente de turbulencia e imponiendo éste perfil de velocidades en la entrada, no solo desaparecieron los efectos de sobre-presión en la entrada, sino que adicionalmente se logró reproducir una distribución de presión dentro de la tobera acorde con la física del problema.



**Fig 3.6. Distribución de velocidades obtenido con el modelo de turbulencia entre dos placas paralelas.**

### Calibración del modelo de turbulencia

Para calibrar el modelo de turbulencia se buscó reproducir exactamente las condiciones de flujo estudiadas por Coutier-Delgosha et. al. (2003b). Partiendo de las condiciones de flujo en la tabla 1.2 y la definición del número de cavitación (1.18) se determinó la presión que debe ser impuesta a la salida del dominio para generar una presión de vapor de  $2000 Pa$ .

Se realizaron una serie de simulaciones variando únicamente el coeficiente de turbulencia hasta encontrar una presión mínima en el dominio cercana a  $2000 Pa$ . Se encontró que el coeficiente de turbulencia adecuado para la malla computacional es:

$$C_s = 0,3075 \quad (3.5)$$

Dicho valor es superior que los valores recomendados en la literatura (Sansone, 1995) sin embargo, esto pudiera deberse a la implementación de la función de amortiguación del coeficiente turbulento. Se encontró adicionalmente que un incremento en el valor del coeficiente turbulento ocasiona una disminución en la presión y viceversa.

### **Simulación de flujos cavitantes**

Una vez que se ha logrado simular correctamente el flujo de agua líquida monofásica en el dispositivo se procede a la simulación de flujos cavitantes. Siguiendo las observaciones de Goncalves y Patella (2009) se parte de una simulación en la cual la presión en todos los puntos del dominio sea superior a la presión de vapor. Posteriormente y cada vez que se logre la convergencia se procede a disminuir la magnitud de la presión en la condición de borde a la salida del dominio hasta alcanzar el número de cavitación deseado.

## CAPITULO IV

### RESULTADOS Y ANALISIS

Siguiendo la metodología establecida en el capítulo anterior se encontró la divergencia de la solución al intentar disminuir la presión de la salida del dominio por debajo de aquella que produce la presión de vapor. Se intentaron disminuciones de presión en un rango desde  $0,1 Pa$  hasta  $30 Pa$ .

Se observó que la generación de una masa de vapor, por pequeña que ésta fuera, produce una fuerte disminución en la presión local (en los alrededores del punto de mínima presión), esto provoca una mayor generación de vapor en la siguiente iteración produciendo de nuevo una disminución local de presión. El proceso se repite en cada iteración hasta que la sección transversal del ducto se llena de vapor, en la siguiente iteración se alcanza un valor negativo de presión (físicamente imposible) lo cual detiene inmediatamente el programa. La temperatura permanece constante durante todas las iteraciones, mientras que el perfil de velocidad registra leves cambios, aumentando la velocidad alrededor de la zona ocupada por el vapor, hasta que la sección transversal del ducto se llena de vapor, iteración en la cual el perfil de velocidades adquiere una distribución físicamente incongruente.

Se adoptaron varias medidas a fin de intentar alcanzar la convergencia de la solución:

- (a) Modificar el coeficiente de relajación de la solución entre iteraciones.
- (b) Establecer un valor mínimo de presión a ser alcanzado. Luego de cada iteración el campo de presión se modifica de tal forma que los puntos que presenten valores muy bajos se les reasigne el valor de presión mínima permitida.
- (c) Siguiendo las observaciones de Coutier-Delgosha *et. al.* (2003b) y de Iben *et al.* (2002), que mencionan el problema numérico ocasionado por la gran diferencia entre las densidades de líquido y vapor, se decidió subestimar la

densidad del vapor hasta llevarlo a una relación de 100 a 1 utilizado por Coutier-Delgosha *et al* (2003b).

- (d) Modificar la viscosidad turbulenta, de tal manera que la misma disminuya significativamente en las zonas de baja densidad, esto se implementó utilizando la función de modificación del coeficiente de turbulencia propuesto por Coutier-Delgosha (2003a) para un modelo de turbulencia  $\kappa$ - $\varepsilon$ :

$$\mu_t = f(\rho) C_s \Delta^2 \|\tilde{d}_{ij}\|$$

$$f(\rho) = \rho_v + \left( \frac{\rho_v - \rho}{\rho_v - \rho_l} \right)^{10} (\rho_l - \rho_v) \quad (4.1)$$

- (e) Desincorporar las ecuaciones (2.46), (2.47), (2.48) y (2.49) del modelo, permitiendo de tal manera la formación de vapor sólo en las regiones donde la presión sea menor a la presión de saturación.

De todas las anteriores medidas únicamente (f) y (e) ofrecieron convergencia de la solución. Al implementar la ecuación (4.1) se observó que el sistema responde a la formación de vapor con un incremento de la presión impidiéndose la formación del mismo. Se observó adicionalmente que mientras mayor es la disminución de presión impuesta, y por lo tanto, mientras mayor es la cantidad de vapor a ser generada el incremento local de presión obtenido en la solución es mayor. El resultado es por lo tanto físicamente incongruente.

Al aplicar la medida (e) se obtiene generación de vapor únicamente cuando la disminución de presión impuesta es pequeña (máximo  $0,5 Pa$ ), de tal manera que la fracción de volumen obtenida en el punto de mínima presión permanece por debajo de  $0,1$ , en caso contrario se obtiene un incremento local de presión que impide la formación de vapor, similar a lo ocurrido al implementar la ecuación (4.1). Los resultados obtenidos de esta forma son estacionarios y no varían con el avance de los pasos de tiempo.

