



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA

# Método de Rayleigh-Ritz para Problemas de Contornos sobre Mallas Escalonadas

Trabajo Especial de Grado presentado ante la  
ilustre Universidad Central de Venezuela por el  
**Br. Jefferson Anthony Prada Márquez**  
para optar al título de Licenciado en  
Matemática.

**Tutor: Dr. J.M. Guevara Jordán.**

Caracas, Venezuela  
Octubre, 2015

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Método de Rayleigh-Ritz para Problemas de Contornos sobre Mallas Escalonadas**”, presentado por el **Br. Jefferson Anthony Prada Márquez**, titular de la Cédula de Identidad **V-22032139**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

---

**Prof. J. M. Guevara Jordán**

**CI: V-6006521**

**Tutor**

---

**Prof. Nathaly del Carmen Guanda Betancourt**

**CI: V-11203769**

**Jurado**

---

**Prof. Jaime Blanco López**

**CI: V-14746381**

**Jurado**

# Agradecimientos

A Dios Todo Poderoso por darme la salud y la inspiración para realizar este trabajo.

A mi querida madre, Rosa Angelica Márquez Vivas y padre, Jesús Onorio Prada Zerpa por todo su amor y apoyo.

A la insigne universidad, docentes y amigos que formaron parte de este lindo recorrido universitario.

Jefferson Anthony

”Las ecuaciones de los físicos y matemáticos son falsas porque ellas describen situaciones y condiciones ideales. Sin embargo, ellas funcionan al ser usadas para aproximar la realidad.”

# Índice general

Agradecimientos . . . . .	i
Lista de Figuras . . . . .	v
Lista de Tablas . . . . .	vii
<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>1 Método de Rayleigh-Ritz</b>	<b>2</b>
1.1 Introducción . . . . .	2
1.2 Forma variacional . . . . .	4
1.3 Método . . . . .	7
<b>2 Análisis de convergencia</b>	<b>18</b>
2.1 Introducción . . . . .	18
2.2 Coeficientes calculados con regla del punto medio . . . . .	18
2.3 Coeficientes calculados con regla del trapecio . . . . .	22
2.4 Estabilidad . . . . .	25
2.5 Convergencia . . . . .	29
<b>3 Métodos alternativos</b>	<b>31</b>
3.1 Introducción . . . . .	31

3.2	Método de diferencias finitas . . . . .	31
3.2.1	Método de diferencias finitas versión I . . . . .	32
3.2.2	Método de diferencias finitas versión II . . . . .	38
3.3	Método mimético . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Estudio comparativo</b>	<b>49</b>
4.1	Introducción . . . . .	49
4.2	Test No. I . . . . .	50
4.3	Test No. II . . . . .	53
4.4	Test No. III . . . . .	56
4.5	Test No. IV . . . . .	59
4.6	Test No. V . . . . .	63
4.7	Conclusiones . . . . .	69
<b>A</b>	<b>Método de Rayleigh-Ritz con regla de Simpson</b>	<b>72</b>
<b>B</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>77</b>

# Índice de figuras

1.1	<i>Representación gráfica de la malla escalonada.</i>	7
1.2	<i>Representación gráfica de las funciones base las cuales describirán el método de Rayleigh-Ritz.</i>	10
1.3	<i>Estructura de la matriz <math>A</math> en una malla de 7 nodos reales aplicando el método de Rayleigh-Ritz.</i>	17
3.1	<i>Representación gráfica de la malla escalonada con puntos imaginarios.</i>	32
3.2	<i>Estructura de la matriz <math>A</math> en una malla de 7 nodos reales aplicando el método de diferencias finitas versión I.</i>	37
3.3	<i>Estructura de la matriz <math>A</math> en una malla de 7 nodos aplicando el método de diferencias finitas versión II.</i>	42
3.4	<i>Estructura de la matriz <math>A</math> en una malla de 7 nodos reales aplicando el método mimético.</i>	47
4.1	<i>Test No I: Errores numéricos en norma del máximo <math>\ \cdot\ _\infty</math> (izquierda) y norma <math>L_2</math> (derecha).</i>	53
4.2	<i>Test No II: Errores numéricos en norma del máximo <math>\ \cdot\ _\infty</math> (izquierda) y norma <math>L_2</math> (derecha).</i>	56

4.3	<i>Test No III: Errores numéricos en norma del máximo <math>\ \cdot\ _\infty</math> (izquierda) y norma <math>L_2</math> (derecha).</i>	59
4.4	<i>Test No IV: Errores numéricos en norma del máximo <math>\ \cdot\ _\infty</math> (izquierda) y norma <math>L_2</math> (derecha).</i>	63
4.5	<i>Test No V: Errores numéricos en norma del máximo <math>\ \cdot\ _\infty</math> (izquierda) y norma <math>L_2</math> (derecha).</i>	66
4.6	<i>Test No V: Errores numéricos usando promedio aritmético en norma del máximo <math>\ \cdot\ _\infty</math> (izquierda) y norma <math>L_2</math> (derecha).</i>	67
4.7	<i>Test No V: Errores numéricos en norma <math>L_2</math> usando promedio armónico de función <math>p</math>.</i>	68

# Índice de cuadros

4.1	<i>Test No. I: Errores numéricos usando la norma <math>\ \cdot\ _\infty</math>.</i>	51
4.2	<i>Test No. I: Errores numéricos usando la norma <math>L_2</math>.</i>	52
4.3	<i>Test No. II: Errores numéricos usando la norma <math>\ \cdot\ _\infty</math>.</i>	54
4.4	<i>Test No. II: Errores numéricos usando la norma <math>L_2</math>.</i>	55
4.5	<i>Test No. III: Errores numéricos usando la norma <math>\ \cdot\ _\infty</math>.</i>	57
4.6	<i>Test No. III: Errores numéricos usando la norma <math>L_2</math>.</i>	58
4.7	<i>Test No. IV: Errores numéricos usando la norma <math>\ \cdot\ _\infty</math>.</i>	61
4.8	<i>Test No. IV: Errores numéricos usando la norma <math>L_2</math>.</i>	62
4.9	<i>Test No. V: Errores numéricos usando la norma <math>\ \cdot\ _\infty</math>.</i>	64
4.10	<i>Test No. V: Errores numéricos usando la norma <math>L_2</math>.</i>	65

# Resumen

En este trabajo de grado se describe el método de Rayleigh-Ritz para problemas de contornos lineales, bajo condiciones de Robin y sobre mallas escalonadas. Se presentan las discretizaciones del método usando las fórmulas de cuadratura de punto medio y trapecio. Por simplicidad, se realiza el estudio de convergencia de las discretizaciones obtenidas con la cuadratura de punto medio, usando los desarrollos de Taylor para la consistencia y el teorema de círculos de Gershgorin en la estabilidad. Finalmente, se realiza un estudio comparativo con los métodos de diferencias finitas y mimético, en el cual el método de Rayleigh-Ritz basado en cuadratura de Simpson registra los mejores resultados en términos de exactitud y tasa de convergencia. El análisis de convergencia y el estudio comparativo mencionados son aportes originales de esta tesis.

# Capítulo 1

## Método de Rayleigh-Ritz

### 1.1 Introducción

Entre los métodos más conocidos para resolver problemas de contorno se encuentran los de diferencias finitas y elementos finitos [1, 10]. Desde la década de los noventa se ha introducido una nueva técnica de discretización de problemas de contorno denominada métodos miméticos [2], la cual ha sido ampliamente investigada en diversas tesis de grado en la Universidad Central de Venezuela (UCV)[3, 4, 5, 6, 7, 8].

En todos estos trabajos se ha evidenciado que los esquemas miméticos producen mejores aproximaciones que los métodos de diferencias finitas basados en puntos imaginarios y aproximaciones de primer orden en el borde. Sin embargo, recientemente investigadores de la Universidad de los Andes (ULA), Venezuela, han encontrado que el método de elementos finitos tipo Galerkin produce mejores aproximaciones en problemas de contorno de tipo convección difusión estacionario que los métodos miméticos y de diferencias finitas con puntos imaginarios [9]. En ese mismo tra-

bajo se concluye que los métodos miméticos son, en general, mejores que los de diferencias finitas con puntos imaginarios, lo cual confirma las investigaciones realizadas en la UCV, pero el método con mejor aproximación es elementos finitos.

En el presente trabajo de grado se propone realizar un estudio comparativo en el caso de problemas de contorno no convectivos, escritos en forma conservativa, sobre mallas escalonadas uniformes usando el método de Rayleigh-Ritz. Esta propuesta difiere en detalles y en el tipo de problemas de contorno considerados en [9].

En este capítulo se describirá el método de Rayleigh-Ritz el cual es una técnica numérica alternativa para resolver el siguiente problema de contorno,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + r(x)y = f(x) \\ a_1 y(0) + b_1 \frac{dy(0)}{dx} = g_1 \\ a_2 y(1) + b_2 \frac{dy(1)}{dx} = g_2. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

En el análisis que sigue supondremos que  $p, r \in C^1[0, 1]$  positivas,  $f \in C[0, 1]$ ,  $g_1, g_2$  son constantes,  $a_1, a_2, b_1, b_2$  son constantes no nulas y  $y$  es la incógnita de la ecuación. Esta ecuación es un problema bien planteado de acuerdo a [11]. El contenido de este capítulo está dividido en dos secciones: la primera de ellas discute la forma variacional asociada al problema de contorno (1.1) y la segunda utiliza la forma variacional para describir el método de Rayleigh-Ritz.

## 1.2 Forma variacional

Se propone heurísticamente el siguiente funcional,

$$\begin{aligned}
 J(z) = & \frac{1}{2} \int_0^1 p(x) \left( \frac{dz(x)}{dx} \right)^2 + r(x)(z(x))^2 dx \\
 & + \frac{p(1)a_2}{2b_2} (z(1))^2 - \frac{p(0)a_1}{2b_1} (z(0))^2 - \frac{p(1)g_2}{b_2} z(1) \\
 & + \frac{p(0)g_1}{b_1} z(0) - \int_0^1 f(x)z(x)dx.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde  $z \in C^2[0, 1]$ . Sabiendo que  $p$  y  $r$  son funciones tales que  $p(x) > c_1 > 0$  y  $r(x) > c_2 > 0$  donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes. Luego, procedemos a demostrar que el funcional (1.2) está acotado por debajo. Considerando,  $c = \min\{c_1, c_2\}$ , se tiene,

$$\begin{aligned}
 J(z) \geq & \frac{c}{2} \left( \int_0^1 \left( \frac{dz(x)}{dx} \right)^2 + (z(x))^2 dx - \int_0^1 \frac{2}{c} f(x)z(x) dx \right) \\
 & + \frac{p(1)a_2}{2b_2} (z(1))^2 - \frac{p(0)a_1}{2b_1} (z(0))^2 - \frac{p(1)g_2}{b_2} z(1) + \frac{p(0)g_1}{b_1} z(0).
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Luego, completando cuadrados se tiene,

$$\begin{aligned}
 J(z) \geq & \frac{c}{2} \left( \int_0^1 \left( \frac{dz(x)}{dx} \right)^2 + \left( z(x) - \frac{f(x)}{c} \right)^2 dx - \int_0^1 \left( \frac{f(x)}{c} \right)^2 dx \right) \\
 & + \frac{p(1)a_2}{2b_2} (z(1))^2 - \frac{p(0)a_1}{2b_1} (z(0))^2 - \frac{p(1)g_2}{b_2} z(1) + \frac{p(0)g_1}{b_1} z(0).
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Factorizando respecto a  $\frac{p(1)a_2}{2b_2}$  y  $-\left(\frac{p(0)a_1}{2b_1}\right)$ ,

$$\begin{aligned}
 J(z) \geq & \frac{c}{2} \left( \int_0^1 \left( \frac{dz(x)}{dx} \right)^2 + \left( z(x) - \frac{f(x)}{c} \right)^2 dx - \int_0^1 \left( \frac{f(x)}{c} \right)^2 dx \right) \\
 & + \frac{p(1)a_2}{2b_2} \left( (z(1))^2 - \frac{2g_2 z(1)}{a_2} \right) - \frac{p(0)a_1}{2b_1} \left( (z(0))^2 - \frac{2g_1 z(0)}{a_1} \right).
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Asumiendo que  $\frac{p(1)a_2}{2b_2} > 0$  y  $-\left(\frac{p(0)a_1}{2b_1}\right) > 0$  se tiene,

$$J(z) \geq \frac{c}{2} \left( \int_0^1 \left( \frac{dz(x)}{dx} \right)^2 + \left( z(x) - \frac{f(x)}{c} \right)^2 dx - \int_0^1 \left( \frac{f(x)}{c} \right)^2 dx \right) + \frac{p(1)a_2}{2b_2} \left( \left( z(1) - \frac{g_2}{a_2} \right)^2 - \left( \frac{g_2}{a_2} \right)^2 \right) - \frac{p(0)a_1}{2b_1} \left( \left( z(0) - \frac{g_1}{a_1} \right)^2 - \left( \frac{g_1}{a_1} \right)^2 \right). \quad (1.6)$$

Acotando nuevamente,

$$J(z) \geq \frac{c}{2} \left( - \int_0^1 \left( \frac{f(x)}{c} \right)^2 dx \right) + \frac{p(1)a_2}{2b_2} \left( - \left( \frac{g_2}{a_2} \right)^2 \right) - \frac{p(0)a_1}{2b_1} \left( - \left( \frac{g_1}{a_1} \right)^2 \right). \quad (1.7)$$

Por lo tanto,  $J(z)$  está acotado por debajo ya que la cota inferior del funcional  $J$  es independiente de  $z(x)$ . Con este hecho, se tiene que  $J(z)$  posee un mínimo, en caso de existir.

Ahora demostraremos que en el caso de existir un mínimo de la forma variacional este debe satisfacer el problema de contorno (1.1). Sea  $Y = \alpha v + y$  donde  $y$  es el mínimo del funcional  $J$ ,  $\alpha$  una variable escalar y  $v \in C^2[0, 1]$  entonces,

$$J(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^1 p(x) \left( \alpha \frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dx} \right)^2 + r(x)(\alpha v + y)^2 dx + \frac{p(1)a_2}{2b_2} (y(1) + \alpha v(1))^2 - \frac{p(0)a_1}{2b_1} (y(0) + \alpha v(0))^2 - \frac{p(1)g_2}{b_2} (y(1) + \alpha v(1)) + \frac{p(0)g_1}{b_1} (y(0) + \alpha v(0)) - \int_0^1 f(x)(y + \alpha v) dx. \quad (1.8)$$

Derivando la expresión (1.8) tenemos,

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^1 p(x) \left( \alpha \frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dx} \right) \frac{dv}{dx} + r(x)(\alpha v + y)v dx + \frac{p(1)a_2}{b_2} (y(1) + \alpha v(1))v(1) - \frac{p(0)a_1}{b_1} (y(0) + \alpha v(0))v(0) - \frac{p(1)g_2}{b_2} v(1) + \frac{p(0)g_1}{b_1} v(0) - \int_0^1 f(x)v dx. \quad (1.9)$$

Buscando el mínimo del funcional,

$$0 = \frac{dJ(0)}{d\alpha} = \int_0^1 p(x) \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} + r(x)yv dx + \frac{p(1)a_2}{b_2} y(1)v(1) - \frac{p(0)a_1}{b_1} y(0)v(0) - \frac{p(1)g_2}{b_2} v(1) + \frac{p(0)g_1}{b_1} v(0) - \int_0^1 f(x)v(x) dx. \quad (1.10)$$

Integrando por partes,

$$0 = - \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) v dx + v(1)p(1) \frac{dy(1)}{dx} - v(0)p(0) \frac{dy(0)}{dx} + \int_0^1 r(x)yv dx + \frac{p(1)a_2}{b_2} y(1)v(1) - \frac{p(0)a_1}{b_1} y(0)v(0) - \frac{p(1)g_2}{b_2} v(1) + \frac{p(0)g_1}{b_1} v(0) - \int_0^1 f(x)v(x) dx. \quad (1.11)$$

Agrupando,

$$0 = \int_0^1 \left( - \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + r(x)y - f(x) \right) v(x) dx + v(1) \left( p(1) \frac{dy(1)}{dx} + \frac{p(1)a_2}{b_2} y(1) - \frac{p(1)g_2}{b_2} \right) - v(0) \left( p(0) \frac{dy(0)}{dx} + \frac{p(0)a_1}{b_1} y(0) + \frac{p(0)g_1}{b_1} \right). \quad (1.12)$$

Es decir,  $y$  es solución del problema de contorno (1.1).

Luego, hemos demostrado que de existir un mínimo de  $J$  entonces debe ser solución del problema de contorno (1.1). Como dicho problema tiene una única solución entonces se tiene que el mínimo de  $J$  existe.

### 1.3 Método

En esta sección se formulará el método de Rayleigh-Ritz usando para ello la forma variacional desarrollada en (1.2) para aproximar la solución del problema de contorno (1.1). A continuación se describirá la malla escalonada, representada en la figura 1.1, sobre la cual se formulará el método de Rayleigh-Ritz.

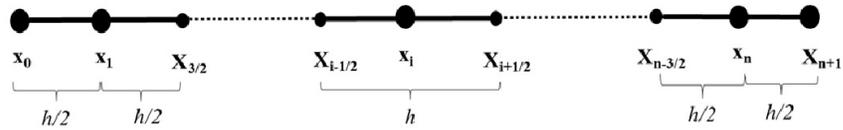


Figura 1.1: Representación gráfica de la malla escalonada.

El valor  $h$  representa la distancia entre dos nodos consecutivos exceptuando los dos primeros y los dos últimos ya que en ellos hay la mitad de la distancia. La malla se llama escalonada porque utiliza una combinación de nodos con índice entero e índice fraccionario. En el método de Rayleigh-Ritz solamente se utilizan los nodos de índice entero en su formulación, sin embargo, los nodos de índice fraccionario son utilizados en los métodos que se describirán en el capítulo 3.

A continuación se describirán las funciones de base  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$  que se utilizarán para describir el método de Rayleigh-Ritz.

La función  $\varphi_0$  está dada por:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2x}{h} & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & \text{si } x_1 < x \leq x_{n+1}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Esta función base está bien definida en el intervalo  $[0, 1]$ , es una función continua y diferenciable a trozos en  $[0, 1]$ . Posee pendiente negativa en  $\left[0, \frac{h}{2}\right]$ . La figura 1.2(a) representa a la función  $\varphi_0$ .

La función  $\varphi_1$  está dada por:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{2x}{h} & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1 \\ -\frac{x}{h} + \frac{3}{2} & \text{si } x_1 < x \leq x_2 \\ 0 & \text{si } x_2 < x \leq x_{n+1}. \end{cases} \quad (1.14)$$

La función base  $\varphi_1$  está bien definida en el intervalo  $[0, 1]$ , también es una función continua y diferenciable a trozos en  $[0, 1]$ . Posee pendiente positiva en  $\left[0, \frac{h}{2}\right]$  y pendiente negativa en  $\left[\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}\right]$ . La figura 1.2(b) representa a la función  $\varphi_1$ .