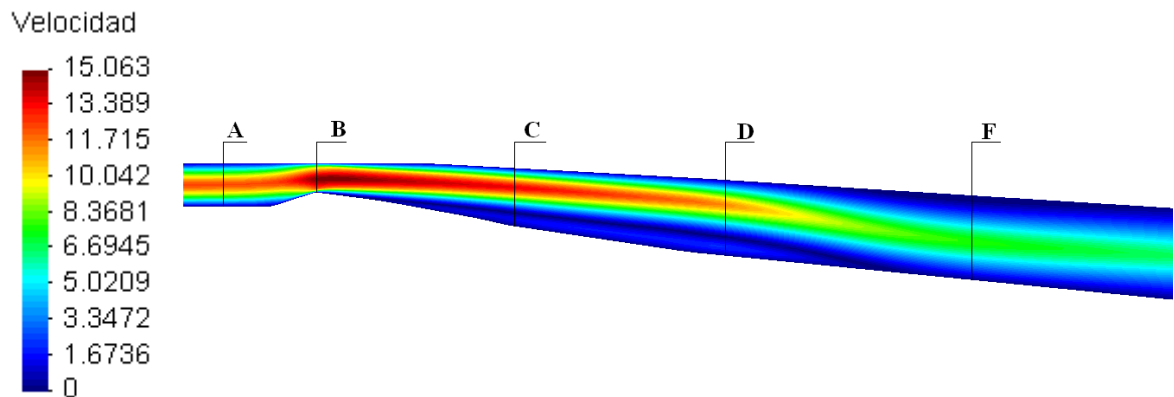
Se presentan a continuación los resultados obtenidos para una disminución de presión de  $0,2$  por debajo de la presión de vapor, al implementar la medida (e):



## Distribución de Velocidad

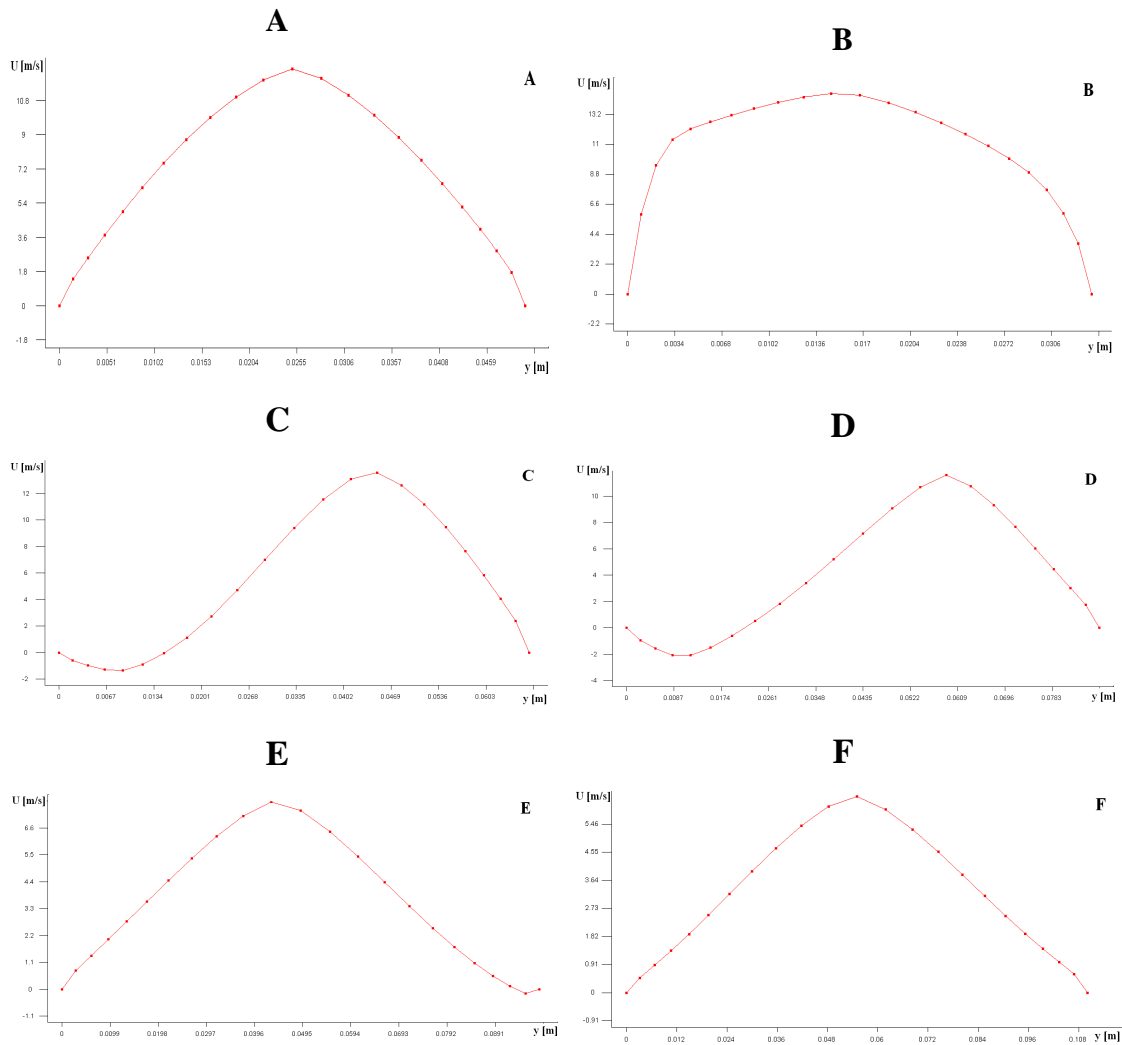
En la figura 4.1 se observa la distribución de la magnitud de la velocidad. Esta distribución es muy parecida a la distribución de velocidad de un flujo monofásico de agua en las mismas condiciones, a excepción de un pequeño aumento de la velocidad en las inmediaciones de la garganta, zona en la que ocurre la formación de vapor.

Se aprecia la formación de dos grandes vórtices consecutivos, el primero, de mayor tamaño, se encuentra en la pared inferior a  $0,0233\text{ m}$  debajo de la garganta y tiene una extensión de  $0,664\text{ m}$ . El segundo vórtice, de  $0,284\text{ m}$  de largo, se forma en la pared superior dando un aspecto sinuoso al flujo principal. Este comportamiento es común en flujos turbulentos a altos números de Reynolds en ductos divergentes por efecto del gradiente adverso de presión.



**Fig. 4.1. Distribución de la magnitud de la velocidad en m/s.**

En el conjunto de imágenes 4.2 se muestra la distribución de la componente horizontal de la velocidad en los cortes indicados en la figura 4.1. Es de apreciar que el modelo de turbulencia predice perfiles de velocidad aproximadamente parabólicos pero con pendientes menores a las de un perfil de velocidades laminar, sin poder reproducirse los altos gradientes de velocidad que se presentan realmente en las cercanías de las paredes en flujos a tan alto número de Reynolds ( $3,78 \times 10^7$ ).

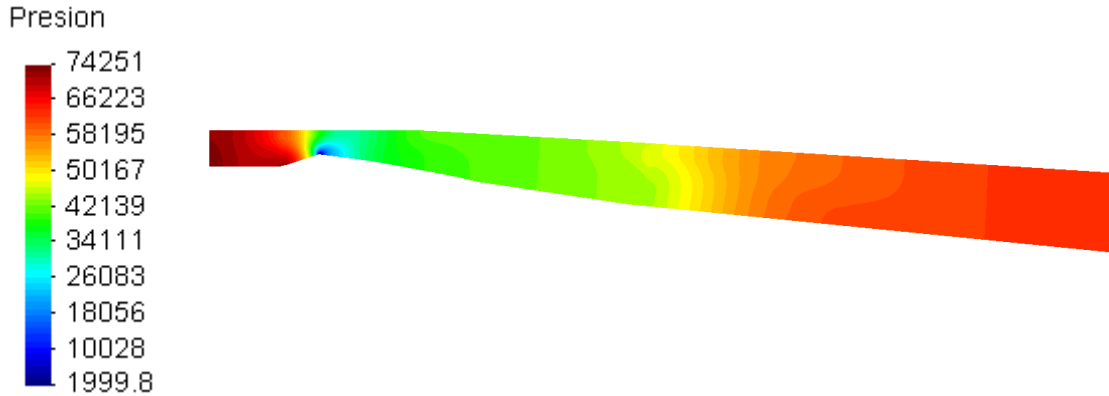


**Fig. 4.2.** Distribución de la componente horizontal de velocidades en secciones del ducto a distancias medidas desde la entrada del dominio de : (A) 60,00 mm, (B) 153,332 mm, (C) 370,0 mm, (D) 612, 022 mm, (E) 922,022 mm y (F) 1272,223 mm.

### Distribución de Presión

La distribución de presión obtenida es acorde a lo esperado en un dispositivo convergente divergente para flujo monofásico. En la figura 4.3 se puede identificar un punto de mínima presión *1,14 mm* debajo de la garganta, dicho punto se encuentra rodeado por una región con un alto gradiente de presión. Se puede apreciar que debido a que el ángulo de convergencia es mayor al ángulo de divergencia, los

gradientes de presión son más pronunciados aguas arriba de la garganta que aguas abajo.



**Fig. 4.3. Distribución de Presión.**

Se evidencia adicionalmente la recuperación de la presión en el tramo divergente en las regiones donde la energía cinética disminuye. Se demuestra que a través de la adecuada calibración del coeficiente de turbulencia se logró alcanzar la presión de vapor al imponer en la salida del dominio un valor de presión acorde a las condiciones de flujo cavitante establecidos en el capítulo 1.

### **Distribución de Temperatura**

La distribución de temperatura resultó ser completamente uniforme e igual a la temperatura prescrita inicialmente y en la entrada del dominio, en este caso 290,63 K.

### **Distribución de Densidad**

La distribución de densidad mostró ser homogénea en todo el dominio a excepción del punto de mínima presión y sus alrededores inmediatos. En la figura 4.4 se muestra un acercamiento a la región de la garganta en donde se observa que, justo en el punto de mínima presión existe el mínimo de densidad de todo dominio, mientras que a su

alrededor se aprecia un arco de densidad máxima, véase figura 4.5. Si se considera que la fase vapor ocupa un espacio mucho mayor que la fase líquida, este resultado podría interpretarse como la expansión de la masa al cambiar se fase que comprime la masa de líquido que se encuentra alrededor. Se esperaría, sin embargo, una variación gradual de la densidad aguas abajo del punto de mínima densidad por los efectos convectivos del flujo.