La función  $\varphi_i$  con  $i = 2, \dots, n$  está dada por:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{1}{h_{i-1}}(x - x_{i-1}) & \text{si } x_{i-1} < x \leq x_i \\ \frac{1}{h_i}(x_{i+1} - x) & \text{si } x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{si } x_{i+1} < x \leq x_{n+1}. \end{cases} \quad (1.15)$$

La función base  $\varphi_i$  está bien definida en el intervalo  $[0, 1]$ , también es una función

continua y diferenciable a trozos en  $[0, 1]$ . Posee pendiente positiva en  $[x_{i-1}, x_i]$  y pendiente negativa en  $[x_i, x_{i+1}]$ . El valor  $h_i$  representa la distancia de dos nodos consecutivos, es decir,  $h_i = x_{i+1} - x_i$  que en este trabajo es un valor constante denotado por  $h$ , debido a que solo se consideran mallas uniformes. La figura 1.2(c) representa a la función  $\varphi_i$ .

La función  $\varphi_n$  está dada por:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 \leq x < x_{n-1} \\ \frac{1}{h} \left( x - 1 + \frac{3h}{2} \right) & \text{si } x_{n-1} \leq x < x_n \\ -\frac{2}{h}(x - 1) & \text{si } x_n \leq x \leq x_{n+1}. \end{cases} \quad (1.16)$$

La función base  $\varphi_n$  está bien definida en el intervalo  $[0, 1]$ , también es una función continua y diferenciable a trozos en  $[0, 1]$ . Posee pendiente positiva en el intervalo  $\left[1 - \frac{3h}{2}, 1 - \frac{h}{2}\right]$  y pendiente negativa en  $\left[1 - \frac{h}{2}, 1\right]$ . La figura 1.2(d) representa a la función  $\varphi_n$ .

La última función base  $\varphi_{n+1}$  está dada por:

$$\varphi_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 \leq x \leq x_n \\ \frac{2}{h} \left( x - 1 + \frac{h}{2} \right) & \text{si } x_n < x \leq x_{n+1}. \end{cases} \quad (1.17)$$

La función base  $\varphi_{n+1}$  está bien definida en el intervalo  $[0, 1]$ , también es una función continua y diferenciable a trozos en  $[0, 1]$ . Posee pendiente positiva en  $\left[1 - \frac{h}{2}, 1\right]$ . La figura 1.2(e) representa a la función  $\varphi_{n+1}$ .

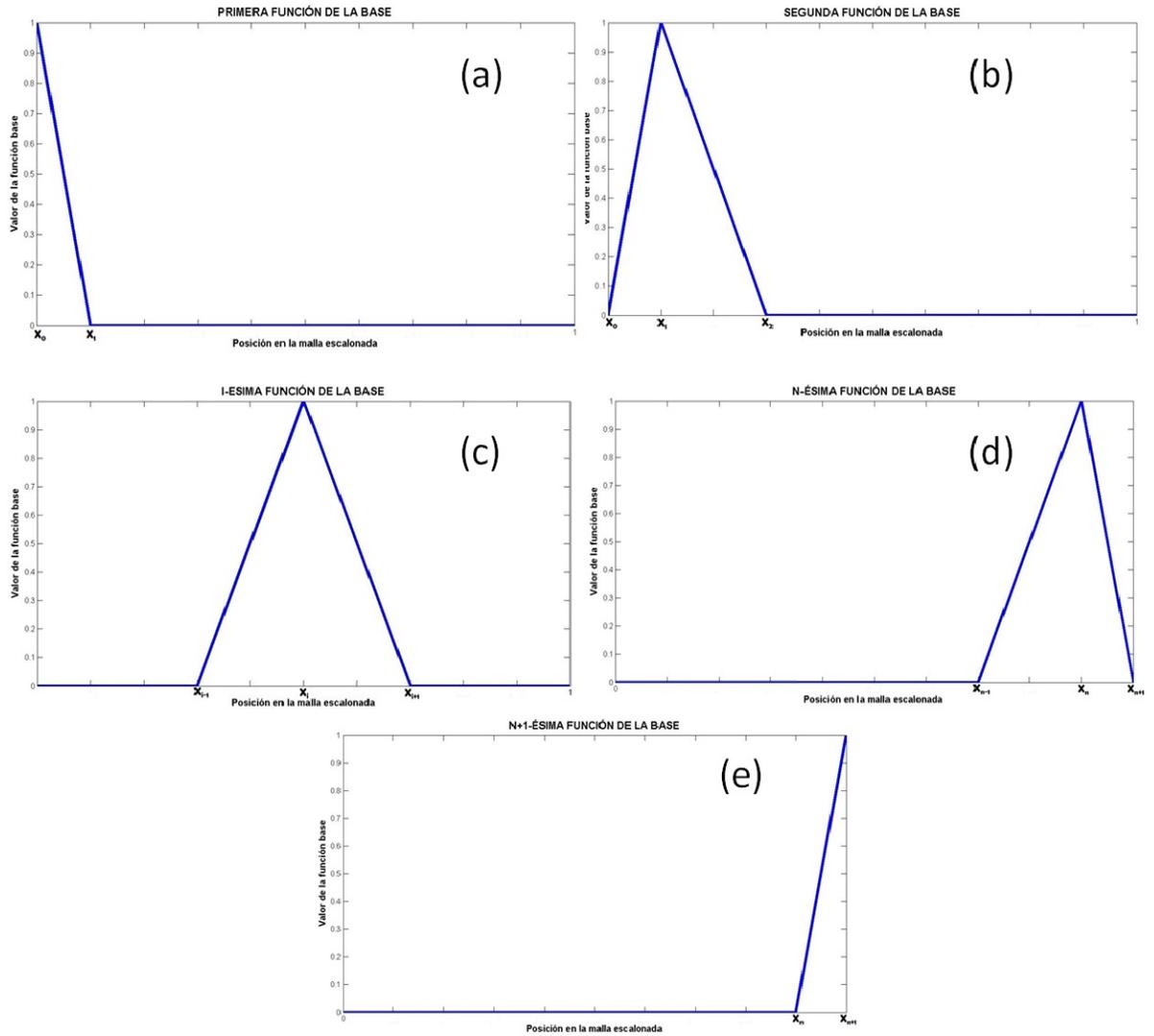


Figura 1.2: Representación gráfica de las funciones base las cuales describirán el método de Rayleigh-Ritz.

Consideremos la aproximación  $y_n$ , a la solución  $y$  de la ecuación (1.1), dada por:

$$y_n = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \varphi_i$$

donde  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$  son funciones base y  $c_0, c_1, \dots, c_{n+1}$  son constantes a determinar.

Sustituyendo  $y_n$  en lugar de  $z$  en la ecuación (1.2) resulta,

$$\begin{aligned} J(c_0, c_1, \dots, c_{n+1}) = & \frac{1}{2} \int_0^1 p(x) \left( \sum_{i=0}^{n+1} c_i \frac{d\varphi_i}{dx} \right)^2 + r(x) \left( \sum_{i=0}^{n+1} c_i \varphi_i \right)^2 dx \\ & + \frac{p(1)a_2}{2b_2} (c_{n+1})^2 - \frac{p(0)a_1}{2b_1} (c_0)^2 - \frac{p(1)g_2}{b_2} c_{n+1} \\ & + \frac{p(0)g_1}{b_1} c_0 - \int_0^1 f(x) \sum_{i=0}^{n+1} c_i \varphi_i dx. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Buscando el mínimo respecto a  $c_0$  de (1.18),

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial J}{\partial c_0} = & \left( \int_0^1 p(x) \left( \frac{d\varphi_0}{dx} \right)^2 + r(x) (\varphi_0)^2 dx - \frac{p(0)a_1}{b_1} \right) c_0 \\ & + \left( \int_0^1 p(x) \left( \frac{d\varphi_0}{dx} \right) \left( \frac{d\varphi_1}{dx} \right) + r(x) \varphi_0 \varphi_1 dx \right) c_1 + \frac{p(0)g_1}{b_1} - \int_0^1 f(x) \varphi_0 dx. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Usando (1.13) y (1.14) en (1.19),

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial J}{\partial c_0} = & \left( \int_0^{h/2} p(x) \left( -\frac{2}{h} \right)^2 + r(x) \left( 1 - \frac{2}{h}x \right)^2 dx - \frac{p(0)a_1}{b_1} \right) c_0 \\ & + \left( \int_0^{h/2} p(x) \left( -\frac{4}{h^2} \right) + r(x) \left( 1 - \frac{2}{h}x \right) \left( \frac{2}{h}x \right) dx \right) c_1 \\ & + \frac{p(0)g_1}{b_1} - \int_0^{h/2} f(x) \left( 1 - \frac{2}{h}x \right) dx \end{aligned} \quad (1.20)$$

de donde definimos,

$$a_{00} = \int_0^{h/2} p(x) \left( -\frac{2}{h} \right)^2 + r(x) \left( 1 - \frac{2}{h}x \right)^2 dx - \frac{p(0)a_1}{b_1}$$

$$a_{01} = \int_0^{h/2} p(x) \left( -\frac{4}{h^2} \right) + r(x) \left( 1 - \frac{2}{h}x \right) \left( \frac{2}{h}x \right) dx$$

$$b_0 = \int_0^{h/2} f(x) \left( 1 - \frac{2}{h}x \right) dx - \frac{p(0)g_1}{b_1}.$$

Buscando el mínimo respecto a  $c_1$  de (1.18),

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial J}{\partial c_1} = & \left( \int_0^1 p(x) \left( \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \left( \frac{d\varphi_0}{dx} \right) + r(x)\varphi_0\varphi_1 dx \right) c_0 - \int_0^1 f(x)\varphi_1 dx \\ & + \left( \int_0^1 p(x) \left( \frac{d\varphi_1}{dx} \right)^2 + r(x)(\varphi_1)^2 dx \right) c_1 \\ & + \left( \int_0^1 p(x) \left( \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \left( \frac{d\varphi_2}{dx} \right) + r(x)\varphi_2\varphi_1 dx \right) c_2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Usando (1.13), (1.14) y (1.15) en (1.21),

$$\begin{aligned} 0 = & \left( \int_0^{h/2} p(x) \left( -\frac{2}{h} \right) \left( \frac{2}{h} \right) + r(x) \left( -\frac{2}{h}x + 1 \right) \left( \frac{2}{h} \right) x dx \right) c_0 \\ & + \left( \int_0^{h/2} p(x) \left( \frac{2}{h} \right)^2 + r(x) \left( \frac{2x}{h} \right)^2 dx \right. \\ & \left. + \int_{h/2}^{3h/2} p(x) \left( -\frac{1}{h} \right)^2 + r(x) \left( -\frac{x}{h} + \frac{3}{2} \right)^2 dx \right) c_1 \\ & + \left( \int_{h/2}^{3h/2} p(x) \left( -\frac{1}{h} \right) \left( \frac{1}{h} \right) + r(x) \left( -\frac{1}{h}x + \frac{3}{2} \right) \left( \frac{x}{h} - \frac{1}{2} \right) dx \right) c_2 \\ & - \left( \int_0^{h/2} f(x) \left( \frac{2}{h}x \right) dx + \int_{h/2}^{3h/2} f(x) \left( -\frac{1}{h}x + \frac{3}{2} \right) dx \right) \end{aligned} \quad (1.22)$$

de donde definimos,

$$a_{10} = \int_0^{h/2} p(x) \left( -\frac{2}{h} \right) \left( \frac{2}{h} \right) + r(x) \left( -\frac{2}{h}x + 1 \right) \left( \frac{2}{h} \right) x dx$$

$$a_{11} = \int_0^{h/2} p(x) \left( \frac{2}{h} \right)^2 + r(x) \left( \frac{2x}{h} \right)^2 dx + \int_{h/2}^{3h/2} p(x) \left( -\frac{1}{h} \right)^2 + r(x) \left( -\frac{x}{h} + \frac{3}{2} \right)^2 dx$$

$$a_{12} = \int_{h/2}^{3h/2} p(x) \left(-\frac{1}{h}\right) \left(\frac{1}{h}\right) + r(x) \left(-\frac{1}{h}x + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{x}{h} - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$b_1 = \int_0^{h/2} f(x) \left(\frac{2}{h}x\right) dx + \int_{h/2}^{3h/2} f(x) \left(-\frac{1}{h}x + \frac{3}{2}\right) dx.$$

Buscando el mínimo respecto a  $c_k$  de (1.18) con  $2 \leq k \leq n$ ,

$$0 = \frac{\partial J}{\partial c_k} = \sum_{i=0}^{n+1} \left( \int_0^1 p(x) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} + r(x) \varphi_i \varphi_k dx \right) c_i - \int_0^1 f(x) \varphi_k dx. \quad (1.23)$$

Usando (1.15) en (1.23),

$$0 = \frac{\partial J}{\partial c_k} = \left( \int_0^1 p(x) \left(\frac{d\varphi_k}{dx}\right) \left(\frac{d\varphi_{k-1}}{dx}\right) + r(x) \varphi_k \varphi_{k-1} dx \right) c_{k-1}$$

$$- \int_0^1 f(x) \varphi_k dx + \left( \int_0^1 p(x) \left(\frac{d\varphi_k}{dx}\right)^2 + r(x) (\varphi_k)^2 dx \right) c_k \quad (1.24)$$

$$+ \left( \int_0^1 p(x) \left(\frac{d\varphi_k}{dx}\right) \left(\frac{d\varphi_{k+1}}{dx}\right) + r(x) \varphi_k \varphi_{k+1} dx \right) c_{k+1}$$

de donde definimos,

$$a_{kk} = \left(\frac{1}{h_{k-1}}\right)^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) dx + \left(-\frac{1}{h_k}\right)^2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x) dx$$

$$+ \left(\frac{1}{h_{k-1}}\right)^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} r(x) (x - x_{k-1})^2 dx + \left(\frac{1}{h_k}\right)^2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} r(x) (x_{k+1} - x)^2 dx$$

$$a_{k,k+1} = -\left(\frac{1}{h_k}\right)^2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x) dx + \left(\frac{1}{h_k}\right)^2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} r(x) (x - x_k) (x_{k+1} - x) dx$$

$$a_{k,k-1} = -\left(\frac{1}{h_{k-1}}\right)^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) dx + \left(\frac{1}{h_{k-1}}\right)^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} r(x) (x_k - x) (x - x_{k-1}) dx$$

$$b_k = \frac{1}{h_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(x - x_{k-1})dx + \frac{1}{h_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)(x_{k+1} - x)dx.$$

Buscando el mínimo respecto a  $c_n$  de (1.18),

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial J}{\partial c_n} &= \left( \int_0^1 p(x) \left( \frac{d\varphi_n}{dx} \right) \left( \frac{d\varphi_{n-1}}{dx} \right) + r(x)\varphi_n\varphi_{n-1}dx \right) c_{n-1} \\ &- \int_0^1 f(x)\varphi_n dx + \left( \int_0^1 p(x) \left( \frac{d\varphi_n}{dx} \right)^2 + r(x)(\varphi_n)^2 dx \right) c_n \\ &+ \left( \int_0^1 p(x) \left( \frac{d\varphi_n}{dx} \right) \left( \frac{d\varphi_{n+1}}{dx} \right) + r(x)\varphi_n\varphi_{n+1}dx \right) c_{n+1}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Usando (1.15), (1.16) y (1.17) en (1.25),

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \int_{1-3h/2}^{1-h/2} p(x) \left( -\frac{1}{h} \right) \left( \frac{1}{h} \right) \right. \\ &+ r(x) \left( -\frac{1}{h} \right) \left( x - 1 + \frac{h}{2} \right) \left( \frac{1}{h} \right) \left( x - 1 + \frac{3h}{2} \right) dx \Big) c_{n-1} \\ &+ \left( \int_{1-3h/2}^{1-h/2} p(x) \left( \frac{1}{h} \right)^2 + r(x) \left( \frac{1}{h} \left( x - 1 + \frac{3h}{2} \right) \right)^2 dx \right. \\ &+ \int_{1-h/2}^1 p(x) \left( -\frac{2}{h} \right)^2 + r(x) \left( -\frac{2}{h} (x - 1) \right)^2 dx \Big) c_n \\ &+ \left( \int_{1-h/2}^1 p(x) \left( -\frac{2}{h} \right) \left( \frac{2}{h} \right) \right. \\ &+ r(x) \left( -\frac{2}{h} \right) (x - 1) \left( \frac{2}{h} \right) \left( x - 1 + \frac{h}{2} \right) dx \Big) c_{n+1} \\ &- \int_{1-3h/2}^{1-h/2} f(x) \left( \frac{1}{h} \right) \left( x - 1 + \frac{3h}{2} \right) dx \\ &- \int_{1-h/2}^1 f(x) \left( -\frac{2}{h} \right) (x - 1) dx \end{aligned} \quad (1.26)$$

de donde se definen,

$$a_{n,n-1} = \int_{1-3h/2}^{1-h/2} p(x) \left( -\frac{1}{h} \right) \left( \frac{1}{h} \right) + r(x) \left( -\frac{1}{h} \right) \left( x - 1 + \frac{h}{2} \right) \left( \frac{1}{h} \right) \left( x - 1 + \frac{3h}{2} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
a_{nn} &= \int_{1-3h/2}^{1-h/2} p(x) \left(\frac{1}{h}\right)^2 + r(x) \left(\frac{1}{h} \left(x-1 + \frac{3h}{2}\right)\right)^2 dx \\
&\quad + \int_{1-h/2}^1 p(x) \left(-\frac{2}{h}\right)^2 + r(x) \left(-\frac{2}{h}(x-1)\right)^2 dx \\
a_{n,n+1} &= \int_{1-h/2}^1 p(x) \left(-\frac{2}{h}\right) \left(\frac{2}{h}\right) + r(x) \left(-\frac{2}{h}\right) (x-1) \left(\frac{2}{h}\right) \left(x-1 + \frac{h}{2}\right) dx \\
b_n &= \int_{1-3h/2}^{1-h/2} f(x) \left(\frac{1}{h}\right) \left(x-1 + \frac{3h}{2}\right) dx + \int_{1-h/2}^1 f(x) \left(-\frac{2}{h}\right) (x-1) dx.
\end{aligned}$$

Buscando el mínimo respecto a  $c_{n+1}$  de (1.18),

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial J}{\partial c_{n+1}} &= \left( \int_0^1 p(x) \left(\frac{d\varphi_{n+1}}{dx}\right)^2 + r(x)(\varphi_{n+1})^2 dx + \frac{p(1)a_2}{b_2} \right) c_{n+1} \\
&\quad + \left( \int_0^1 p(x) \left(\frac{d\varphi_{n+1}}{dx}\right) \left(\frac{d\varphi_n}{dx}\right) + r(x)\varphi_{n+1}\varphi_n dx \right) c_n \\
&\quad - \frac{p(1)g_2}{b_2} - \int_0^1 f(x)\varphi_{n+1} dx.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Usando, (1.15) y (1.17) en (1.27),

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial J}{\partial c_{n+1}} &= \left( \int_{1-h/2}^1 p(x) \left(\frac{2}{h}\right)^2 \right. \\
&\quad \left. + r(x) \left(\frac{2}{h} \left(x-1 + \frac{h}{2}\right)\right)^2 dx + \frac{p(1)a_2}{b_2} \right) c_{n+1} \\
&\quad + \left( \int_{1-h/2}^1 p(x) \left(-\frac{4}{h^2}\right) + r(x) \left(\frac{2}{h} \left(x-1 + \frac{h}{2}\right)\right) \left(-\frac{2}{h}(x-1)\right) dx \right) c_n \\
&\quad - \frac{p(1)g_2}{b_2} - \int_{1-h/2}^1 f(x) \left(\frac{2}{h} \left(x-1 + \frac{h}{2}\right)\right) dx
\end{aligned} \tag{1.28}$$

de donde se definen,

$$a_{n+1,n} = \int_{1-h/2}^1 p(x) \left(-\frac{4}{h^2}\right) + r(x) \left(\frac{2}{h} \left(x-1 + \frac{h}{2}\right)\right) \left(-\frac{2}{h}(x-1)\right) dx$$

$$a_{n+1,n+1} = \int_{1-h/2}^1 p(x) \left(\frac{2}{h}\right)^2 + r(x) \left(\frac{2}{h} \left(x - 1 + \frac{h}{2}\right)\right)^2 dx + \frac{p(1)a_2}{b_2}$$

$$b_{n+1} = \frac{p(1)g_2}{b_2} + \int_{1-h/2}^1 f(x) \left(\frac{2}{h} \left(x - 1 + \frac{h}{2}\right)\right) dx.$$

Luego de haber obtenido los coeficientes  $a_{ij}$  con  $i, j = 0, \dots, n+1$  se forma un sistema de ecuaciones donde los  $c_i$  son las constantes a determinar. La descripción del sistema de ecuaciones está dado por,

$$Ac = B$$

donde  $A$  es una matriz tridiagonal de orden  $n+2 \times n+2$ ,  $B$  un vector de orden  $n+2 \times 1$  y  $c$  de orden  $n+2 \times 1$  el vector a buscar. Esto es,

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & \dots & & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \vdots & & & 0 \\ \vdots & & a_{i,i-1} & a_{ii} & a_{i,i+1} & \vdots \\ 0 & & \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Es fácil verificar que la matriz  $A$  es estrictamente diagonal dominante por filas pues se satisface,

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n+2} |a_{ij}|, \forall i \in \{1, \dots, n+2\}.$$

En la figura 1.3 se observa la estructura de la matriz  $A$  en una malla de 7 nodos donde cada coeficiente se encuentra simbolizado de color azul. La primera y última fila son los coeficientes que discretizan la ecuación de los bordes correspondiente a los nodos  $x_0$  y  $x_6$  y la  $k$ -ésima fila corresponde a la discretización del nodo  $x_k$  con  $k = 1, \dots, 5$ . Esta matriz es estructuralmente simétrica.