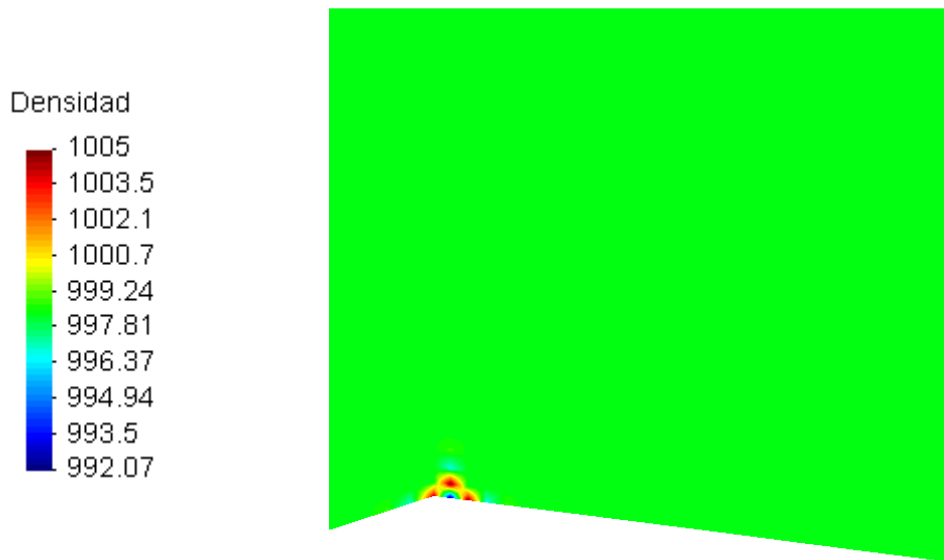


Fig. 4.4. Distribución de densidades en las cercanías de la garganta.

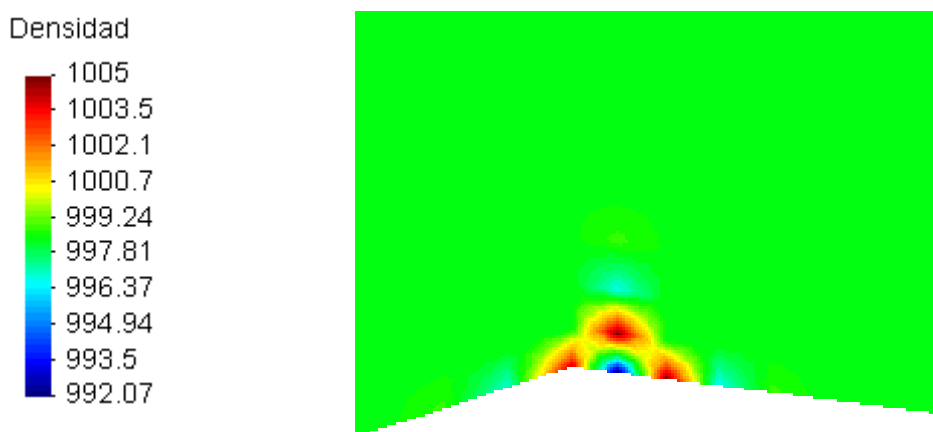


Fig. 4.5. Detalle de campo de densidades en los alrededores del punto de mínima presión.

### Distribución de Fracción de Volumen

La distribución de fracción volumétrica fue homogénea igual a cero en todo el dominio a excepción del punto de mínima presión, correspondiendo correctamente con la distribución de densidad. Es importante destacar que aunque en la figura 4.6 pareciera existir fracciones de vapor negativas esto es producto de la interpolación gráfica del post-procesador utilizado, en la figura 4.7 se muestra que dichos valores negativos no corresponden a nodos computacionales. Se evidencia por lo tanto la formación de una pequeña cantidad de vapor justo en el punto de mínima presión.



Fig. 4.6. Distribución de la Fracción Volumen.

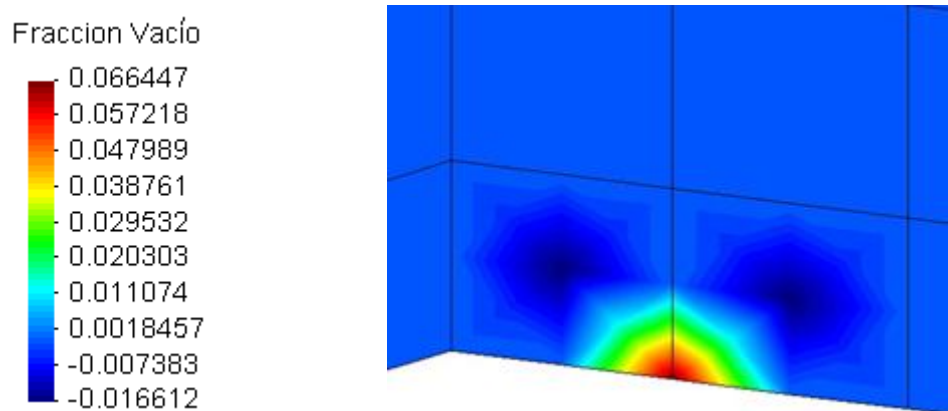


Fig. 4.7. Detalle de la distribución de la fracción vapor en los alrededores del punto de mínima presión y la malla computacional.

Debe recordarse que la convergencia de estos resultados fue obtenida al aplicar la medida (e) descrita en el presente capítulo. Para interpretar correctamente éstos resultados debe considerarse que al desincorporar las ecuaciones (2.46), (2.47), (2.48) y (2.49) la ecuación de estado (2.7) resuelta en el sistema de ecuaciones principal se convierte en:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_l && \text{para } p \geq p_v \\ \rho &= (1-\alpha)\rho_l + \alpha\rho_v && \text{para } p < p_v \end{aligned} \quad (4.2)$$

Es decir, sólo se permite la existencia de vapor en donde la presión sea menor a la presión de vapor (de acuerdo a lo establecido en la termodinámica clásica o del equilibrio). Según lo planteado todo el vapor generado se condensa inmediatamente al intentar ser transportado por el flujo a una zona de presión ligeramente superior, este comportamiento, alejado de la realidad, impide el transporte de el resto de las propiedades termodinámicas que debieran ser arrastradas junto a la fase vapor, impidiéndose finalmente la formación de la macroestructura de cavitación.

Se hace evidente, debido a la no convergencia de la solución, que el conjunto de ecuaciones (2.46), (2.47), (2.48) y (2.49) son incapaces de reproducir los fenómenos de transporte de vapor, sin embargo, su desincorporación demostró que las mismas deben ser sustituidas por otro conjunto de ecuaciones que permitan considerar la convección de las propiedades de dicha fase.

Es posible que mediante la incorporación de consideraciones asociadas a la dinámica de la fase de vapor, y su transporte, en el cálculo de la densidad o de la fracción de volumen, se puedan obtener resultados acordes a la experiencia. Es importante destacar que el modelo aplicado se encuentra centrado en conceptos asociados a la termodinámica clásica que estudia sistemas en equilibrio, ajenos por lo tanto a procesos dinámicos. Sería necesario realizar estudios adicionales a fin de determinar la naturaleza de los procesos termodinámicos asociados al transporte de burbujas de vapor de pequeño tamaño por medio líquido sometido a un gradiente de presión adverso.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### Conclusiones

- (a) El modelo físico planteado originalmente no ofrece convergencia al ser aplicado a través del Método de Elementos Finitos.
- (b) Si son retirados del modelo las ecuaciones relacionadas con la propagación de la disminución local de la densidad a través del concepto de velocidad de sonido de mezcla, se logra la convergencia de una solución que predice la generación de vapor pero que no predice su transporte por efectos de flujo.
- (c) Es necesario incorporar al modelo ecuaciones que logren describir adecuadamente el transporte de la fase vapor y sus propiedades por efectos del flujo.

### Recomendaciones

Basándose en las observaciones generadas en éste trabajo se presentan las siguientes recomendaciones que pudieran orientar el desarrollo de futuros trabajos de simulación numérica de fenómenos de cavitación:

- (a) Investigar la posibilidad de implementación de nuevas ecuaciones de estado basadas en la termodinámica, pero que permitan tomar en cuenta los efectos dinámicos de transporte, así como efectos de tensión superficial, sin que esto signifique la necesidad de identificar la interfase.
- (b) Considerar la inclusión de una ecuación de transporte para la fracción volumétrica basada en la ecuación de continuidad como las ecuaciones (1.15), en donde el término de generación de vapor sea diseñado basado en consideraciones termodinámicas. Según Iben et. al. (2002) la inclusión de una

ecuación de transporte para la fracción volumétrica brinda mayor estabilidad al sistema numérico.



## BIBLIOGRAFÍA

- Adkins, C.J. (1968). *Equilibrium Thermodynamics*. Cambridge University Press. 3<sup>o</sup> Edición.
- Awad, M., Muzychka, Y. *Effective properties models for homogeneous two phase flows*. Experimental Thermal and Fluid Science **33** (2008). 106-113.
- Benim A., Zinzer W. (1984). *Investigation in to The Finite Element Analysis of Confined Turbulent flows using a  $\kappa$ - $\epsilon$  model of Turbulence*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. **51** pg 507-523.
- Batten, W., Bahaj, A., Molland, A. and Chaplin, J. (2005). *Hydrodynamics of Marine Current Turbines*. Renewable Energy, pp. 249-256.
- Bejan, A. (1997). *Advanced Engineering Thermodynamics*. 2<sup>a</sup> Edición, John Wiley & Sons, INC. New York, EEUU.
- Brennen, C. (1995). *Cavitation and Bubble Dynamics*. California Institute of Technology Pasadena, California. E.E.U.U.
- Callen, H. (1960). *Thermodynamics*. John Wiley & Sons. Inc. E.E.U.U.
- Chen Y., Lu C. y Wu L. (2006). *Modeling and Computation of Unsteady Turbulent Cavitation Flows*. Journal of Hydrodynamics **18** (5) pp. 559-566.
- Coste, C., Laroche C. (1993). *Acoustic behavior of a liquid/vapour mixture in a standing wave tube*. Journal of Mechanics **246** pp. 67-89.
- Coutier-Delgosta O., Patella R., Reboud, J.L. (2003a). *Numerical Simulations in Unsteady Cavitating Flows*. International Journal for Numerical Methods in Fluids **42**, (5), pp. 527-548.
- Coutier-Delgosta O., Patella R., Reboud J., Stutz B. (2003b). *Test case number 30 : Unsteady cavitation in a Venturi Type Section (PN)*. Disponible en: <http://test.interface.free.fr/Case30.pdf> [Consulta: 2009, Junio, 1]
- De Lange, D. F., (1996). *Observation and Modelling of Cloud Formation Behind a Sheet Cavity*. Tesis doctoral. Universiteit Twente. Enschede.
- Deshpande, M., Feng, J., Merkle, C. (1994). *Cavity Flow Predictions Based on the Euler Equations*. Journal of Fluid Engineering, **136** pp.36-44.

- Franc, J.P., Avellan, F., Belahadji, B., Billard, L., Briançon-Marjollet, D., Fréchou, D., Fruman, D., H., Karimi, A., Kueny, J.L. & Michel, J.M.. (1995). *La cavitation: mécanismes physiques et aspects industriels*. Presses universitaires de Grenoble.
- Frank, J. P., Michel, J. M. (2004). *Fundamentals of Cavitation*. Kluwer Academic Publishers.
- Furness, R. A., Hutton, S. P. (1975). *Experimental and Theoretical Studies of Two Dimensional Fixed type Cavities*. Journal of Fluids Engineering, December, pp. 512-522.
- Furuya, O., (1975). *Three-Dimensional Theory on Supercavitating hydrofoils Near a Free Surface*. Journal of Fluid Mechanics, pp.339-359.
- García J., García F. (2009). *Efectos de la Viscosidad y de la Densidad de Mezcla en el gradiente de presión de flujo homogéneo Gas-Líquido en tuberías horizontales*. Información Tecnológica 20(4).
- Gatski T., Hussaini, M. y Lumley J. (1996). *Simulation and Modeling of Turbulent Flows*. Oxford University Press, New York.
- Goncalves E. y Patella R. (2009). *Numerical Simulation of cavitating flows with homogeneous models*. Computers & Fluids 38 (9) pp 1682-1696.
- Helmholtz, H., (1868). *On discontinuous movements of fluids*. Phil. Mag.
- Hernandez, R., Fernández C., Baptista P. (1997). *Metodología de la Investigación*. McGraw Hill Interamericana Editores S.A. México.
- Iben, U., Wrona, F., Munz, C., & Beck, M. (2002). *Cavitation in Hydraulic Tools Based on Thermodynamics*. Journal of Fluid Engineering, 1011–1016.
- Kubota, A., Kato, H. and Yamaguchi, H., (1992). *A New Modeling of Cavitating Flows: A Numerical Study of Unsteady Cavitation on a Hydrofoil Section*. Journal of Fluid Mechanics, 240, pp. 59-96.
- Kunz, R. F., Roger, D. A., Stinebring, D. R., Chyczewski, T.S., Lindua, J.W., Gibeling, H.J., Venkateswaran, S., & Govindan, T.R. (2000). *A Preconditioned Navier-Stokes Method for Two-Phase-Flows with Application to Cavitation Prediction*.