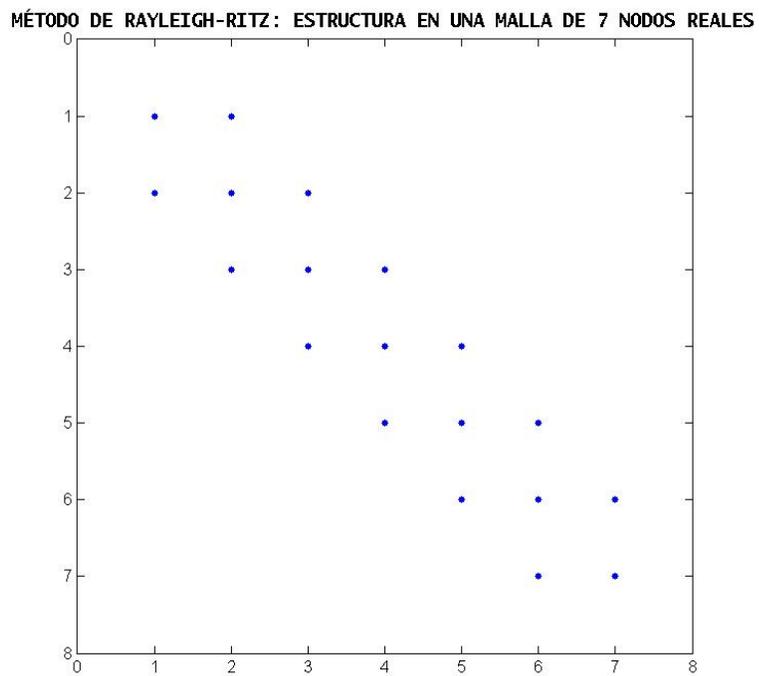


Figura 1.3: Estructura de la matriz  $A$  en una malla de 7 nodos reales aplicando el método de Rayleigh-Ritz.

# Capítulo 2

## Análisis de convergencia

### 2.1 Introducción

En este capítulo analizaremos de forma explícita los coeficientes que produce el método de Rayleigh-Ritz obtenidos en el capítulo anterior. Tomando en cuenta tales ecuaciones las mismas serán analizadas con la finalidad de buscar su consistencia y, posteriormente, su estabilidad.

### 2.2 Coeficientes calculados con regla del punto medio

En esta sección se desarrollarán las ecuaciones lineales del sistema (1.29) asociadas al método de Rayleigh-Ritz cuando la fórmula de cuadratura utilizada es punto medio,

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

Esta fórmula de cuadratura será utilizada en la ecuaciones que describen el método de Rayleigh-Ritz para obtener su fórmula explícita. En cada caso  $L_h$  representa el lado izquierdo de las ecuaciones obtenidas. En lo que sigue  $U$  representa la solución analítica y  $U_n$  es la aproximación aplicando el método de Rayleigh-Ritz.

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_0$  utilizando los coeficientes  $a_{00}$ ,  $a_{01}$  y  $b_0$ . La misma está trasladada al origen obteniéndose la siguiente discretización,

$$a_{00}U_0 + a_{01}U_{1/2} = b_0.$$

Sustituyendo los valores  $a_{00}$ ,  $a_{01}$  y  $b_0$  se obtiene,

$$\begin{aligned} \left( \frac{2}{h}p\left(\frac{h}{4}\right) + \frac{h}{8}r\left(\frac{h}{4}\right) - \frac{p(0)a_1}{b_1} \right) U_0 + \left( -\frac{2}{h}p\left(\frac{h}{4}\right) + \frac{h}{8}r\left(\frac{h}{4}\right) \right) U_{1/2} \\ = \frac{h}{4}f\left(\frac{h}{4}\right) - \frac{p(0)g_1}{b_1}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Luego, aplicando el desarrollo de Taylor en (2.1) y buscando el error de truncamiento resulta,

$$L_h(U - U_n) = \frac{h}{4} \left( f(0) - f\left(\frac{h}{4}\right) \right) + O(h^2). \quad (2.2)$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_1$  utilizando los coeficientes  $a_{10}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  y  $b_1$ . La misma está trasladada al origen obteniéndose la siguiente discretización,

$$a_{10}U_{-1/2} + a_{11}U_0 + a_{12}U_1 = b_1.$$

Sustituyendo los valores  $a_{10}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  y  $b_1$  se obtiene,

$$\begin{aligned} \left( -\frac{2}{h}p\left(\frac{h}{4}\right) + \frac{h}{8}r\left(\frac{h}{4}\right) \right) U_{-1/2} \\ + \left( \frac{2}{h}p\left(\frac{h}{4}\right) + \frac{h}{8}r\left(\frac{h}{4}\right) + \frac{1}{h}p(h) + \frac{h}{4}r(h) \right) U_0 \\ + \left( -\frac{1}{h}p(h) + \frac{h}{4}r(h) \right) U_1 = -\frac{h}{4}f\left(\frac{h}{4}\right) + \frac{h}{2}f(h). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Luego, aplicando el desarrollo de Taylor en (2.3) y buscando el error de truncamiento resulta,

$$L_h(U - U_n) = \frac{h}{4} \left( 3f(0) - f\left(\frac{h}{4}\right) - 2f(h) \right) + O(h^2). \quad (2.4)$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_k$  con  $k = 2, \dots, n-1$ , utilizando los coeficientes  $a_{k,k-1}$ ,  $a_{kk}$ ,  $a_{k,k+1}$  y  $b_k$ . La misma está trasladada al origen obteniéndose la siguiente discretización,

$$a_{k,k-1}U_{-1} + a_{kk}U_0 + a_{k,k+1}U_1 = b_k.$$

Sustituyendo los valores  $a_{k,k-1}$ ,  $a_{kk}$ ,  $a_{k,k+1}$  y  $b_k$  se obtiene,

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{1}{h}p\left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{4}r\left(-\frac{h}{2}\right) \right) U_{-1} \\ & + \left( \frac{1}{h}p\left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{h}p\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{4}r\left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{4}r\left(\frac{h}{2}\right) \right) U_0 \\ & + \left( -\frac{1}{h}p\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{4}r\left(\frac{h}{2}\right) \right) U_1 = \frac{h}{2} \left( f\left(-\frac{h}{2}\right) + f\left(\frac{h}{2}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Luego, aplicando el desarrollo de Taylor en (2.5) y buscando el error de truncamiento resulta,

$$L_h(U - U_n) = h \left( f(0) - \frac{1}{2}f\left(-\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{2}f\left(\frac{h}{2}\right) \right) + O(h^3). \quad (2.6)$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_n$  utilizando los coeficientes  $a_{n,n-1}$ ,  $a_{nn}$ ,  $a_{n,n+1}$  y  $b_n$ . La misma está trasladada al origen obteniéndose la siguiente discretización,

$$a_{n,n-1}U_{-1} + a_{nn}U_0 + a_{n,n+1}U_{1/2} = b_n.$$

Sustituyendo los valores  $a_{n,n-1}$ ,  $a_{nn}$ ,  $a_{n,n+1}$  y  $b_n$  se obtiene,

$$\begin{aligned}
& \left( -\frac{1}{h}p(1-h) + \frac{h}{4}r(1-h) \right) U_{-1} \\
& + \left( \frac{1}{h}p(1-h) + \frac{h}{4}r(1-h) + \frac{2}{h}p \left( 1 - \frac{h}{4} \right) + \frac{h}{8}r \left( 1 - \frac{h}{4} \right) \right) U_0 \\
& + \left( -\frac{2}{h}p \left( 1 - \frac{h}{4} \right) + \frac{h}{8}r \left( 1 - \frac{h}{4} \right) \right) U_{1/2} \\
& = \frac{h}{2}f(1-h) + \frac{h}{4}f \left( 1 - \frac{h}{4} \right).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Luego, aplicando el desarrollo de Taylor en (2.7) y buscando el error de truncamiento resulta,

$$L_h(U - U_n) = \frac{h}{4} \left( 3f(1) - f \left( 1 - \frac{h}{4} \right) - 2f(1-h) \right) + O(h^2). \tag{2.8}$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_{n+1}$  utilizando los coeficientes  $a_{n+1,n}$ ,  $a_{n+1,n+1}$  y  $b_{n+1}$ . La misma está trasladada al origen obteniéndose la siguiente discretización,

$$a_{n+1,n}U_{-1/2} + a_{n+1,n+1}U_0 = b_{n+1}.$$

Sustituyendo los valores  $a_{n+1,n}$ ,  $a_{n+1,n+1}$  y  $b_{n+1}$  se obtiene,

$$\begin{aligned}
& \left( -\frac{2}{h}p \left( 1 - \frac{h}{4} \right) + \frac{h}{8}r \left( 1 - \frac{h}{4} \right) \right) U_{-1/2} \\
& + \left( \frac{2}{h}p \left( 1 - \frac{h}{4} \right) + \frac{h}{8}r \left( 1 - \frac{h}{4} \right) + \frac{p(1)a_2}{b_2} \right) U_0 \\
& = \frac{h}{4}f \left( 1 - \frac{h}{4} \right) + \frac{p_1g_2}{b_2}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Luego, aplicando el desarrollo de Taylor en (2.9) y buscando el error de truncamiento resulta,

$$L_h(U - U_n) = \frac{h}{4} \left( f(1) - f \left( 1 - \frac{h}{4} \right) \right) + O(h^2). \tag{2.10}$$

Las fórmulas de consistencia del punto medio evidencian que ellas son débilmente consistentes pues aparecen términos de primer orden. Estos términos se anulan bajo refinamiento de malla prevaleciendo las aproximaciones de orden cúbico y cuadrático indicadas.

## 2.3 Coeficientes calculados con regla del trapecio

En esta sección se mostrarán los coeficientes obtenidos en el capítulo anterior para posteriormente calcularlos aplicando la regla del trapecio y así discretizar la ecuación correspondiente a cada nodo. La regla del trapecio es la siguiente,

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_0$  utilizando los coeficientes  $a_{00}$ ,  $a_{01}$  y  $b_0$ . La misma está trasladada al origen obteniéndose la siguiente discretización,

$$a_{00}U_0 + a_{01}U_{1/2} = b_0.$$

Sustituyendo los valores  $a_{00}$ ,  $a_{01}$  y  $b_0$  se obtiene,

$$\begin{aligned} \left(\frac{p(0)}{h} + \frac{h}{4}r(0) + \frac{1}{h^2}p\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{p(0)a_1}{b_1}\right)U_0 + \left(-\frac{p(0)}{h} - \frac{1}{h^2}p\left(\frac{h}{2}\right)\right)U_{1/2} \\ = \frac{h}{4}f(0) - \frac{p(0)g_1}{b_1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Luego, aplicando el desarrollo de Taylor en (2.11) y buscando el error de truncamiento resulta,

$$L_h(U - U_n) = O(h^2). \quad (2.12)$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_1$  utilizando los coeficientes  $a_{10}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  y  $b_1$ . La misma está trasladada al origen obteniéndose la

siguiente discretización,

$$a_{10}U_{-1/2} + a_{11}U_0 + a_{12}U_1 = b_1.$$

Sustituyendo los valores  $a_{10}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  y  $b_1$  se obtiene,

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{p(0)}{h} - \frac{1}{h}p\left(\frac{h}{2}\right) \right) U_{-1/2} \\ + & \left( \frac{p(0)}{h} + \frac{1}{h}p\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{4}r\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2h}p\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}r\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2h}p\left(\frac{3h}{2}\right) \right) U_0 \\ & + \left( -\frac{1}{2h}p\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{2h}p\left(\frac{3h}{2}\right) \right) U_1 = \frac{3h}{4}f\left(\frac{h}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Luego, aplicando el desarrollo de Taylor en (2.13) y buscando el error de truncamiento se obtiene,

$$L_h(U - U_n) = \frac{3h}{4} \left( f(0) - f\left(\frac{h}{2}\right) \right) + O(h^2). \quad (2.14)$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_k$  con  $k = 2, \dots, n-1$ , utilizando los coeficientes  $a_{k,k-1}$ ,  $a_{kk}$ ,  $a_{k,k+1}$  y  $b_k$ . La misma está trasladada al origen obteniéndose la siguiente discretización,

$$a_{k,k-1}U_{-1} + a_{kk}U_0 + a_{k,k+1}U_1 = b_k.$$

Sustituyendo los valores  $a_{k,k-1}$ ,  $a_{kk}$ ,  $a_{k,k+1}$  y  $b_k$  se obtiene,

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{1}{2h}p(0) - \frac{1}{2h}p(-h) \right) U_{-1} \\ + & \left( \frac{1}{2h}p(0) + \frac{1}{2h}p(-h) + \frac{1}{2h}p(0) + \frac{1}{2h}p(h) \right) U_0 \\ & + \left( -\frac{1}{2h}p(0) - \frac{1}{2h}p(h) \right) U_1 = hf(0). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Luego, aplicando el desarrollo de Taylor en (2.15) y buscando el error de truncamiento resulta,

$$L_h(U - U_n) = O(h^3). \quad (2.16)$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_n$  utilizando los coeficientes  $a_{n,n-1}$ ,  $a_{nn}$ ,  $a_{n,n+1}$  y  $b_n$ . La misma está trasladada al origen obteniéndose la siguiente discretización,

$$a_{n,n-1}U_{-1} + a_{nn}U_0 + a_{n,n+1}U_{1/2} = b_n.$$

Sustituyendo los valores  $a_{n,n-1}$ ,  $a_{nn}$ ,  $a_{n,n+1}$  y  $b_n$  se obtiene,

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{1}{2h}p \left( 1 - \frac{3h}{2} \right) - \frac{1}{2h}p \left( 1 - \frac{h}{2} \right) \right) U_{-1} \\ & + \left( \frac{1}{2h}p \left( 1 - \frac{3h}{2} \right) + \frac{1}{2h}p \left( 1 - \frac{h}{2} \right) + \frac{h}{2}r \left( 1 - \frac{h}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{h}p \left( 1 - \frac{h}{2} \right) + \frac{h}{4}r \left( 1 - \frac{h}{2} \right) + \frac{p(1)}{h} \right) U_0 \\ & \quad + \left( -\frac{1}{h}p \left( 1 - \frac{h}{2} \right) - \frac{p(1)}{h} \right) U_{1/2} \\ & \quad = \frac{3h}{4} f \left( 1 - \frac{h}{2} \right). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Luego, aplicando el desarrollo de Taylor en (2.17) y buscando el error de truncamiento resulta,

$$L_h(U - U_n) = \frac{3h}{4} \left( f(1) - f \left( 1 - \frac{h}{2} \right) \right) + O(h^2). \tag{2.18}$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_{n+1}$  utilizando los coeficientes  $a_{n+1,n}$ ,  $a_{n+1,n+1}$  y  $b_{n+1}$ . La misma está trasladada al origen obteniéndose la siguiente discretización,

$$a_{n+1,n}U_{-1/2} + a_{n+1,n+1}U_0 = b_{n+1}.$$

Sustituyendo los valores  $a_{n+1,n}$ ,  $a_{n+1,n+1}$  y  $b_{n+1}$  se obtiene,

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{1}{h}p \left( 1 - \frac{h}{2} \right) - \frac{p(1)}{h} \right) U_{-1/2} \\ & + \left( \frac{1}{h}p \left( 1 - \frac{h}{2} \right) + \frac{p(1)}{h} + \frac{h}{4}r(1) + \frac{p(1)a_2}{b_2} \right) U_0 \\ & \quad = \frac{h}{4} f(1) + \frac{p_1 g_2}{b_2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Luego, aplicando el desarrollo de Taylor en (2.19) y buscando el error de truncamiento resulta,

$$L_h(U - U_n) = O(h^2). \quad (2.20)$$

Los errores de truncamiento de las ecuaciones obtenidas por la fórmula del trapecio son perfectamente consistentes en todos los nodos exceptuando los nodos  $x_1$  y  $x_n$ , correspondientes al segundo y penúltimo nodo interior de la malla. Para estos últimos nodos la consistencia es débil en el sentido indicado para la regla del punto medio. Los órdenes de truncamiento de las ecuaciones generadas por la regla del trapecio son cúbico y cuadrático.

## 2.4 Estabilidad

Veamos que la matriz  $A$  del sistema (1.29) es estable. Para ello aplicaremos el teorema de Gershgorin [10] a las ecuaciones obtenidas mediante la cuadratura del punto medio. El teorema plantea que los círculos de Gershgorin son:

$$R_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{00}| \leq |a_{01}|\}$$

$$R_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|\} \text{ con } i = 1, \dots, n.$$

$$R_{n+1} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{n+1,n+1}| \leq |a_{n+1,n}|\}.$$

Veamos que  $R_0$ ,  $R_i$  y  $R_{n+1}$  no poseen el autovalor 0 y están acotados inferiormente por la constante  $m = \min_{x \in [0,1]} r(x)$ , donde se asume que  $m > 0$ .

Para  $R_0$ :

$$\begin{aligned} -|a_{01}| &\leq z - a_{00} \leq |a_{01}| \\ -|a_{01}| + a_{00} &\leq z \leq |a_{01}| + a_{00}. \end{aligned}$$

Luego, tomando el lado izquierdo de la desigualdad anterior,

$$z \geq a_{00} - |a_{01}|.$$

Sustituyendo los valores  $a_{00}$  y  $a_{01}$  de la ecuación (2.1),

$$\begin{aligned} z \geq a_{00} - |a_{01}| &= \frac{2}{h^2}p\left(\frac{h}{4}\right) + \frac{1}{8}r\left(\frac{h}{4}\right) - \frac{p(0)a_1}{b_1h} \\ &\quad - \left(\frac{2}{h^2}p\left(\frac{h}{4}\right) - \frac{1}{8}r\left(\frac{h}{4}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}r\left(\frac{h}{4}\right) - \frac{p(0)a_1}{b_1h} > \frac{m}{4} > 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Para  $R_1$ :

$$\begin{aligned} -|a_{10}| - |a_{12}| &\leq z - a_{11} \leq |a_{10}| + |a_{12}| \\ a_{11} - |a_{10}| - |a_{12}| &\leq z \leq a_{11} + |a_{10}| + |a_{12}|. \end{aligned}$$

Luego, tomando el lado izquierdo de la desigualdad anterior,

$$z \geq a_{11} - |a_{10}| - |a_{12}|.$$

Sustituyendo los valores  $a_{10}$ ,  $a_{11}$  y  $a_{12}$  de la ecuación (2.3),

$$\begin{aligned} z \geq a_{11} - |a_{10}| - |a_{12}| &= \frac{2}{h^2}p\left(\frac{h}{4}\right) + \frac{1}{8}r\left(\frac{h}{4}\right) + \frac{1}{h^2}p(h) + \frac{1}{4}r(h) \\ &\quad - \left(\frac{2}{h^2}p\left(\frac{h}{4}\right) - \frac{1}{8}r\left(\frac{h}{4}\right)\right) - \left(\frac{1}{h^2}p(h) - \frac{1}{4}r(h)\right) \\ &= \frac{1}{4}r\left(\frac{h}{4}\right) + \frac{1}{2}r(h) > \frac{3m}{4} > 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Para  $R_i$  con  $i = 2, \dots, n - 1$ :

$$\begin{aligned}
-|a_{i,i-1}| - |a_{i,i+1}| &\leq z - a_{ii} \leq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| \\
-|a_{i,i-1}| - |a_{i,i+1}| + a_{ii} &\leq z \leq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + a_{ii}.
\end{aligned}$$

Luego, tomando el lado izquierdo de la desigualdad anterior,

$$z \geq a_{ii} - |a_{i,i-1}| - |a_{i,i+1}|.$$

Sustituyendo los valores  $a_{ii}$ ,  $a_{i,i-1}$  y  $a_{i,i+1}$  de la ecuación (2.5),

$$\begin{aligned}
z &\geq a_{ii} - |a_{i,i-1}| - |a_{i,i+1}| \\
&= \left( \frac{1}{h^2}p \left( -\frac{h}{2} \right) + \frac{1}{h^2}p \left( \frac{h}{2} \right) + \frac{1}{4}r \left( -\frac{h}{2} \right) + \frac{1}{4}r \left( \frac{h}{2} \right) \right) \\
&\quad - \left( \frac{1}{h^2}p \left( -\frac{h}{2} \right) - \frac{1}{4}r \left( -\frac{h}{2} \right) \right) - \left( \frac{1}{h^2}p \left( \frac{h}{2} \right) - \frac{1}{4}r \left( \frac{h}{2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2}r \left( -\frac{h}{2} \right) + \frac{1}{2}r \left( \frac{h}{2} \right) \approx r(0) > m > 0.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Para  $R_n$ :

$$\begin{aligned}
-|a_{n,n-1}| - |a_{n,n+1}| &\leq z - a_{nn} \leq |a_{n,n-1}| + |a_{n,n+1}| \\
a_{nn} - |a_{n,n-1}| - |a_{n,n+1}| &\leq z \leq a_{11} + |a_{n,n-1}| + |a_{n,n+1}|.
\end{aligned}$$

Luego, tomando el lado izquierdo de la desigualdad anterior,

$$z \geq a_{nn} - |a_{n,n-1}| - |a_{n,n+1}|.$$

Sustituyendo los valores  $a_{n,n-1}$ ,  $a_{nn}$  y  $a_{n,n+1}$  de la ecuación (2.7),

$$\begin{aligned}
z &\geq a_{nn} - |a_{n,n-1}| - |a_{n,n+1}| = \\
&\quad \left( \frac{1}{h^2}p(1-h) + \frac{1}{4}r(1-h) + \frac{2}{h^2}p \left( 1 - \frac{h}{4} \right) + \frac{1}{8}r \left( 1 - \frac{h}{4} \right) \right) \\
&\quad - \left( \frac{1}{h^2}p(1-h) - \frac{1}{4}r(1-h) \right) - \left( \frac{2}{h^2}p \left( 1 - \frac{h}{4} \right) - \frac{1}{8}r \left( 1 - \frac{h}{4} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2}r(1-h) + \frac{1}{4}r \left( 1 - \frac{h}{4} \right) > \frac{3m}{4} > 0.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Para  $R_{n+1}$ :

$$\begin{aligned} -|a_{n+1,n}| &\leq z - a_{n+1,n+1} \leq |a_{n+1,n}| \\ -|a_{n+1,n}| + a_{n+1,n+1} &\leq z \leq |a_{n+1,n}| + a_{n+1,n+1}. \end{aligned}$$

Luego, tomando el lado izquierdo de la desigualdad anterior,

$$z \geq a_{n+1,n+1} - |a_{n+1,n}|.$$

Sustituyendo los valores  $a_{n+1,n+1}$  y  $a_{n+1,n}$  de la ecuación (2.9),

$$\begin{aligned} z \geq a_{n+1,n+1} - |a_{n+1,n}| &= \left( \frac{2}{h^2} p \left( 1 - \frac{h}{4} \right) + \frac{1}{8} r \left( 1 - \frac{h}{4} \right) + \frac{p(1)a_2}{b_2 h} \right) \\ &\quad - \left( \frac{2}{h^2} p \left( 1 - \frac{h}{4} \right) - \frac{1}{8} r \left( 1 - \frac{h}{4} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} r \left( 1 - \frac{h}{4} \right) + \frac{p(1)a_2}{b_2 h} > \frac{m}{4} > 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Los autovalores de  $A$  están contenidos dentro de

$$R = \bigcup_{i=0}^{n+1} R_i.$$

Así, los autovalores contenidos en los círculos de Gershgorin no contienen el cero, son positivos y están acotados inferiormente por  $\frac{m}{4} > 0$ . Por lo tanto, la matriz  $\frac{A}{h}$  es estable debido a que  $h$  es un número positivo acotado superiormente.

El estudio de estabilidad para las ecuaciones producidas por la regla del punto medio se pueden extender similarmente al caso de la regla del trapecio, lo cual omitimos para evitar repeticiones.

## 2.5 Convergencia

Dado un problema de contorno con condiciones de Robin correctamente planteado y una aproximación consistente, la estabilidad de la misma es condición necesaria y suficiente para su convergencia [1, 10]. De esta manera, la convergencia del método de Rayleigh-Ritz puede ser determinada por medio de un estudio de consistencia y estabilidad. En efecto, considerando a  $U_n$  como la solución numérica y a  $U$  como la solución exacta, por el estudio de consistencia se tiene,

$$AU = B + O(h^2). \quad (2.26)$$

Además,

$$AU_n = B. \quad (2.27)$$

Restando (2.26) y (2.27) se tiene,

$$A(U - U_n) = O(h^2). \quad (2.28)$$

Despejando  $h$  convenientemente para hacer uso de análisis de estabilidad resulta,

$$\frac{1}{h}A(U - U_n) = O(h). \quad (2.29)$$

Sabiendo que  $A$  posee inversa tenemos,

$$U - U_n = hA^{-1}O(h). \quad (2.30)$$

Luego, aplicando la norma  $L_2$ ,

$$\|U - U_n\| = \|hA^{-1}\| \|O(h)\|. \quad (2.31)$$

Desarrollando  $\|O(h)\|$  y sabiendo que  $h = \frac{1}{n+1}$ ,

$$\|O(h)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+2} (O(h))^2} = \sqrt{(n+2)O(h)^2} = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \sqrt{O(h)}. \quad (2.32)$$

Por el estudio de estabilidad como,  $\|\frac{1}{h}A\| \geq \frac{m}{4}$  entonces  $\|hA^{-1}\| \leq \frac{4}{m}$ . Luego, usando (2.32) en (2.31),

$$\|U - U_n\| \leq \frac{4}{m} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \sqrt{O(h)}. \quad (2.33)$$

Sustituyendo  $n = \frac{1}{h} - 1$  en (2.33) se obtiene,

$$\|U - U_n\| \leq \left( \frac{4}{m} \sqrt{h+1} \sqrt{O(h)} \right) \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0 \quad (2.34)$$

lo cual implica que el método de Rayleigh-Ritz usando las fórmulas de cuadratura del punto medio es convergente.

El estudio de convergencia presentado asume condiciones que son suficientes para garantizar la convergencia pero no necesarias. En consecuencia, en algunos de los experimentos numéricos del capítulo 4 se aplicará el método de Rayleigh-Ritz a ecuaciones que no satisfacen exactamente los condiciones teóricas usadas en este análisis de convergencia y aún así el método converge a la solución.

# Capítulo 3

## Métodos alternativos

### 3.1 Introducción

En este capítulo se describirán tres métodos alternativos los cuales son: el método de diferencias finitas versión I, el método de diferencias finitas versión II y el método mimético. Ellos serán aplicados tomando como referencia el problema de contorno (1.1). La descripción de estos métodos será muy esquematizada pues ellos no son el objetivo principal de esta tesis. Para mayor información sobre ellos se recomiendan las siguientes referencias [1, 3, 4, 5, 6, 7, 10].

### 3.2 Método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas es utilizado para calcular de manera aproximada las soluciones de problemas de contorno mediante la sustitución de derivadas continuas por sus aproximaciones obtenidas a partir de la fórmula de Taylor [1, 10]. En esta sección se explicarán dos métodos de diferencias finitas los cuales discrepan por la

discretización de la ecuación correspondiente al nodo  $x_1$ . Específicamente la versión I utiliza los nodos  $x_0$  y  $x_2$  mientras que la versión II emplea los nodos  $x_2$  y el nodo imaginario  $x_{-1}$ . Análogamente, por simetría, se pueden hacer las mismas observaciones para la discretización del nodo  $x_n$  del lado derecho del intervalo  $[0, 1]$ .

En ambos métodos se utilizará una malla con puntos fantasma o imaginarios, la cual se observa en la figura 3.1 siendo una extensión de la figura 1.1 pues  $x_0 = 0$  y  $x_{n+1} = 1$ . En este caso se agrega a cada extremo de la malla escalonada con una distancia  $\frac{h}{2}$  un punto fantasma o imaginario representado en color blanco mientras que los puntos con el color negro simbolizan nodos reales.

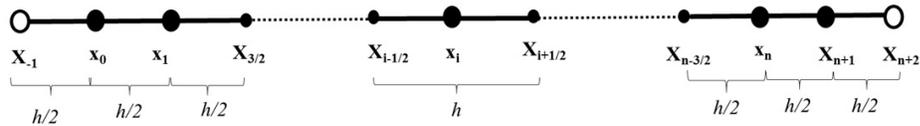


Figura 3.1: Representación gráfica de la malla escalonada con puntos imaginarios.

La introducción o presentación de dos versiones del método de diferencias finitas viene motivada por el hecho de que la versión I tiene aproximaciones de primer orden en los nodos  $x_1$  y  $x_n$  las cuales son sustituidas por aproximaciones de segundo orden en el caso de la versión II.

### 3.2.1 Método de diferencias finitas versión I

En esta subsección se describirán las ecuaciones aplicando el método de diferencias finitas versión I correspondiente a cada nodo dentro de la malla escalonada.

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo imaginario  $x_{-1}$ ,

$$-\frac{b_1}{h}U_{-1} + a_1U_0 + \frac{b_1}{h}U_1 = g_1 \quad (3.1)$$

de donde se definen,

$$a_{-1,-1} = -\frac{b_1}{h}$$

$$a_{-1,0} = a_1$$

$$a_{-1,1} = \frac{b_1}{h}$$

$$b_{-1} = g_1.$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_0$ ,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{4}{h^2}p\left(-\frac{h}{4}\right)\right)U_{-1} + \left(\frac{4}{h^2}\left(p\left(-\frac{h}{4}\right) + p\left(\frac{h}{4}\right)\right) + r(0)\right)U_0 \\ + \left(-\frac{4}{h^2}p\left(\frac{h}{4}\right)\right)U_1 = f(0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

de donde se definen,

$$a_{0,-1} = -\frac{4}{h^2}p\left(-\frac{h}{4}\right)$$

$$a_{0,0} = \frac{4}{h^2}\left(p\left(-\frac{h}{4}\right) + p\left(\frac{h}{4}\right)\right) + r(0)$$

$$a_{0,1} = -\frac{4}{h^2}p\left(\frac{h}{4}\right)$$

$$b_0 = f(0).$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_1$ ,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{8}{3h^2}p\left(\frac{h}{4}\right)\right)U_0 + \left(\frac{4}{3h^2}\left(2p\left(\frac{h}{4}\right) + p(h)\right) + r\left(\frac{h}{2}\right)\right)U_1 \\ + \left(-\frac{4p(h)}{3h^2}\right)U_2 = f\left(\frac{h}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

de donde se definen,

$$\begin{aligned}
a_{1,-1} &= 0 \\
a_{1,0} &= -\frac{8}{3h^2}p\left(\frac{h}{4}\right) \\
a_{1,1} &= \frac{4}{3h^2}\left(2p\left(\frac{h}{4}\right) + p(h)\right) + r\left(\frac{h}{2}\right) \\
a_{1,2} &= -\frac{4p(h)}{3h^2} \\
b_1 &= f\left(\frac{h}{2}\right).
\end{aligned}$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_k$  con  $k = 2, \dots, n-1$ ,

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{p((k-1)h)}{h^2}\right)U_{k-1} + \left(\frac{1}{h^2}(p(kh) + p((k-1)h)) + r\left(\left(\frac{2k-1}{2}\right)h\right)\right)U_k \\
+ \left(-\frac{p(kh)}{h^2}\right)U_{k+1} = f\left(\frac{(2k-1)h}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

de donde se definen,

$$\begin{aligned}
a_{k,k-1} &= -\frac{p((k-1)h)}{h^2} \\
a_{k,k} &= \frac{1}{h^2}(p(kh) + p((k-1)h)) + r\left(\left(\frac{2k-1}{2}\right)h\right) \\
a_{k,k+1} &= -\frac{p(kh)}{h^2} \\
b_k &= f\left(\frac{(2k-1)h}{2}\right).
\end{aligned}$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_n$ ,

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{4p(1-h)}{3h^2}\right)U_{n-1} + \left(\frac{4}{3h^2}\left(p(1-h) + 2p\left(1-\frac{h}{4}\right)\right) + r\left(1-\frac{h}{2}\right)\right)U_n \\
+ \left(-\frac{8}{3h^2}p\left(1-\frac{h}{4}\right)\right)U_{n+1} = f\left(1-\frac{h}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

de donde se definen,

$$\begin{aligned}
a_{n,n-1} &= -\frac{4p(1-h)}{3h^2} \\
a_{n,n} &= \frac{4}{3h^2}(p(1-h) + 2p\left(1 - \frac{h}{4}\right)) + r\left(1 - \frac{h}{2}\right) \\
a_{n,n+1} &= -\frac{8}{3h^2}p\left(1 - \frac{h}{4}\right) \\
a_{n,n+2} &= 0 \\
b_n &= f\left(1 - \frac{h}{2}\right).
\end{aligned}$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_{n+1}$ ,

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{4}{h^2}p\left(1 - \frac{h}{4}\right)\right)U_n + \left(\frac{4}{h^2}\left(p\left(1 - \frac{h}{4}\right) + p\left(1 + \frac{h}{4}\right)\right) + r(1)\right)U_{n+1} \\
+ \left(-\frac{4}{h^2}p\left(1 + \frac{h}{4}\right)\right)U_{n+2} = f(1)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

de donde se definen,

$$\begin{aligned}
a_{n+1,n} &= -\frac{4}{h^2}p\left(1 - \frac{h}{4}\right) \\
a_{n+1,n+1} &= \frac{4}{h^2}\left(p\left(1 - \frac{h}{4}\right) + p\left(1 + \frac{h}{4}\right)\right) + r(1) \\
a_{n+1,n+2} &= -\frac{4}{h^2}p\left(1 + \frac{h}{4}\right) \\
b_{n+1} &= f(1).
\end{aligned}$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo imaginario  $x_{n+2}$ ,

$$-\frac{b_2}{h}U_n + a_2U_{n+1} + \frac{b_2}{h}U_{n+2} = g_2 \tag{3.7}$$

de donde se definen,

$$a_{n+2,n} = -\frac{b_2}{h}$$

$$\begin{aligned}
a_{n+2,n+1} &= a_2 \\
a_{n+2,n+2} &= \frac{b_2}{h} \\
b_{n+2} &= g_2.
\end{aligned}$$

Luego de haber obtenido los coeficientes  $a_{ij}$  y  $b_j$  con  $i, j = -1, \dots, n+2$  se forma un sistema de ecuaciones donde los  $c_i$  son las constantes a determinar. La descripción del sistema de ecuaciones está dado por:

$$Ac = B$$

donde  $A$  es una matriz de orden  $n+4 \times n+4$ ,  $B$  un vector de orden  $n+4 \times 1$  y  $c$  de orden  $n+4 \times 1$  el vector a buscar. Esto es,

$$\begin{bmatrix}
a_{-1,-1} & a_{-1,0} & a_{-1,1} & 0 & \dots & 0 \\
a_{0,-1} & a_{00} & a_{01} & 0 & \dots & 0 \\
0 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & a_{i,i-1} & a_{ii} & a_{i,i+1} & \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots \\
0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} & a_{n,n+1} & 0 \\
0 & \dots & 0 & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & a_{n+1,n+1} \\
0 & \dots & 0 & a_{n+2,n} & a_{n+2,n+1} & a_{n+2,n+2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
c_{-1} \\
c_0 \\
c_1 \\
\vdots \\
c_i \\
\vdots \\
c_n \\
c_{n+1} \\
c_{n+2}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_{-1} \\
b_0 \\
b_1 \\
\vdots \\
b_i \\
\vdots \\
b_n \\
b_{n+1} \\
b_{n+2}
\end{bmatrix} \quad (3.8)$$

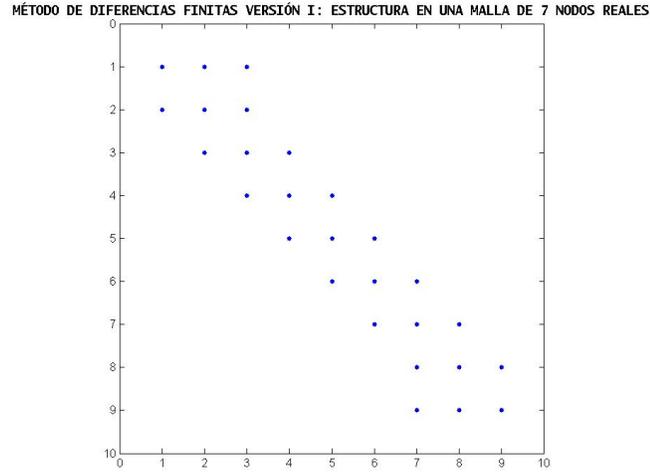


Figura 3.2: Estructura de la matriz  $A$  en una malla de 7 nodos reales aplicando el método de diferencias finitas versión I.