- Larreteguy, A. (2008, octubre). *Two Fluid Model for Multicomponent Flows*. Ponencia presentada en las Jornadas de Investigación de la Facultad de Ingeniería U.C.V. Caracas.
- Lemonnier, H., Rowe, A., (1988). *Another Approach in Modelling Cavitating Flows*. Journal of Fluid Mechanics pp 557-580.
- Leroux, J., B., (2003). *Etude Expérimentale en Tunnel Hydrodynamique des Instabilités de la Cavitation par Poche sur Hydrofoil par la Mesure Spatio-Temporelle du champ de Pression Pariétal*. Tesis Doctoral. Université de Nantes. Institut de Recherche de l'Ecole Navale-EA3634. France.
- Merkle, C., Feng, J., & Buelow, P. (1998). *Computational Modeling of the Dynamics of Sheet Cavitation*. Ponencia presentada en: *Proceedings of the 3rd International Symposium on Cavitation*.
- Munson B., Young, D. y Okishi, T. (2007). *Fundamentos de Mecánica de Fluidos*. Limusa Wiley S.A. México.
- Nishiyama, T., Niyamoto, (1969). *Lifting-Surface Method for Calculating the Hydrodynamic Characteristics of Supercavitating Hydrofoil Operating Near the Free Water Surface*. Tech. Reporte Tohoku University.
- Operación de Sistemas Inteconectados Venezuela (2008). *Informe annual de la Oficina de Operación de Sistemas Interconectados – OPSIS 2008*. Disponible en: <http://www.opsis.org.ve/home4.html>. [Consulta 2009, Agosto, 25]
- Öziçik, M.(1979). *Transferencia de Calor*. McGraw Hill Latinoamericana S.A. Bogota, Colombia.
- Pellone, C., Maître, T., Briançon-Marjollet, L., (2000). *Partially Cavitating Hydrofoils : Experimental and Numerical Analysis*. Journal of Ship Research, **44** (1), pp.40-58.
- Pellone, C. , Rowe, A., (1988). *Effect of Separation on Partial Cavitation*. Journal of Fluid Engineering, pp. 182-189.
- Pleset, M. S., (1969). *Cavitating Flows*. Report No. 85-46, Division of Engineering and Applied Science, California Institute of technology, Pasadena, C.A.
- Rayleigh, L., (1917). *On the Pressure Developed During the Collapse of a Spherical Cavity*. Philosophy Magazine, **34** (200), p.94.
- Rousset, B., (1990). *Analyse de la Cavitation sur un profil de type Inducter*. Tesis de doctorado. Institute Polytechnique de Grenoble, INPG, France.

- Sansone, E. (1999). *Análisis del flujo turbulento bi-dimensional en un difusor asimétrico de paredes planas mediante el método de elementos finitos*. MSc. Tesis, Universidad Central de Venezuela. Venezuela.
- Sansone, E. (2007). *Modélisation de la Cavitation instationnaire dans les turbines Darrieus*. Tesis de doctorado, Institute Polytechnique de Grenoble, France.
- Sauer, J., (2000). *Instationar Kavitierende Stromungen ein neues modell, basierend auf front capturing (VoF) und blasendynamik*. Tesis doctoral. Universitat Karlsruhe.
- Smagorinsky, J. (1963). *General Circulation Experiments with the Primitive Equations, Part I: The Basic Experiment*. Mon. Wea. Rev.
- Taylor C., Hughes T. (1981). *Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations*. Pineridge Press Limited. Swansea. Reino Unido.
- The International Association for the Properties of Water and Steam (IAPWS) (2007). *Revised release on the IAPWS formulation 1997 for the Thermodynamic Properties of Water and Steam*. IAPWS. Suiza.
- The International Association for the Properties of Water and Steam (IAPWS) (2008a). *Revised release on the IAPWS formulation 2008 for the Viscosity of Ordinary Water Substance*. IAPWS. Suiza.
- The International Association for the Properties of Water and Steam (IAPWS) (2008b). *Revised release on the IAPWS formulation 1995 for the Thermal Conductivity of Ordinary Water Substance*. IAPWS. Suiza.
- Tulin, M. P. (1955). *Supercavitating flow past foils and struts*. Procedure. NPL Symposium Cavitation Hydrodynamics. Paper No. 16.
- Tulin, M. P. (1964). *Supercavitating flows-small perturbation theory*. J. Ship Res., pp. 16-37
- Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) (2003). *Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales*. Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Caracas. Venezuela.
- Yuan, W. and Schenerr, G., (2003). *Numerical Study of Two-phases Flow in Injection Nozzles: Interaction of Cavitation and External Jet Formation*. ASME, J. Fluids Eng., **125**, pp. 643-651.