En la figura 3.2 se observa la estructura de la matriz  $A$  en malla de 7 nodos reales donde cada coeficiente se encuentra simbolizado de color azul. En esta estructura de 7 nodos se presentan 9 ecuaciones debido a que la primera y última discretización de la ecuación diferencial corresponde a los nodos fantasmas o imaginarios  $x_{-1}$  (centrada en  $x_0$ ),  $x_7$  (centrada en  $x_6$ ) y la  $k$ -ésima fila corresponde a la discretización de la ecuación diferencial centrada en el nodo  $x_k$  con  $k = 0, \dots, 6$ . Se considera tal cantidad nodos para comparar contra el método mimético que necesita al menos 7 nodos en su formulación.

### 3.2.2 Método de diferencias finitas versión II

En esta subsección se describirán las ecuaciones aplicando el método de diferencias finitas versión II correspondiente a cada nodo dentro de la malla escalonada.

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo imaginario  $x_{-1}$ ,

$$-\frac{b_1}{h}U_{-1} + a_1U_0 + \frac{b_1}{h}U_1 = g_1 \quad (3.9)$$

de donde se definen,

$$a_{-1,-1} = -\frac{b_1}{h}$$

$$a_{-1,0} = a_1$$

$$a_{-1,1} = \frac{b_1}{h}$$

$$b_{-1} = g_1.$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_0$ ,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{4}{h^2}p\left(-\frac{h}{4}\right)\right)U_{-1} + \left(\frac{4}{h^2}\left(p\left(-\frac{h}{4}\right) + p\left(\frac{h}{4}\right)\right) + r(0)\right)U_0 \\ + \left(-\frac{4}{h^2}p\left(\frac{h}{4}\right)\right)U_1 = f(0) \end{aligned} \quad (3.10)$$

de donde se definen,

$$a_{0,-1} = -\frac{4}{h^2}p\left(-\frac{h}{4}\right)$$

$$a_{0,0} = \frac{4}{h^2}\left(p\left(-\frac{h}{4}\right) + p\left(\frac{h}{4}\right)\right) + r(0)$$

$$a_{0,1} = -\frac{4}{h^2}p\left(\frac{h}{4}\right)$$

$$b_0 = f(0).$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_1$ ,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{p(0)}{h^2}\right) U_{-1} + \left(\frac{1}{h^2} (p(h) + p(0)) + r \left(\frac{h}{2}\right)\right) U_1 \\ + \left(-\frac{p(h)}{h^2}\right) U_2 = f \left(\frac{h}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

de donde se definen,

$$\begin{aligned} a_{1,-1} &= -\frac{p(0)}{h^2} \\ a_{1,0} &= 0 \\ a_{1,1} &= \frac{1}{h^2} (p(h) + p(0)) + r \left(\frac{h}{2}\right) \\ a_{1,2} &= -\frac{p(h)}{h^2} \\ b_1 &= f \left(\frac{h}{2}\right). \end{aligned}$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_k$  con  $k = 2, \dots, n-1$ ,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{p((k-1)h)}{h^2}\right) U_{k-1} + \left(\frac{1}{h^2} (p(kh) + p((k-1)h)) + r \left(\left(\frac{2k-1}{2}\right) h\right)\right) U_k \\ + \left(-\frac{p(kh)}{h^2}\right) U_{k+1} = f \left(\frac{(2k-1)h}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

de donde se definen,

$$\begin{aligned} a_{k,k-1} &= -\frac{p((k-1)h)}{h^2} \\ a_{k,k} &= \frac{1}{h^2} (p(kh) + p((k-1)h)) + r \left(\left(\frac{2k-1}{2}\right) h\right) \\ a_{k,k+1} &= -\frac{p(kh)}{h^2} \\ b_k &= f \left(\frac{(2k-1)h}{2}\right). \end{aligned}$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_n$ ,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{p(1-h)}{h^2}\right) U_{n-1} + \left(\frac{1}{h^2}(p(1) + p(1-h)) + r\left(1 - \frac{h}{2}\right)\right) U_n \\ + \left(-\frac{p(1)}{h^2}\right) U_{n+2} = f\left(1 - \frac{h}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

de donde se definen,

$$\begin{aligned} a_{n,n-1} &= -\frac{p(1-h)}{h^2} \\ a_{n,n} &= \frac{1}{h^2}(p(1) + p(1-h)) + r\left(1 - \frac{h}{2}\right) \\ a_{n,n+1} &= 0 \\ a_{n,n+2} &= -\frac{p(1)}{h^2} \\ b_n &= f\left(1 - \frac{h}{2}\right). \end{aligned}$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{4}{h^2}p\left(1 - \frac{h}{4}\right)\right) U_n + \left(\frac{4}{h^2}\left(p\left(1 - \frac{h}{4}\right) + p\left(1 + \frac{h}{4}\right)\right) + r(1)\right) U_{n+1} \\ + \left(-\frac{4}{h^2}p\left(1 + \frac{h}{4}\right)\right) U_{n+2} = f(1) \end{aligned} \quad (3.14)$$

de donde se definen,

$$\begin{aligned} a_{n+1,n} &= -\frac{4}{h^2}p\left(1 - \frac{h}{4}\right) \\ a_{n+1,n+1} &= \frac{4}{h^2}\left(p\left(1 - \frac{h}{4}\right) + p\left(1 + \frac{h}{4}\right)\right) + r(1) \\ a_{n+1,n+2} &= -\frac{4}{h^2}p\left(1 + \frac{h}{4}\right) \\ b_{n+1} &= f(1). \end{aligned}$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo imaginario  $x_{n+2}$ ,

$$-\frac{b_2}{h}U_n + a_2U_{n+1} + \frac{b_2}{h}U_{n+2} = g_2 \quad (3.15)$$

de donde se definen,

$$a_{n+2,n} = -\frac{b_2}{h}$$

$$a_{n+2,n+1} = a_2$$

$$a_{n+2,n+2} = \frac{b_2}{h}$$

$$b_{n+2} = g_2.$$

Luego de haber obtenido los coeficientes  $a_{ij}$  y  $b_j$  con  $i, j = -1, \dots, n+2$  se forma un sistema de ecuaciones donde los  $c_i$  son las constantes a determinar. La descripción del sistema de ecuaciones está dado por,

$$Ac = B$$

donde  $A$  es una matriz de orden  $n+4 \times n+4$ ,  $B$  un vector de orden  $n+4 \times 1$  y  $c$  de orden  $n+4 \times 1$  el vector a buscar. Esto es,

$$\begin{bmatrix} a_{-1,-1} & a_{-1,0} & a_{-1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{0,-1} & a_{00} & a_{01} & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,-1} & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & 0 \\ 0 & & & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & a_{i,i-1} & a_{ii} & a_{i,i+1} & \vdots \\ 0 & \dots & & & & 0 \\ 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} & 0 & a_{n,n+2} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & a_{n+1,n+1} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n+2,n} & a_{n+2,n+1} & a_{n+2,n+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \\ c_{n+1} \\ c_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{-1} \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \\ b_{n+2} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

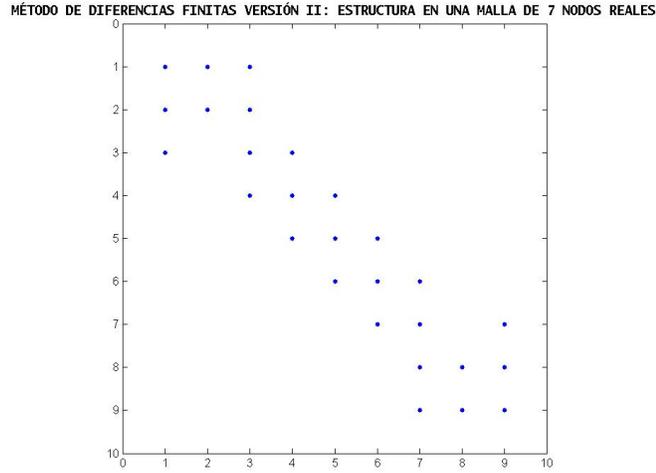


Figura 3.3: Estructura de la matriz  $A$  en una malla de 7 nodos aplicando el método de diferencias finitas versión II.

En la figura 3.3 se observa la estructura de la matriz  $A$  en una malla de 7 nodos reales donde cada coeficiente se encuentra simbolizado de color azul. En esta estructura de 7 nodos se presentan 9 ecuaciones debido a que la primera y última discretización de la ecuación diferencial corresponde a los nodos fantasmas o imaginarios  $x_{-1}$  (centrada en  $x_0$ ),  $x_7$  (centrada en  $x_6$ ) y la  $k$ -ésima fila corresponde a la discretización de la ecuación diferencial centrada en el nodo  $x_k$  con  $k = 0, \dots, 6$ . En la tercera ecuación correspondiente a  $x_1$  aparece un blanco o cero ya que la discretización de la ecuación emplea los nodos  $x_2$  y el nodo imaginario  $x_{-1}$ . Análogamente por simetría, la antepenúltima ecuación correspondiente a  $x_5$  posee un cero debido a que utiliza los nodos  $x_4$  y el nodo imaginario  $x_7$  para su discretización.

### 3.3 Método mimético

En esta sección se describirán las ecuaciones aplicando el método mimético correspondiente a cada nodo dentro de la malla escalonada. Para más información ver referencias [2, 3, 4, 5, 6, 7].

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_0$ ,

$$\left(a_1 + \frac{8b_1}{3h}\right) U_0 + \left(-\frac{3b_1}{h}\right) U_1 + \left(\frac{b_1}{3h}\right) U_2 = g_1 \quad (3.17)$$

de donde se definen,

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= a_1 + \frac{8b_1}{3h} \\ a_{0,1} &= -\frac{3b_1}{h} \\ a_{0,2} &= \frac{b_1}{3h} \\ b_0 &= g_1. \end{aligned}$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_1$ ,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{p(0)}{3h} - \frac{8p(0)}{3h^2}\right) U_0 \\ &+ \left(\left(\frac{3}{h^2} - \frac{3}{8h}\right)p(0) + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{8h}\right)p(h) + r\left(\frac{h}{2}\right)\right) U_1 \\ &+ \left(\left(\frac{1}{24h} - \frac{1}{3h^2}\right)p(0) + \left(\frac{1}{8h} - \frac{1}{h^2}\right)p(h)\right) U_2 = f\left(\frac{h}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

de donde se definen,

$$\begin{aligned} a_{1,0} &= \frac{p(0)}{3h} - \frac{8p(0)}{3h^2} \\ a_{1,1} &= \left(\frac{3}{h^2} - \frac{3}{8h}\right)p(0) + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{8h}\right)p(h) + r\left(\frac{h}{2}\right) \\ a_{1,2} &= \left(\frac{1}{24h} - \frac{1}{3h^2}\right)p(0) + \left(\frac{1}{8h} - \frac{1}{h^2}\right)p(h) \end{aligned}$$

$$b_1 = f\left(\frac{h}{2}\right).$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_2$ ,

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{p(0)}{3h}\right) U_0 + \left(\frac{3p(0)}{8h} + \left(\frac{1}{8h} - \frac{1}{h^2}\right) p(h)\right) U_1 \\ & + \left(-\frac{p(0)}{24h} + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{8h}\right) p(h) + \frac{p(2h)}{h^2} + r\left(\frac{3h}{2}\right)\right) U_2 \\ & + \left(-\frac{p(2h)}{h^2}\right) U_3 = f\left(\frac{3h}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

de donde se definen,

$$\begin{aligned} a_{2,0} &= -\frac{p(0)}{3h} \\ a_{2,1} &= \frac{3p(0)}{8h} + \left(\frac{1}{8h} - \frac{1}{h^2}\right) p(h) \\ a_{2,2} &= -\frac{p(0)}{24h} + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{8h}\right) p(h) + \frac{p(2h)}{h^2} + r\left(\frac{3h}{2}\right) \\ a_{2,3} &= -\frac{p(2h)}{h^2} \\ b_2 &= f\left(\frac{3h}{2}\right). \end{aligned}$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_k$  con  $k = 3, \dots, n-2$ ,

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{p((k-1)h)}{h^2}\right) U_{k-1} + \left(\frac{p((k-1)h)}{h^2} + \frac{p(kh)}{h^2} + r\left(\frac{(2k-1)h}{2}\right)\right) U_k \\ & + \left(-\frac{p(kh)}{h^2}\right) U_{k+1} = f\left(\frac{(2k-1)h}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

de donde se definen,

$$\begin{aligned} a_{k,k-1} &= -\frac{p((k-1)h)}{h^2} \\ a_{k,k} &= \frac{p((k-1)h)}{h^2} + \frac{p(kh)}{h^2} + r\left(\frac{(2k-1)h}{2}\right) \end{aligned}$$

$$a_{k,k+1} = -\frac{p(kh)}{h^2}$$

$$b_k = f\left(\frac{(2k-1)h}{2}\right).$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_{n-1}$ ,

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{p(1-2h)}{h^2}\right) U_{n-2} + \left(\frac{p(1-2h)}{h^2} - \frac{p(1)}{24h}\right. \\ & + \left.\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{8h}\right)p(1-h) + r\left(1 - \frac{3h}{2}\right)\right) U_{n-1} \\ & + \left(\frac{3p(1)}{8h} + \left(\frac{1}{8h} - \frac{1}{h^2}\right)p(1-h)\right) U_n \\ & + \left(-\frac{p(1)}{3h}\right) U_{n+1} = f\left(1 - \frac{3h}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

de donde se definen,

$$\begin{aligned} a_{n-1,n-2} &= -\frac{p(1-2h)}{h^2} \\ a_{n-1,n-1} &= \frac{p(1-2h)}{h^2} - \frac{p(1)}{24h} + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{8h}\right)p(1-h) + r\left(1 - \frac{3h}{2}\right) \\ a_{n-1,n} &= \frac{3p(1)}{8h} + \left(\frac{1}{8h} - \frac{1}{h^2}\right)p(1-h) \\ a_{n-1,n+1} &= -\frac{p(1)}{3h} \\ b_{n-1} &= f\left(1 - \frac{3h}{2}\right). \end{aligned}$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_n$ ,

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{1}{24h} - \frac{1}{3h^2}\right)p(1) + \left(\frac{1}{8h} - \frac{1}{h^2}\right)p(1-h)\right) U_{n-1} \\ & + \left(\left(\frac{3}{h^2} - \frac{3}{8h}\right)p(1) + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{8h}\right)p(1-h) + r\left(1 - \frac{h}{2}\right)\right) U_n \\ & + \left(\left(\frac{1}{3h} - \frac{8}{3h^2}\right)p(1)\right) U_{n+1} = f\left(1 - \frac{h}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

de donde se definen,

$$\begin{aligned}
 a_{n,n-1} &= \left( \frac{1}{24h} - \frac{1}{3h^2} \right) p(1) + \left( \frac{1}{8h} - \frac{1}{h^2} \right) p(1-h) \\
 a_{n,n} &= \left( \frac{3}{h^2} - \frac{3}{8h} \right) p(1) + \left( \frac{1}{h^2} - \frac{1}{8h} \right) p(1-h) + r \left( 1 - \frac{h}{2} \right) \\
 a_{n,n+1} &= \left( \frac{1}{3h} - \frac{8}{3h^2} \right) p(1) \\
 b_n &= f \left( 1 - \frac{h}{2} \right).
 \end{aligned}$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_{n+1}$ ,

$$\left( \frac{b_2}{3h} \right) U_{n-1} + \left( -\frac{3b_2}{h} \right) U_n + \left( a_2 + \frac{8b_2}{3h} \right) U_{n+1} = g_2 \quad (3.23)$$

de donde se definen,

$$\begin{aligned}
 a_{n+1,n-1} &= \frac{b_2}{3h} \\
 a_{n+1,n} &= -\frac{3b_2}{h} \\
 a_{n+1,n+1} &= a_2 + \frac{8b_2}{3h} \\
 b_{n+1} &= g_2.
 \end{aligned}$$

Luego de haber obtenido los coeficientes  $a_{ij}$  y  $b_j$  con  $i, j = 0, \dots, n+1$  se forma un sistema de ecuaciones donde los  $c_i$  son las constantes a determinar. La descripción del sistema de ecuaciones está dado por:

$$Ac = B$$

donde  $A$  es una matriz de orden  $n + 2 \times n + 2$ ,  $B$  un vector de orden  $n + 2 \times 1$  y  $c$  de orden  $n + 2 \times 1$  el vector a buscar. Esto es,

$$\begin{bmatrix}
 a_{00} & a_{01} & a_{02} & 0 & \dots & & 0 \\
 a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & & 0 \\
 a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 0 & \dots & a_{i,i-1} & a_{ii} & a_{i,i+1} & \dots & 0 \\
 \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & a_{n-1,n+1} \\
 0 & & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} & a_{n,n+1} \\
 0 & & \dots & 0 & a_{n+1,n-1} & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 c_0 \\
 c_1 \\
 c_2 \\
 \vdots \\
 c_i \\
 \vdots \\
 c_{n-1} \\
 c_n \\
 c_{n+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 b_0 \\
 b_1 \\
 b_2 \\
 \vdots \\
 b_i \\
 \vdots \\
 b_{n-1} \\
 b_n \\
 b_{n+1}
 \end{bmatrix}
 \quad (3.24)$$

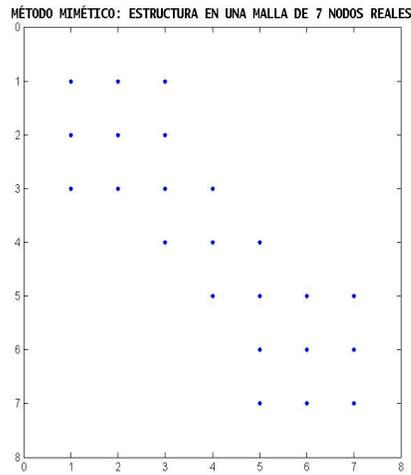


Figura 3.4: Estructura de la matriz  $A$  en una malla de 7 nodos reales aplicando el método mimético.

En la figura 3.4 se observa la estructura de la matriz  $A$  en una malla de 7 nodos reales aplicando el método mimético donde cada coeficiente se encuentra simbolizado de color azul. La primera y última fila corresponde a los coeficientes que discretizan la ecuación diferencial de los bordes correspondiente a los nodos  $x_0$  y  $x_6$  mientras que la  $k$ -ésima fila corresponde a la discretización de la ecuación diferencial en el nodo  $x_k$  con  $k = 1, \dots, 5$ . Esta matriz es estructuralmente simétrica.

# Capítulo 4

## Estudio comparativo

### 4.1 Introducción

En este capítulo se presentan y analizan comparativamente los resultados numéricos obtenidos por los métodos propuestos (método de diferencias finitas versión I (DF VI), método de diferencias finitas versión II (DF VII), método mimético (MIM), método de Rayleigh-Ritz usando la cuadratura del punto medio (RR(PM)) y la cuadratura de Simpson (RR(S))) aplicados al problema de contorno del tipo (1.1), en algunos de ellos no se observan todas las condiciones impuestas sobre los coeficientes de la ecuación diferencial. Para el análisis se usan las normas del máximo,  $\|\cdot\|_\infty$  y la norma  $L_2$  definidas por,

$$\|e\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq n+1} |Y_i - y_i|, \quad \|e\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n+1} \Delta x_i |Y_i - y_i|^2} \quad (4.1)$$

donde  $Y_i$  representa la solución numérica en el nodo  $x_i$  y  $y_i$  la solución analítica.

## 4.2 Test No. I

Se resuelve numéricamente el siguiente problema de contorno obtenido de [14],

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = -\frac{\lambda e^{\lambda x}}{e^{\lambda} - 1} \\ -e^{\lambda} y(0) - \left( \frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda} \right) \frac{dy(0)}{dx} = -1 \\ -e^{\lambda} y(1) + \left( \frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda} \right) \frac{dy(1)}{dx} = 0. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

donde  $\lambda = -1$ .

La solución analítica de (4.2) está dada por,

$$y(x) = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda(e^{\lambda} - 1)} - \frac{(\lambda - 1)x}{\lambda e^{\lambda} - 2e^{\lambda} + 2} + \frac{e^{2\lambda}(\lambda^2 - 3\lambda + 3) + e^{\lambda}(-\lambda^2 + 3\lambda - 4) + 1 - \lambda}{\lambda e^{\lambda}(\lambda e^{\lambda} - 2e^{\lambda} + 2)(e^{\lambda} - 1)} \quad (4.3)$$

En la tabla 4.1 se muestran los errores numéricos del problema de contorno (4.2) aplicando los diferentes métodos propuestos usando la norma del máximo  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Se observa que todas las aproximaciones son buenas pues poseen cinco o más órdenes de exactitud cuando la malla posee un refinamiento de 102 nodos reales con excepción del método de Rayleigh-Ritz con la cuadratura de Simpson el cual posee 11 órdenes de exactitud siendo la mejor aproximación. Para los demás métodos mientras más refinada se encuentre la malla escalonada menor será el error numérico. Haciendo referencia a las tasas de convergencia todas se aproximan al orden cuadrático, a excepción del método de Rayleigh-Ritz con cuadratura de Simpson cuya tasa es cuártica.

Cuadro 4.1: *Test No. I: Errores numéricos usando la norma  $\|\cdot\|_\infty$ .*

h	DF VI	DF VII	MIM	RR (PM)	RR (S)
0.100	$1,7773 \cdot 10^{-3}$	$6,2797 \cdot 10^{-4}$	$6,4528 \cdot 10^{-4}$	$8,8849 \cdot 10^{-4}$	$1,1640 \cdot 10^{-7}$
0.040	$2,9985 \cdot 10^{-4}$	$1,0044 \cdot 10^{-4}$	$1,0191 \cdot 10^{-4}$	$1,4992 \cdot 10^{-4}$	$3,1845 \cdot 10^{-9}$
0.020	$7,6267 \cdot 10^{-5}$	$2,5109 \cdot 10^{-5}$	$2,5308 \cdot 10^{-5}$	$3,8133 \cdot 10^{-5}$	$2,0333 \cdot 10^{-10}$
0.013	$3,4090 \cdot 10^{-5}$	$1,1160 \cdot 10^{-5}$	$1,1220 \cdot 10^{-5}$	$1,7045 \cdot 10^{-5}$	$4,0494 \cdot 10^{-11}$
0.010	$1,9230 \cdot 10^{-5}$	$6,2773 \cdot 10^{-6}$	$6,3030 \cdot 10^{-6}$	$9,6152 \cdot 10^{-6}$	$1,2861 \cdot 10^{-11}$
Tasa	1.9531	2.0004	2.0301	1.9529	3.9373

En la tabla 4.2 se muestran los errores numéricos del problema de contorno (4.2) aplicando los diferentes métodos propuestos usando la norma  $L_2$ . En la tabla se observa que todas las aproximaciones son buenas pues poseen cinco o más órdenes de exactitud cuando la malla posee un refinamiento de 102 nodos reales con excepción del método de Rayleigh-Ritz con la cuadratura de Simpson el cual posee 12 órdenes de exactitud siendo la mejor aproximación. Haciendo referencia a las tasas de convergencia todas se aproximan al orden cuadrático, a excepción del método de Rayleigh-Ritz con cuadratura de Simpson cuya tasa es cuártica. Comparando estos resultados con los obtenidos usando la norma del máximo se observa una mejor aproximación en cada uno de los errores numéricos.

Cuadro 4.2: *Test No. I: Errores numéricos usando la norma  $L_2$ .*

h	DF VI	DF VII	MIM	RR (PM)	RR (S)
0.100	$9,7638 \cdot 10^{-4}$	$3,2911 \cdot 10^{-4}$	$2,6841 \cdot 10^{-4}$	$4,8810 \cdot 10^{-4}$	$6,4100 \cdot 10^{-8}$
0.040	$1,6344 \cdot 10^{-4}$	$5,2571 \cdot 10^{-5}$	$4,6874 \cdot 10^{-5}$	$8,1718 \cdot 10^{-5}$	$1,7147 \cdot 10^{-9}$
0.020	$4,1489 \cdot 10^{-5}$	$1,3139 \cdot 10^{-5}$	$1,2356 \cdot 10^{-5}$	$2,0744 \cdot 10^{-5}$	$1,0877 \cdot 10^{-10}$
0.013	$1,8534 \cdot 10^{-5}$	$5,8394 \cdot 10^{-6}$	$5,6005 \cdot 10^{-6}$	$9,2670 \cdot 10^{-6}$	$2,1613 \cdot 10^{-11}$
0.010	$1,0452 \cdot 10^{-5}$	$3,2846 \cdot 10^{-6}$	$3,1824 \cdot 10^{-6}$	$5,2261 \cdot 10^{-6}$	$6,8557 \cdot 10^{-12}$
Tasa	1.9610	2.0017	1.9940	1.9608	3.9595

En la figura 4.1 se muestra los errores alcanzados del problema de contorno (4.2), a la izquierda medidos a partir de la norma del máximo y, a la derecha, usando norma  $L_2$ . En la gráfica, las pendientes de las rectas definen el orden de convergencia de los métodos y mientras más abajo se encuentre, mejor será el esquema que represente. El método de Rayleigh-Ritz usando la cuadratura de Simpson representa el mejor esquema, seguidamente se observa que el método mimético y el de diferencias finitas versión II poseen una velocidad de convergencia muy similar siendo los que poseen una tasa más alta. Luego sigue el método de Rayleigh-Ritz con la cuadratura del punto medio y, por último, el método de diferencias finitas versión I es el peor esquema en comparación con el resto, esto se evidencia en los errores con norma máximo y norma  $L_2$ .

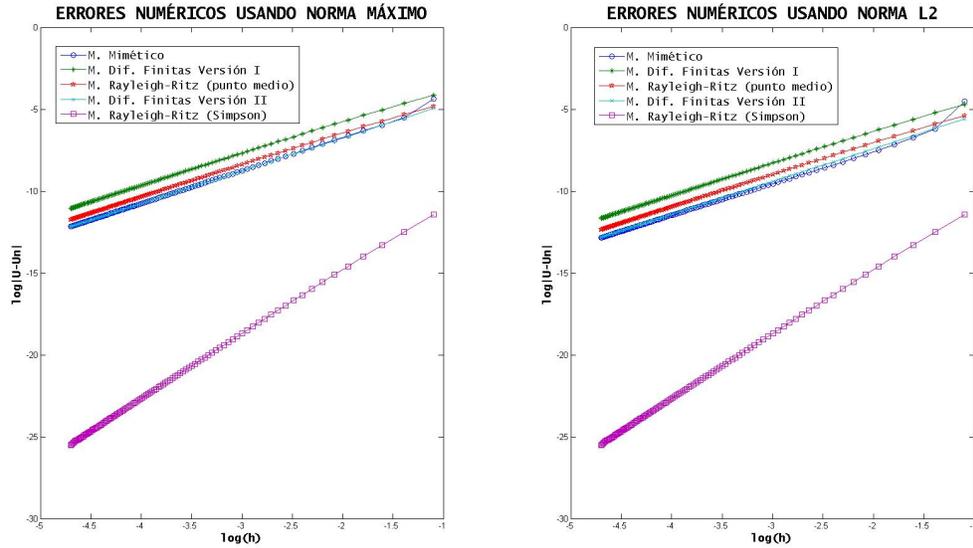


Figura 4.1: *Test No I: Errores numéricos en norma del máximo  $\|\cdot\|_\infty$  (izquierda) y norma  $L_2$  (derecha).*

### 4.3 Test No. II

Se resuelve numéricamente el siguiente problema de contorno obtenido de [12],

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( K(x) \frac{dy}{dx} \right) = f(x) \\ y(0) - \frac{dy(0)}{dx} = -2\pi \\ y(1) + \frac{dy(1)}{dx} = 2\pi. \end{cases} \quad (4.4)$$

donde  $K(x) = x^4 + 1$  y  $f(x) = -4x^3 2\pi \cos(2\pi x) + (x^4 + 1)4\pi^2 \sin(2\pi x)$ .

La solución analítica de (4.4) está dada por,

$$y(x) = \sin(2\pi x). \quad (4.5)$$

En la tabla 4.3 se muestran los errores numéricos del problema de contorno (4.4) aplicando los diferentes métodos propuestos usando la norma del máximo  $\|\cdot\|_\infty$ . En la tabla se observa como mejor método el Rayleigh-Ritz con la cuadratura de Simpson cuando la malla posee un refinamiento de 102 nodos reales. Mientras más refinada se encuentre la malla escalonada menor será el error numérico indistíntamente del método. Haciendo referencia a las tasas de convergencia todas se aproximan al orden cuadrático, siendo la de mayor orden la obtenida utilizando el método mimético.

Cuadro 4.3: *Test No. II: Errores numéricos usando la norma  $\|\cdot\|_\infty$ .*

h	DF VI	DF VII	MIM	RR (PM)	RR (S)
0.100	$7,7041 \cdot 10^{-2}$	$5,7651 \cdot 10^{-2}$	$5,7396 \cdot 10^{-2}$	$2,3919 \cdot 10^{-2}$	$8,7088 \cdot 10^{-3}$
0.040	$3,6420 \cdot 10^{-2}$	$9,3002 \cdot 10^{-3}$	$9,6968 \cdot 10^{-3}$	$5,4436 \cdot 10^{-3}$	$1,4169 \cdot 10^{-3}$
0.020	$3,4976 \cdot 10^{-3}$	$2,3275 \cdot 10^{-3}$	$2,5021 \cdot 10^{-3}$	$1,5204 \cdot 10^{-3}$	$3,5477 \cdot 10^{-4}$
0.013	$1,5662 \cdot 10^{-3}$	$1,0346 \cdot 10^{-3}$	$1,1230 \cdot 10^{-3}$	$6,9958 \cdot 10^{-4}$	$1,5786 \cdot 10^{-4}$
0.010	$8,8421 \cdot 10^{-4}$	$5,8199 \cdot 10^{-4}$	$6,3471 \cdot 10^{-4}$	$4,0026 \cdot 10^{-4}$	$8,8796 \cdot 10^{-5}$
Tasa	1.7400	2.0043	2.0082	1.7531	1.9708

En la tabla 4.4 se muestran los errores numéricos del problema de contorno (4.4) aplicando los diferentes métodos propuestos usando la norma  $L_2$ . Se observa que el mejor error numérico es de orden cinco alcanzado por el método de Rayleigh-Ritz con la cuadratura de Simpson cuando la malla posee un refinamiento de 102 nodos reales. Otra característica que se presenta es que mientras más refinada se encuentre la malla escalonada menor será el error numérico indistíntamente del método usado.

Haciendo referencia a las tasas de convergencia, se aproximan al orden cuadrático, siendo la de mayor orden la obtenida por el método mimético.

Cuadro 4.4: *Test No. II: Errores numéricos usando la norma  $L_2$ .*

h	DF VI	DF VII	MIM	RR (PM)	RR (S)
0.100	$3,9018 \cdot 10^{-2}$	$4,1622 \cdot 10^{-2}$	$4,0684 \cdot 10^{-2}$	$1,9009 \cdot 10^{-2}$	$6,2197 \cdot 10^{-3}$
0.040	$6,3321 \cdot 10^{-3}$	$6,5393 \cdot 10^{-3}$	$6,7221 \cdot 10^{-3}$	$4,1562 \cdot 10^{-3}$	$1,0147 \cdot 10^{-3}$
0.020	$1,5720 \cdot 10^{-3}$	$1,6272 \cdot 10^{-3}$	$1,7103 \cdot 10^{-3}$	$1,1348 \cdot 10^{-3}$	$2,5438 \cdot 10^{-4}$
0.013	$6,9622 \cdot 10^{-4}$	$7,2217 \cdot 10^{-4}$	$7,6493 \cdot 10^{-4}$	$5,1866 \cdot 10^{-4}$	$1,1312 \cdot 10^{-4}$
0.010	$3,9085 \cdot 10^{-4}$	$4,0595 \cdot 10^{-4}$	$4,3166 \cdot 10^{-4}$	$2,9578 \cdot 10^{-4}$	$6,3640 \cdot 10^{-5}$
Tasa	1.7522	2.0094	2.0131	1.7444	1.9715

En la figura 4.2 se muestra los errores alcanzados del problema de contorno (4.4), a la izquierda medidos a partir de la norma del máximo y, a la derecha, usando norma  $L_2$ . En la gráfica, las pendientes de las rectas definen el orden de convergencia de los métodos y mientras más abajo se encuentre, mejor será el esquema que represente. El método de Rayleigh-Ritz usando la cuadratura de Simpson representa el mejor esquema, seguido del método de Rayleigh-Ritz con cuadratura del punto medio. Por último, se observa que el método mimético, diferencias finitas versión I y versión II poseen una velocidad de convergencia muy similar siendo los que poseen las tasas de convergencia más altas.

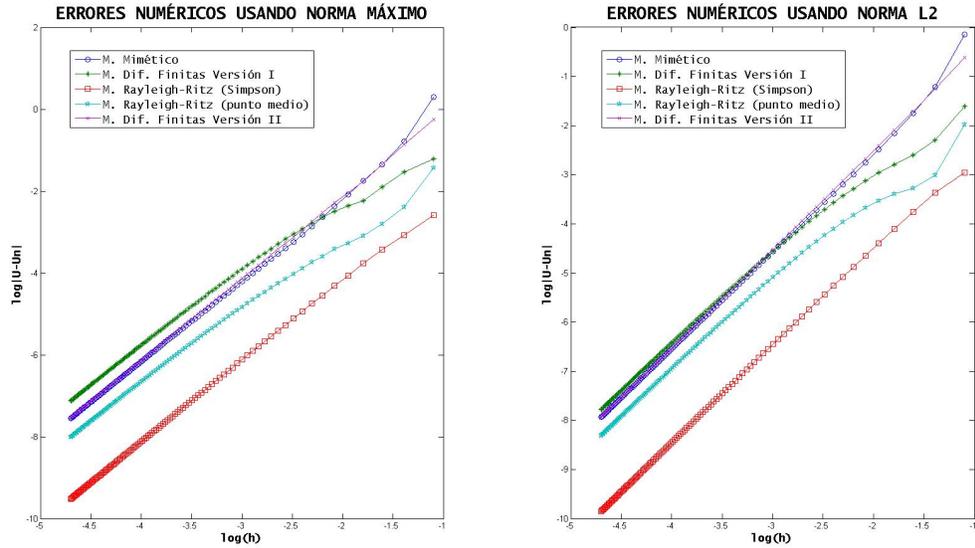


Figura 4.2: *Test No II: Errores numéricos en norma del máximo  $\|\cdot\|_\infty$  (izquierda) y norma  $L_2$  (derecha).*

## 4.4 Test No. III

Se resuelve numéricamente el siguiente problema de contorno obtenido de [13],

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \lambda(\lambda - 1)((1 - x)^{\lambda-2} - x^{\lambda-2}) \\ y(0) + (\lambda + 1) \frac{dy(0)}{dx} = 1 - \lambda - \lambda^2 \\ y(1) - (\lambda + 1) \frac{dy(1)}{dx} = -1 + \lambda + \lambda^2. \end{cases} \quad (4.6)$$

donde  $\lambda = 25$ .

La solución analítica de (4.6) está dada por,

$$y(x) = (1 - x)^\lambda - x^\lambda. \quad (4.7)$$

En la tabla 4.5 se muestran los errores numéricos del problema de contorno (4.6) aplicando los diferentes métodos propuestos usando la norma del máximo  $\|\cdot\|_\infty$ . En la tabla se observa que todos los resultados numéricos poseen 2 ordenes de exactitud con una malla de 102 nodos reales a excepción del método de Rayleigh-Ritz con la cuadratura de Simpson el cual presenta 12 órdenes de exactitud, siendo el mejor método. También es de notar que el método mimético, el método de diferencias finitas versión II y el método de Rayleigh-Ritz con cuadratura del punto medio presenta errores numéricos muy aproximados. Otra característica que se presenta es que mientras más refinada se encuentre la malla escalonada menor será el error numérico indistintamente del método usado. Haciendo referencia a las tasas de convergencia, el método de Rayleigh-Ritz con cuadratura de Simpson es que presenta mayor velocidad de convergencia acercándose al orden cuártico.