Wu, T., Y., (1962). *A wake model for free-stream flow theory. Part 1. Fully and partially developed wake flows and cavity flows past an oblique flat plate.* J. Fluid Mech., pp 161-181.

**APENDICE A**  
**COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES DE ESTADO DE LA**  
**IAPWS**

**A.1. Coeficientes para la ecuación de estado de líquido comprimido (IAPWS, 2007)**

$i$	$I_i$	$J_i$	$n_i$	$i$	$I_i$	$J_i$	$n_i$
1	0	-2	0.146 329 712 131 67	18	2	3	$-0.441 418 453 308 46 \times 10^{-5}$
2	0	-1	-0.845 481 871 691 14	19	2	17	$-0.726 949 962 975 94 \times 10^{-15}$
3	0	0	$-0.375 636 036 720 40 \times 10^1$	20	3	-4	$-0.316 796 448 450 54 \times 10^{-4}$
4	0	1	$0.338 551 691 683 85 \times 10^1$	21	3	0	$-0.282 707 979 853 12 \times 10^{-5}$
5	0	2	-0.957 919 633 878 72	22	3	6	$-0.852 051 281 201 03 \times 10^{-9}$
6	0	3	0.157 720 385 132 28	23	4	-5	$-0.224 252 819 080 00 \times 10^{-5}$
7	0	4	$-0.166 164 171 995 01 \times 10^{-1}$	24	4	-2	$-0.651 712 228 956 01 \times 10^{-6}$
8	0	5	$0.812 146 299 835 68 \times 10^{-3}$	25	4	10	$-0.143 417 299 379 24 \times 10^{-12}$
9	1	-9	$0.283 190 801 238 04 \times 10^{-3}$	26	5	-8	$-0.405 169 968 601 17 \times 10^{-6}$
10	1	-7	$-0.607 063 015 658 74 \times 10^{-3}$	27	8	-11	$-0.127 343 017 416 41 \times 10^{-8}$
11	1	-1	$-0.189 900 682 184 19 \times 10^{-1}$	28	8	-6	$-0.174 248 712 306 34 \times 10^{-9}$
12	1	0	$-0.325 297 487 705 05 \times 10^{-1}$	29	21	-29	$-0.687 621 312 955 31 \times 10^{-18}$
13	1	1	$-0.218 417 171 754 14 \times 10^{-1}$	30	23	-31	$0.144 783 078 285 21 \times 10^{-19}$
14	1	3	$-0.528 383 579 699 30 \times 10^{-4}$	31	29	-38	$0.263 357 816 627 95 \times 10^{-22}$
15	2	-3	$-0.471 843 210 732 67 \times 10^{-3}$	32	30	-39	$-0.119 476 226 400 71 \times 10^{-22}$
16	2	0	$-0.300 017 807 930 26 \times 10^{-3}$	33	31	-40	$0.182 280 945 814 04 \times 10^{-23}$
17	2	1	$0.476 613 939 069 87 \times 10^{-4}$	34	32	-41	$-0.935 370 872 924 58 \times 10^{-25}$

**A.2. Coeficientes para la ecuación de estado de vapor sobrecalentado (IAPWS, 2007)**

*Coeficientes para los términos de gas perfecto*

$i$	$J_i^o$	$n_i^o$	$i$	$J_i^o$	$n_i^o$
1 <sup>a</sup>	0	$-0.969 276 865 002 17 \times 10^1$	6	-2	$0.142 408 191 714 44 \times 10^1$
2 <sup>a</sup>	1	$0.100 866 559 680 18 \times 10^2$	7	-1	$-0.438 395 113 194 50 \times 10^1$
3	-5	$-0.560 879 112 830 20 \times 10^{-2}$	8	2	-0.284 086 324 607 72
4	-4	$0.714 527 380 814 55 \times 10^{-1}$	9	3	$0.212 684 637 533 07 \times 10^{-1}$
5	-3	-0.407 104 982 239 28			