Cuadro 4.5: *Test No. III: Errores numéricos usando la norma  $\|\cdot\|_\infty$ .*

h	DF VI	DF VII	MIM	RR (PM)	RR (S)
0.100	$2,7982 \cdot 10^0$	$2,1877 \cdot 10^0$	$2,4717 \cdot 10^0$	$1,3287 \cdot 10^0$	$9,2544 \cdot 10^{-8}$
0.040	$7,1665 \cdot 10^{-1}$	$3,9094 \cdot 10^{-1}$	$4,1669 \cdot 10^{-1}$	$3,5470 \cdot 10^{-1}$	$1,0690 \cdot 10^{-8}$
0.020	$2,1328 \cdot 10^{-1}$	$9,9436 \cdot 10^{-2}$	$1,0182 \cdot 10^{-1}$	$1,0636 \cdot 10^{-1}$	$2,2356 \cdot 10^{-10}$
0.013	$1,0056 \cdot 10^{-1}$	$4,4303 \cdot 10^{-2}$	$4,4653 \cdot 10^{-2}$	$5,0222 \cdot 10^{-2}$	$2,4752 \cdot 10^{-11}$
0.010	$5,8272 \cdot 10^{-2}$	$2,4936 \cdot 10^{-2}$	$2,4950 \cdot 10^{-2}$	$2,9116 \cdot 10^{-2}$	$3,9293 \cdot 10^{-12}$
Tasa	1.6546	1.8639	1.9522	1.6252	3.8156

En la tabla 4.6 se muestran los errores numéricos del problema de contorno (4.6)

aplicando los diferentes métodos propuestos usando la norma  $L_2$ . Se observa un análisis análogo al realizado por la tabla 4.5 con la diferencia de que los errores numéricos disminuyen un poco, más no en exactitud. Haciendo referencia a las tasas de convergencia, el método de Rayleigh-Ritz con cuadratura de Simpson presenta la mayor velocidad de convergencia aproximándose al orden cuártico.

Cuadro 4.6: *Test No. III: Errores numéricos usando la norma  $L_2$ .*

h	DF VI	DF VII	MIM	RR (PM)	RR (S)
0.100	$1,6238 \cdot 10^0$	$1,4169 \cdot 10^0$	$1,4553 \cdot 10^0$	$7,7245 \cdot 10^{-1}$	$6,9867 \cdot 10^{-8}$
0.040	$4,0192 \cdot 10^{-1}$	$2,5390 \cdot 10^{-1}$	$2,5537 \cdot 10^{-1}$	$1,9909 \cdot 10^{-1}$	$5,0197 \cdot 10^{-9}$
0.020	$1,1772 \cdot 10^{-1}$	$6,4533 \cdot 10^{-2}$	$6,4662 \cdot 10^{-2}$	$5,8720 \cdot 10^{-2}$	$1,0200 \cdot 10^{-10}$
0.013	$5,5196 \cdot 10^{-2}$	$2,8770 \cdot 10^{-2}$	$2,8802 \cdot 10^{-2}$	$2,7569 \cdot 10^{-2}$	$1,0191 \cdot 10^{-11}$
0.010	$3,1893 \cdot 10^{-2}$	$1,6200 \cdot 10^{-2}$	$1,6213 \cdot 10^{-2}$	$1,5937 \cdot 10^{-2}$	$1,7488 \cdot 10^{-12}$
Tasa	1.6796	1.8716	1.9156	1.6510	4.0192

En la figura 4.3 se muestra los errores alcanzados, a la izquierda medidos a partir de la norma del máximo y, a la derecha, usando norma  $L_2$ . En la gráfica, las pendientes de las rectas definen el orden de convergencia de los métodos y mientras más abajo se encuentre, mejor será el esquema que represente. Se observa al método de Rayleigh-Ritz con cuadratura de Simpson como mejor esquema, seguidamente se muestran el método mimético, diferencias finitas versión II y método de Rayleigh-Ritz con la cuadratura del punto medio los cuales poseen una velocidad de convergencia muy similar y, por último, el método de diferencias finitas versión I siendo el peor esquema en comparación con el resto. Otra característica presente en la figura 4.3 son algunas oscilaciones encontradas en el método de Rayleigh-Ritz con cuadratura de Simpson,

sin embargo, cuando se aumenta la cantidad de nodos, estas oscilaciones desaparecen.

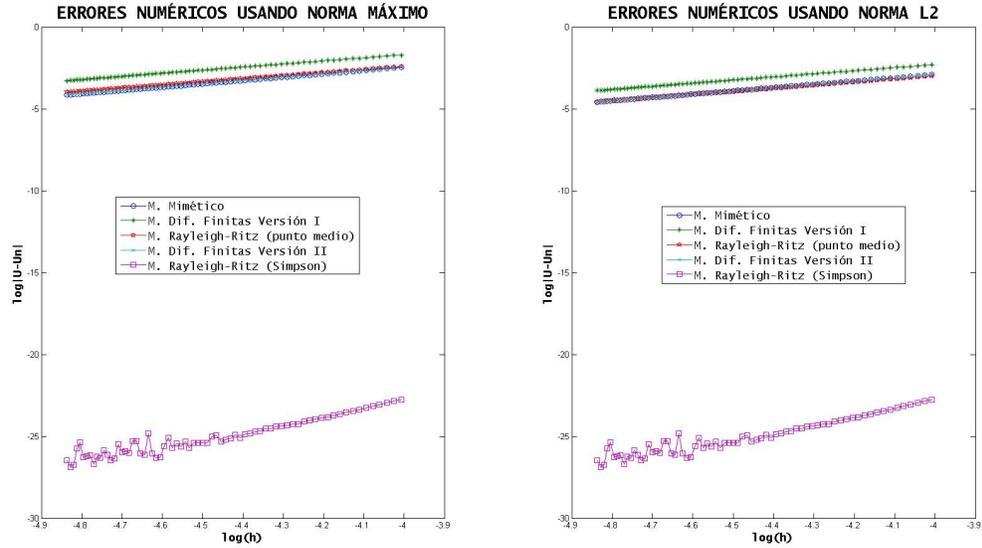


Figura 4.3: Test No III: Errores numéricos en norma del máximo  $\|\cdot\|_\infty$  (izquierda) y norma  $L_2$  (derecha).

## 4.5 Test No. IV

Se resuelve numéricamente el siguiente problema de contorno,

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( (2x+1)^2 \frac{dy}{dx} \right) + e^{-x^2} y = f(x) \\ y(0) - \frac{dy(0)}{dx} = 26 \\ y(1) + \frac{dy(1)}{dx} = -26 \end{cases} \quad (4.8)$$

donde,

$$\begin{aligned}
f(x) = & -4(2x + 1)(-25(1 - x)^{24} - 25x^{24} - (-2000x + 500)e^{-1000(x-0,25)^2} \\
& + (-2000x + 1500)e^{-1000(x-0,75)^2}) - (2x + 1)^2(600(1 - x)^{23} - 600x^{23} \\
& + 2000e^{-1000(x-0,25)^2} - (-2000x + 500)^2e^{-1000(x-0,25)^2} \\
& - 2000e^{-1000(x-0,75)^2} + (-2000x + 1500)^2e^{-1000(x-0,75)^2}) \\
& + e^{-x^2}((1 - x)^{25} - x^{25} - e^{-1000(x-0,25)^2}) + e^{-1000(x-0,75)^2}).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

La solución analítica de (4.8) está dada por,

$$y(x) = (1 - x)^{25} - x^{25} - e^{-1000(x-0,25)^2} + e^{-1000(x-0,75)^2}. \tag{4.10}$$

En la tabla 4.7 se muestran los errores numéricos del problema de contorno (4.8) aplicando los métodos propuestos usando la norma del máximo  $\|\cdot\|_\infty$ . Se observa una lenta convergencia a pesar de que la malla presente un refinamiento de 160 nodos reales, siendo el método de Rayleigh-Ritz con cuadratura de Simpson el que alcanza el mayor orden de exactitud con 4. Los métodos restantes como son: diferencias finitas versión I y II, método mimético y método de Rayleigh-Ritz con cuadratura del punto medio poseen una orden 2 de exactitud. Haciendo referencia a la tasa de convergencia todas se aproximan al orden cuadrático siendo la mejor alcanzada con el método de Rayleigh-Ritz con cuadratura de Simpson.

Cuadro 4.7: *Test No. IV: Errores numéricos usando la norma  $\|\cdot\|_\infty$ .*

h	DF VI	DF VII	MIM	RR (PM)	RR (S)
0.020	$3,7972 \cdot 10^{-1}$	$2,5043 \cdot 10^{-1}$	$2,4615 \cdot 10^{-1}$	$2,0259 \cdot 10^{-1}$	$3,7390 \cdot 10^{-3}$
0.013	$1,7385 \cdot 10^{-1}$	$1,1002 \cdot 10^{-1}$	$1,0872 \cdot 10^{-1}$	$9,1826 \cdot 10^{-2}$	$1,4742 \cdot 10^{-3}$
0.010	$9,9227 \cdot 10^{-2}$	$6,1841 \cdot 10^{-2}$	$6,1283 \cdot 10^{-2}$	$5,2268 \cdot 10^{-2}$	$8,2957 \cdot 10^{-4}$
0.008	$6,4805 \cdot 10^{-2}$	$3,9769 \cdot 10^{-2}$	$3,9480 \cdot 10^{-2}$	$3,3888 \cdot 10^{-2}$	$5,3904 \cdot 10^{-4}$
0.006	$4,0028 \cdot 10^{-2}$	$2,4251 \cdot 10^{-2}$	$2,4112 \cdot 10^{-2}$	$2,0982 \cdot 10^{-2}$	$3,3295 \cdot 10^{-4}$
Tasa	1.9216	1.9996	1.9905	1.9349	2.0341

En la tabla 4.8 se muestran los errores numéricos del problema de contorno (4.8) aplicando los métodos propuestos usando la norma  $L_2$ . En la tabla se observa nuevamente una lenta convergencia presentándose un análisis similar al caso de la norma del máximo, donde se observa que el orden de mayor exactitud es cuatro alcanzado con el método de Rayleigh-Ritz con cuadratura de Simpson. Haciendo referencia a la tasa de convergencia todas se aproximan al orden cuadrático siendo la mejor alcanzada con el método de Rayleigh-Ritz con cuadratura de Simpson.

Cuadro 4.8: *Test No. IV: Errores numéricos usando la norma  $L_2$ .*

h	DF VI	DF VII	MIM	RR (PM)	RR (S)
0.020	$2,6838 \cdot 10^{-1}$	$1,9270 \cdot 10^{-1}$	$1,8907 \cdot 10^{-1}$	$1,4390 \cdot 10^{-1}$	$1,4932 \cdot 10^{-3}$
0.013	$1,2680 \cdot 10^{-1}$	$8,5850 \cdot 10^{-2}$	$8,4740 \cdot 10^{-2}$	$6,7750 \cdot 10^{-2}$	$5,8548 \cdot 10^{-4}$
0.010	$7,3548 \cdot 10^{-2}$	$4,8332 \cdot 10^{-2}$	$4,7858 \cdot 10^{-2}$	$3,9226 \cdot 10^{-2}$	$3,2129 \cdot 10^{-4}$
0.008	$4,7946 \cdot 10^{-2}$	$3,0945 \cdot 10^{-2}$	$3,0700 \cdot 10^{-2}$	$2,5543 \cdot 10^{-2}$	$2,0425 \cdot 10^{-4}$
0.006	$2,9740 \cdot 10^{-2}$	$1,8893 \cdot 10^{-2}$	$1,8775 \cdot 10^{-2}$	$1,5828 \cdot 10^{-2}$	$1,2446 \cdot 10^{-4}$
Tasa	1.9026	1.9974	1.9874	1.9083	2.0752

En la figura 4.4 se muestra los errores alcanzados, a la izquierda medidos a partir de la norma del máximo y, a la derecha, usando norma  $L_2$ . En la gráfica se observa que el método de Rayleigh-Ritz con cuadratura de Simpson nuevamente se encuentra abajo del resto siendo el mejor esquema numérico, seguidamente por encima se observa a una similar velocidad de convergencia los métodos mimético, Rayleigh-Ritz con cuadratura del punto medio y los esquemas de diferencias finitas en sus dos versiones. Se presentan oscilaciones en los errores numéricos cuando la malla escalonada presenta pocas cantidades de nodos, sin embargo, cuando se van sumando nodos a la malla escalonada se observa un mejor comportamiento en los errores numéricos. Por esta razón, en la figura 4.4 se observan los errores numéricos a partir de mallas con un mínimo de 60 nodos para evitar las oscilaciones y observar una mejor velocidad de convergencia.

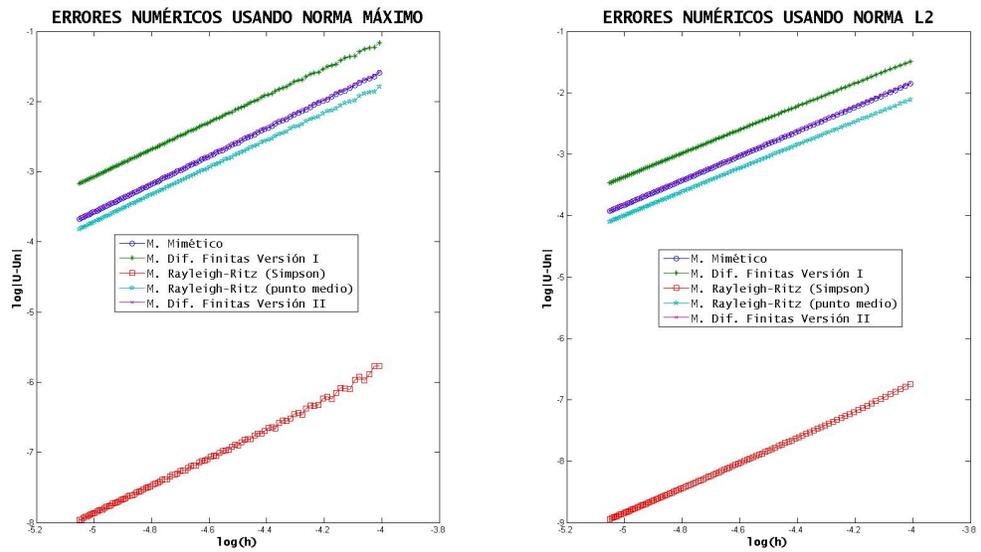


Figura 4.4: *Test No IV: Errores numéricos en norma del máximo  $\|\cdot\|_\infty$  (izquierda) y norma  $L_2$  (derecha).*

## 4.6 Test No. V

Se resuelve numéricamente el siguiente problema de contorno,

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + r(x)y = x \\ y(0) - \frac{dy(0)}{dx} = -1 \\ y(1) + \frac{dy(1)}{dx} = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

donde,

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 0,5 \\ 2 & \text{si } 0,5 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (4.12)$$

$$r(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq x < 0,25 \\ 10 & \text{si } 0,25 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (4.13)$$

La solución analítica de (4.11) está dada por,

$$y(x) = \begin{cases} -0,0251e^{\sqrt{3}x} - 0,2507e^{-\sqrt{3}x} + \frac{x}{3} & \text{si } 0 \leq x < 0,25 \\ -0,0003e^{\sqrt{10}x} - 0,3138e^{-\sqrt{10}x} + \frac{x}{10} & \text{si } 0,25 \leq x \leq 0,5 \\ -0,0071e^{\sqrt{5}x} - 0,1350e^{-\sqrt{5}x} + \frac{x}{10} & \text{si } 0,5 < x \leq 1. \end{cases} \quad (4.14)$$

En la tabla 4.9 se muestran los errores numéricos del problema de contorno (4.11) aplicando los diferentes métodos propuestos usando la norma del máximo  $\|\cdot\|_\infty$ . Se observa que los errores en función del tamaño de los bloques no disminuyen monotónicamente bajo refinamiento de malla. Las tasas de convergencia son todas aproximadamente lineales excepto la asociada al método mimético.

Cuadro 4.9: *Test No. V: Errores numéricos usando la norma  $\|\cdot\|_\infty$ .*

h	DF VI	DF VII	MIM	RR (PM)	RR (S)
0.100	$1,1759 \cdot 10^{-2}$	$1,1494 \cdot 10^{-2}$	$1,1481 \cdot 10^{-2}$	$5,1710 \cdot 10^{-3}$	$5,7321 \cdot 10^{-3}$
0.040	$1,7421 \cdot 10^{-3}$	$1,6984 \cdot 10^{-3}$	$1,6977 \cdot 10^{-3}$	$1,6642 \cdot 10^{-3}$	$8,4359 \cdot 10^{-4}$
0.020	$2,2986 \cdot 10^{-3}$	$2,2874 \cdot 10^{-3}$	$2,2873 \cdot 10^{-3}$	$9,3097 \cdot 10^{-4}$	$1,0434 \cdot 10^{-3}$
0.013	$5,8827 \cdot 10^{-4}$	$5,9338 \cdot 10^{-4}$	$5,9341 \cdot 10^{-4}$	$5,8895 \cdot 10^{-4}$	$4,3329 \cdot 10^{-4}$
0.010	$4,5101 \cdot 10^{-4}$	$4,4914 \cdot 10^{-4}$	$4,4913 \cdot 10^{-4}$	$1,1457 \cdot 10^{-3}$	$8,0414 \cdot 10^{-4}$
Tasa	0.9801	0.9792	0.7526	1.0176	1.0433

En la tabla 4.10 se muestran los errores numéricos del problema de contorno (4.11) aplicando los diferentes métodos propuestos usando la norma  $L_2$ . Se observa, al igual que en la norma del máximo, que los errores no decrecen monotónicamente

en función del tamaño de malla. Haciendo referencia a la tasa de convergencia, los métodos se aproximan al orden lineal, siendo el método mimético el que registra la menor velocidad de convergencia.

Cuadro 4.10: *Test No. V: Errores numéricos usando la norma  $L_2$ .*

h	DF VI	DF VII	MIM	RR (PM)	RR (S)
0.100	$7,0444 \cdot 10^{-3}$	$6,8391 \cdot 10^{-3}$	$6,8399 \cdot 10^{-3}$	$2,8281 \cdot 10^{-3}$	$3,7352 \cdot 10^{-3}$
0.040	$1,0072 \cdot 10^{-3}$	$9,6784 \cdot 10^{-4}$	$9,6756 \cdot 10^{-4}$	$9,6869 \cdot 10^{-4}$	$4,9201 \cdot 10^{-4}$
0.020	$1,3647 \cdot 10^{-3}$	$1,3560 \cdot 10^{-3}$	$1,3560 \cdot 10^{-3}$	$5,1072 \cdot 10^{-4}$	$6,7334 \cdot 10^{-4}$
0.013	$3,4218 \cdot 10^{-4}$	$3,4664 \cdot 10^{-4}$	$3,4665 \cdot 10^{-4}$	$3,4684 \cdot 10^{-4}$	$2,7373 \cdot 10^{-4}$
0.010	$2,5167 \cdot 10^{-4}$	$2,5087 \cdot 10^{-4}$	$2,5087 \cdot 10^{-4}$	$6,8294 \cdot 10^{-4}$	$4,8607 \cdot 10^{-4}$
Tasa	0.9995	0.9996	0.78249	1.0401	1.0644

En la figura 4.5 se muestran los errores alcanzados, a la izquierda medidos a partir de la norma del máximo y, a la derecha, usando norma  $L_2$ . En todos los métodos se observan oscilaciones en los errores calculados, esto es debido a las discontinuidad de la función  $p$  que se define en el problema de contorno. Experimentos numéricos adicionales, no reportados en esta tesis por razones de espacio, evidencian que la discontinuidad de la función  $r$  tienen poco efecto o ninguno sobre la aparición de oscilaciones. Los errores numéricos mantienen sus oscilaciones bajo refinamiento de malla debido la discontinuidad de la función  $p$ .