*Coefficientes para la parte residual*

$i$	$I_i$	$J_i$	$n_i$
1	1	0	$-0.177\ 317\ 424\ 732\ 13 \times 10^{-2}$
2	1	1	$-0.178\ 348\ 622\ 923\ 58 \times 10^{-1}$
3	1	2	$-0.459\ 960\ 136\ 963\ 65 \times 10^{-1}$
4	1	3	$-0.575\ 812\ 590\ 834\ 32 \times 10^{-1}$
5	1	6	$-0.503\ 252\ 787\ 279\ 30 \times 10^{-1}$
6	2	1	$-0.330\ 326\ 416\ 702\ 03 \times 10^{-4}$
7	2	2	$-0.189\ 489\ 875\ 163\ 15 \times 10^{-3}$
8	2	4	$-0.393\ 927\ 772\ 433\ 55 \times 10^{-2}$
9	2	7	$-0.437\ 972\ 956\ 505\ 73 \times 10^{-1}$
10	2	36	$-0.266\ 745\ 479\ 140\ 87 \times 10^{-4}$
11	3	0	$0.204\ 817\ 376\ 923\ 09 \times 10^{-7}$
12	3	1	$0.438\ 706\ 672\ 844\ 35 \times 10^{-6}$
13	3	3	$-0.322\ 776\ 772\ 385\ 70 \times 10^{-4}$
14	3	6	$-0.150\ 339\ 245\ 421\ 48 \times 10^{-2}$
15	3	35	$-0.406\ 682\ 535\ 626\ 49 \times 10^{-1}$
16	4	1	$-0.788\ 473\ 095\ 593\ 67 \times 10^{-9}$
17	4	2	$0.127\ 907\ 178\ 522\ 85 \times 10^{-7}$
18	4	3	$0.482\ 253\ 727\ 185\ 07 \times 10^{-6}$
19	5	7	$0.229\ 220\ 763\ 376\ 61 \times 10^{-5}$
20	6	3	$-0.167\ 147\ 664\ 510\ 61 \times 10^{-10}$
21	6	16	$-0.211\ 714\ 723\ 213\ 55 \times 10^{-2}$
22	6	35	$-0.238\ 957\ 419\ 341\ 04 \times 10^2$
23	7	0	$-0.590\ 595\ 643\ 242\ 70 \times 10^{-17}$
24	7	11	$-0.126\ 218\ 088\ 991\ 01 \times 10^{-5}$
25	7	25	$-0.389\ 468\ 424\ 357\ 39 \times 10^{-1}$
26	8	8	$0.112\ 562\ 113\ 604\ 59 \times 10^{-10}$
27	8	36	$-0.823\ 113\ 408\ 979\ 98 \times 10^1$
28	9	13	$0.198\ 097\ 128\ 020\ 88 \times 10^{-7}$
29	10	4	$0.104\ 069\ 652\ 101\ 74 \times 10^{-18}$
30	10	10	$-0.102\ 347\ 470\ 959\ 29 \times 10^{-12}$
31	10	14	$-0.100\ 181\ 793\ 795\ 11 \times 10^{-8}$
32	16	29	$-0.808\ 829\ 086\ 469\ 85 \times 10^{-10}$
33	16	50	$0.106\ 930\ 318\ 794\ 09$
34	18	57	$-0.336\ 622\ 505\ 741\ 71$
35	20	20	$0.891\ 858\ 453\ 554\ 21 \times 10^{-24}$
36	20	35	$0.306\ 293\ 168\ 762\ 32 \times 10^{-12}$
37	20	48	$-0.420\ 024\ 676\ 982\ 08 \times 10^{-5}$
38	21	21	$-0.590\ 560\ 296\ 856\ 39 \times 10^{-25}$
39	22	53	$0.378\ 269\ 476\ 134\ 57 \times 10^{-5}$
40	23	39	$-0.127\ 686\ 089\ 346\ 81 \times 10^{-14}$
41	24	26	$0.730\ 876\ 105\ 950\ 61 \times 10^{-28}$
42	24	40	$0.554\ 147\ 153\ 507\ 78 \times 10^{-16}$
43	24	58	$-0.943\ 697\ 072\ 412\ 10 \times 10^{-6}$



**A.3. Coeficientes para el cálculo de la viscosidad (IAPWS, 2008a)**

*Coeficientes para los términos de gas perfecto*

$i$	$H_i$
0	1.67752
1	2.20462
2	0.6366564
3	-0.241605

*Coeficientes para los términos dependientes de la densidad*

$i$	$j$	$H_{ij}$
0	0	$5.20094 \times 10^{-1}$
1	0	$8.50895 \times 10^{-2}$
2	0	-1.08374
3	0	$-2.89555 \times 10^{-1}$
0	1	$2.22531 \times 10^{-1}$
1	1	$9.99115 \times 10^{-1}$
2	1	1.88797
3	1	1.26613
5	1	$1.20573 \times 10^{-1}$
0	2	$-2.81378 \times 10^{-1}$
1	2	$-9.06851 \times 10^{-1}$
2	2	$-7.72479 \times 10^{-1}$
3	2	$-4.89837 \times 10^{-1}$
4	2	$-2.57040 \times 10^{-1}$
0	3	$1.61913 \times 10^{-1}$
1	3	$2.57399 \times 10^{-1}$
0	4	$-3.25372 \times 10^{-2}$
3	4	$6.98452 \times 10^{-2}$
4	5	$8.72102 \times 10^{-3}$
3	6	$-4.35673 \times 10^{-3}$
5	6	$-5.93264 \times 10^{-4}$

**A.4. Coeficientes para el cálculo de la conductividad térmica (IAPWS, 2008b)**

*Coeficientes para la parte de gas perfecto*

i	$L_i$
0	1.000000
1	6.978267
2	2.599096
3	-0.998254

*Coeficientes para los términos dependientes de la densidad*

i	j	$L_{ij}$
0	0	1.3293046
0	1	-0.40452437
0	2	0.24409490
0	3	0.018660751
0	4	-0.12961068
0	5	0.044809953
1	0	1.7018363
1	1	-2.2156845
1	2	1.6511057
1	3	-0.76736002
1	4	0.37283344
1	5	-0.11203160
2	0	5.2246158
2	1	-10.124111
2	2	4.9874687
2	3	-0.27297694
2	4	-0.43083393
2	5	0.13333849
3	0	8.7127675
3	1	-9.5000611
3	2	4.3786606
3	3	-0.91783782
3	4	0.0
3	5	0.0
4	1	-1.8525999
4	2	0.93404690
4	3	0.0
4	4	0.0
4	5	0.0

**A.5 Coeficientes para el polinomio de la línea de saturación P-T (IAPWS,2007)**

$i$	$n_i$	$i$	$n_i$
1	$0.116\ 705\ 214\ 527\ 67 \times 10^4$	6	$0.149\ 151\ 086\ 135\ 30 \times 10^2$
2	$-0.724\ 213\ 167\ 032\ 06 \times 10^6$	7	$-0.482\ 326\ 573\ 615\ 91 \times 10^4$
3	$-0.170\ 738\ 469\ 400\ 92 \times 10^2$	8	$0.405\ 113\ 405\ 420\ 57 \times 10^6$
4	$0.120\ 208\ 247\ 024\ 70 \times 10^5$	9	$-0.238\ 555\ 575\ 678\ 49$
5	$-0.323\ 255\ 503\ 223\ 33 \times 10^7$	10	$0.650\ 175\ 348\ 447\ 98 \times 10^3$