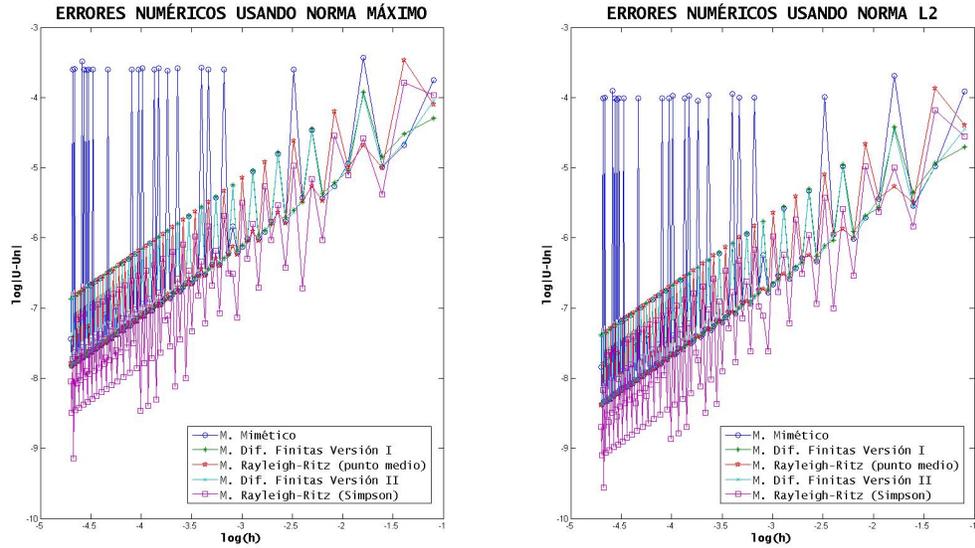


Figura 4.5: *Test No V: Errores numéricos en norma del máximo  $\|\cdot\|_\infty$  (izquierda) y norma  $L_2$  (derecha).*

El método mimético registra las mayores oscilaciones que hacen que sus errores sean los más pronunciados de las gráficas en ambas normas. En nuestra formulación del método mimético, así como también el método de diferencias finitas, las discretizaciones de las ecuaciones correspondientes a cada nodo presentaban como aproximación de la función  $p$  la media aritmética, es decir,

$$p\left(x\left(i - \frac{1}{2}\right)\right) \approx \frac{p(x(i-1)) + p(x(i))}{2}$$

En la figura 4.6 se observan los errores que describen la velocidad de convergencia de los diferentes métodos propuestos pero únicamente sobre mallas escalonadas en las cuales la discontinuidad que presenta la función  $p$  en el punto 0,5 sea nodo de las mismas. En este caso, grandes oscilaciones en los errores de la figura 4.5 desaparecen.

En ella se evidencia que el método de Rayleigh-Ritz con cuadratura de Simpson tiene los menores errores aún cuando se mantienen las oscilaciones. Este resultado pareciera contradecir el criterio que recomienda la alineación del borde de los bloques de malla con la discontinuidad. Sin embargo, dicha contradicción es sólo aparente pues las gráficas en la figura 4.6 fueron obtenidas usando la media aritmética, en cuyo caso el resultado expuesto es correcto y consistente.

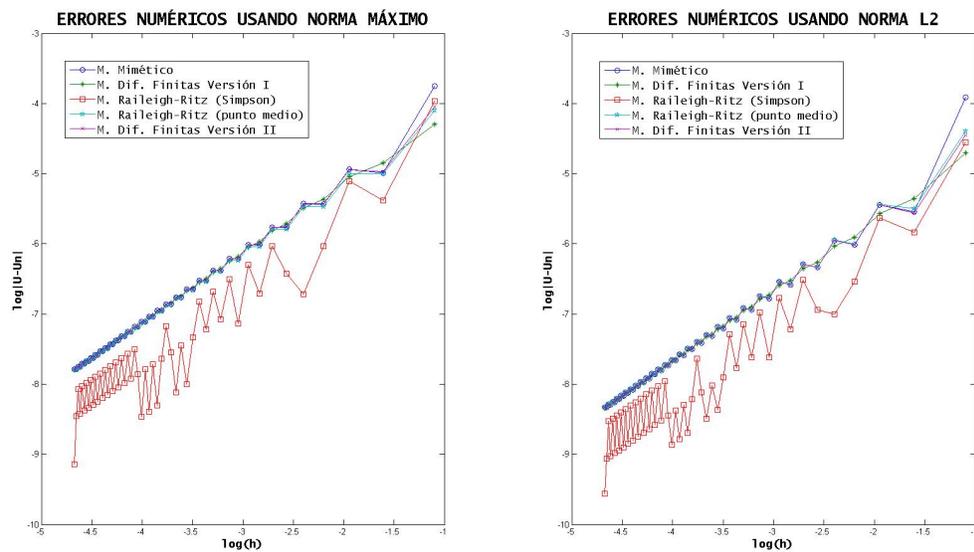


Figura 4.6: *Test No V: Errores numéricos usando promedio aritmético en norma del máximo  $\|\cdot\|_\infty$  (izquierda) y norma  $L_2$  (derecha).*

Una forma alternativa para evaluar la función  $p$  en el caso de discontinuidades viene dado por el promedio armonico [3],

$$p\left(x\left(i-\frac{1}{2}\right)\right) \approx \frac{2p(x(i-1))p(x(i))}{p(x(i-1)) + p(x(i))}$$

En la figura 4.7 se presentan los errores en norma  $L_2$  cuando la función  $p$  es evaluada

con la media armónica en el método mimético. En el gráfico de la izquierda de dicha figura se exponen los errores sobre mallas impares en las que uno de los bordes de un bloque de la malla coincide con la discontinuidad. Ella presenta grandes oscilaciones que favorecen en magnitud al método mimético. En la gráfica derecha se muestran los errores obtenidos sobre mallas en las que uno de los centros de los bloques coincide con la discontinuidad. Ella muestra que los errores producidos por la media armónica son peores a los obtenidos en las mismas mallas con la función  $p$  evaluada con la media aritmética. Estas observaciones son aparentemente contradictorias y requieren un mayor análisis que esta fuera de los alcances de esta tesis basadas en promedios aritméticos para la funciones  $p$  del problema de contorno (1.1).

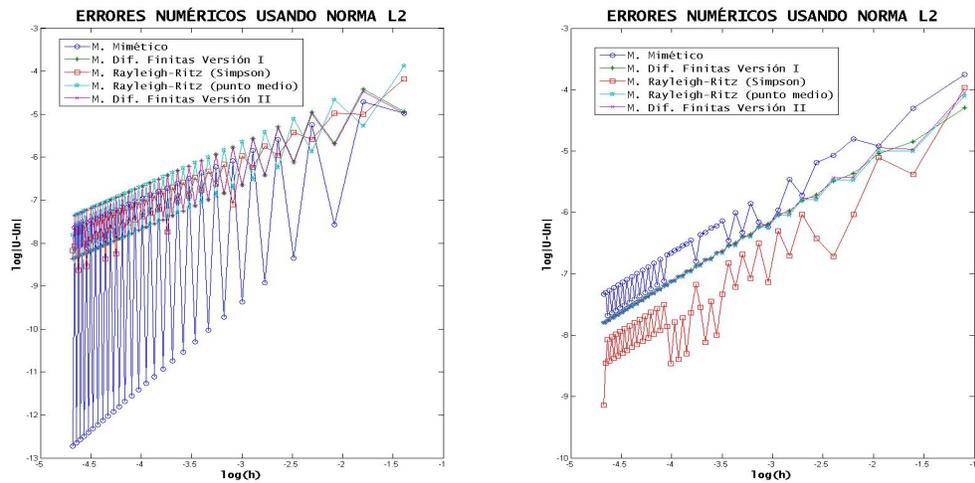


Figura 4.7: Test No V: Errores numéricos en norma  $L_2$  usando promedio armónico de función  $p$ .

## 4.7 Conclusiones

En este trabajo de grado se ha presentado la formulación, implementación y evaluación del método de Rayleigh-Ritz para resolver problemas de contorno lineales bajo condiciones de borde tipo Robin.

La formulación es una extensión y ampliación de la presentada en [1] donde se expone el método de Rayleigh-Ritz para el caso de condiciones de Dirichlet sin considerar la forma variacional. En tal sentido, la formulación presentada se obtiene a partir de un problema variacional especialmente diseñado para el caso de condiciones de Robin, cuyo mínimo es la solución del problema de contorno bajo estudio en la presente tesis. Teniendo dicha propiedad, se establece de forma general el método de Rayleigh-Ritz para problemas de contorno lineales sobre mallas escalonadas usando funciones de base triangular lineales. Aunque el método de Rayleigh-Ritz es ampliamente expuesto en la literatura, no es fácil de conseguir su formulación bajo condiciones de Robin y, en consecuencia, es uno de los aportes de la tesis.

El método de Rayleigh-Ritz utiliza expresiones integrales que deben ser evaluadas en sus implementaciones numéricas mediante fórmulas de cuadratura. En este trabajo se adoptó el método de cuadratura de punto medio para evaluar las integrales que aparecen en el método de Rayleigh-Ritz produciendo las expresiones más simples para ser estudiadas. En base a dichas expresiones se estableció la convergencia del método de Rayleigh-Ritz analizando la consistencia de las ecuaciones y la estabilidad del sistema lineal asociado al método. La consistencia se realizó mediante el uso de desarrollos de Taylor y la estabilidad se demostró usando el teorema de círculos de Gershgorin. Aunque las técnicas anteriores son ampliamente utilizadas en el estu-

dio de otros métodos numéricos, su adaptación para establecer la convergencia del método de Rayleigh-Ritz, que generalmente utiliza conceptos del análisis funcional no considerados en esta tesis [10, 15, 16], es un aporte original de este trabajo de grado.

Se implementaron dos formulaciones del método de Rayleigh-Ritz usando el lenguaje computacional de MATLAB. La primera utilizó la fórmula de cuadratura del punto medio y la segunda uso la cuadratura de Simpson. Igualmente, se realizaron los programas de los métodos de diferencias finitas tradicionales y el mimético. Se observó que de todas esas implementaciones las más complejas y menos generales corresponden a las del método de Rayleigh-Ritz, siendo esta su principal desventaja. Las implementaciones de todos los métodos mencionados fueron utilizadas en un estudio numérico comparativo donde fueron evaluados en función de sus errores de aproximación y velocidad o tasas de convergencia.

Los resultados del estudio comparativo evidencian, más no prueban, que las aproximaciones obtenidas mediante el método de Rayleigh-Ritz usando la regla del punto medio son comparables o similares a las producidas por los métodos de diferencias finitas y mimético. Por otro lado, la implementación del método de Rayleigh-Ritz usando cuadratura de Simpson produce las mejores aproximaciones y, en el peor de los casos, similares a los demás métodos. La presentación y análisis del estudio comparativo es una aporte original diferenciándose del estudio reportado en [9] en el tipo de problema de contorno estudiado, la malla utilizada, las fórmulas de cuadratura empleadas y los métodos de diferencias finitas considerados. Esta tesis y [9] son esfuerzos complementarios donde se evalúan distintos aspectos de los métodos

miméticos, diferencias finitas y elementos finitos en su versión de Rayleigh-Ritz.

Finalmente, se propone como estudio a futuro extender el análisis comparativo numérico al caso de ecuaciones parabólicas donde no existen estudios similares al realizado en esta tesis y ampliar el análisis de promedios expuesto en el último ejemplo numérico.

# Apéndice A

## Método de Rayleigh-Ritz con regla de Simpson

En esta sección se desarrollarán las ecuaciones lineales del sistema (1.29) asociadas al método de Rayleigh-Ritz cuando la fórmula de cuadratura utilizada es la de Simpson.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_0$ . La misma está trasladada al origen obteniéndose la siguiente discretización,

$$a_{00}U_0 + a_{01}U_{1/2} = b_0.$$

Sustituyendo los valores  $a_{00}$ ,  $a_{01}$  y  $b_0$  se obtiene,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{12h} \left( 4p(0) + h^2r(0) + 16p\left(\frac{h}{4}\right) + h^2r\left(\frac{h}{4}\right) + 4p\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{p(0)a_1}{b_1} \right) \right) U_0 \\ & + \left( -\frac{1}{12h} \left( 4p(0) + 16p\left(\frac{h}{4}\right) - h^2r\left(\frac{h}{4}\right) + 4p\left(\frac{h}{2}\right) \right) \right) U_{1/2} \\ & = \frac{h}{12} \left( f(0) + 2f\left(\frac{h}{4}\right) \right) - \frac{p(0)g_1}{b_1}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Luego, aplicando el desarrollo de Taylor en (A.1) y buscando el error de truncamiento se obtiene,

$$L_h(U - U_n) = \frac{h}{6}f(0) - \frac{h}{6}f\left(\frac{h}{4}\right) + O(h^2). \quad (\text{A.2})$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_1$ , utilizando los coeficientes  $a_{10}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  y  $b_1$ . La misma está trasladada al origen obteniéndose la siguiente discretización,

$$a_{10}U_{-1/2} + a_{11}U_0 + a_{12}U_1 = b_1.$$

Sustituyendo los valores  $a_{10}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  y  $b_1$  se obtiene,

$$\begin{aligned} & + \left( -\frac{1}{12h} \left( 4p(0) + 16p\left(\frac{h}{4}\right) - h^2r\left(\frac{h}{4}\right) + 4p\left(\frac{h}{2}\right) \right) \right) U_{-1/2} \\ & + \left( \frac{1}{6h} \left( p\left(\frac{h}{2}\right) + h^2r\left(\frac{h}{2}\right) + 4p(h) + h^2r(h) + p\left(\frac{3h}{2}\right) \right) \right) U_0 \\ & + \left( \frac{1}{12h} \left( 4p(0) + 16p\left(\frac{h}{4}\right) + h^2r\left(\frac{h}{4}\right) + 4p\left(\frac{h}{2}\right) + h^2r\left(\frac{h}{2}\right) \right) \right) U_0 \\ & \left( -\frac{1}{6h} \left( p\left(\frac{3h}{2}\right) + 4p(h) - h^2r(h) + p\left(\frac{h}{2}\right) \right) \right) U_1 \\ & = \frac{h}{12} \left( 2f\left(\frac{h}{4}\right) + f\left(\frac{h}{2}\right) \right) + \frac{h}{6} \left( f\left(\frac{h}{2}\right) + 2f(h) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Luego, aplicando el desarrollo de Taylor en (A.3) y buscando el error de truncamiento se obtiene,

$$L_h(U - U_n) = \frac{3h}{4}f(0) - \frac{h}{3}f(h) - \frac{h}{4}f\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{h}{6}f\left(\frac{h}{4}\right) + O(h^2). \quad (\text{A.4})$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_k$  con  $k = 2, \dots, n-1$ , utilizando los coeficientes  $a_{k,k-1}$ ,  $a_{kk}$ ,  $a_{k,k+1}$  y  $b_k$ . La misma está trasladada al origen obteniéndose la siguiente discretización,

$$a_{k,k-1}U_{-1} + a_{kk}U_0 + a_{k,k+1}U_1 = b_k.$$

Sustituyendo los valores  $a_{k,k-1}$ ,  $a_{kk}$ ,  $a_{k,k+1}$  y  $b_k$  se obtiene,

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{1}{6h} \left( p(-h) + 4p \left( -\frac{h}{2} \right) + p(0) \right) + \frac{h}{6} r \left( -\frac{h}{2} \right) \right) U_{-1} \\ & \left( \frac{1}{6h} \left( p(-h) + 4p \left( -\frac{h}{2} \right) + p(0) \right) + \frac{1}{6h} \left( p(0) + 4p \left( \frac{h}{2} \right) + p(h) \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{h}{6} \left( r \left( -\frac{h}{2} \right) + r(0) \right) + \frac{h}{6} \left( r(0) + r \left( \frac{h}{2} \right) \right) \right) U_0 \\ & + \left( -\frac{1}{6h} \left( p(h) + 4p \left( \frac{h}{2} \right) + p(0) \right) + \frac{h}{6} r \left( \frac{h}{2} \right) \right) U_1 \\ & = \frac{h}{6} \left( f(0) + 2f \left( -\frac{h}{2} \right) \right) + \frac{h}{6} \left( f(0) + 2f \left( \frac{h}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Luego, aplicando el desarrollo de Taylor en (A.5) y buscando el error de truncamiento se obtiene,

$$L_h(U - U_n) = \frac{2h}{3}f(0) - \frac{h}{3}f \left( -\frac{h}{2} \right) - \frac{h}{3}f \left( \frac{h}{2} \right) + O(h^3). \quad (\text{A.6})$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_n$ , utilizando los coeficientes  $a_{n,n-1}$ ,  $a_{nn}$ ,  $a_{n,n+1}$  y  $b_n$ . La misma está trasladada al origen obteniéndose la siguiente discretización,

$$a_{n,n-1}U_{-1} + a_{nn}U_0 + a_{n,n+1}U_{1/2} = b_n.$$

Sustituyendo los valores  $a_{n,n-1}$ ,  $a_{nn}$ ,  $a_{n,n+1}$  y  $b_n$  se obtiene,

$$\begin{aligned}
& \left( -\frac{1}{6h} \left( p \left( 1 - \frac{3h}{2} \right) + 4p(1-h) - h^2r(1-h) + p \left( 1 - \frac{h}{2} \right) \right) \right) U_{-1} \\
& \quad + \left( \frac{1}{6h} \left( p \left( 1 - \frac{3h}{2} \right) + 4p(1-h) + h^2r(1-h) + p \left( 1 - \frac{h}{2} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. + h^2r \left( 1 - \frac{h}{2} \right) \right) U_0 + \left( \frac{1}{12h} \left( 4p \left( 1 - \frac{h}{2} \right) + h^2r \left( 1 - \frac{h}{2} \right) + 16p \left( 1 - \frac{h}{4} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + h^2r \left( 1 - \frac{h}{4} \right) + 4p(1) \right) \right) U_0 + \left( -\frac{1}{12h} \left( 4p \left( 1 - \frac{h}{2} \right) + 16p \left( 1 - \frac{h}{4} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - h^2r \left( 1 - \frac{h}{4} \right) + 4p(1) \right) \right) U_{1/2} = \frac{h}{6} \left( 2f(1-h) + f \left( 1 - \frac{h}{2} \right) \right) \\
& \quad + \frac{h}{12} \left( f \left( 1 - \frac{h}{2} \right) + 2f \left( 1 - \frac{h}{4} \right) \right). \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Luego, aplicando el desarrollo de Taylor en (A.7) y buscando el error de truncamiento se obtiene,

$$L_h(U - U_n) = \frac{3h}{4}f(1) - \frac{h}{3}f(1-h) - \frac{h}{4}f \left( 1 - \frac{h}{2} \right) - \frac{h}{6}f \left( 1 - \frac{h}{4} \right) + O(h^2). \tag{A.8}$$

A continuación se muestra la ecuación correspondiente al nodo  $x_{n+1}$ . La misma está trasladada al origen obteniéndose la siguiente discretización,

$$a_{n+1,n}U_{-1/2} + a_{n+1,n+1}U_0 = b_{n+1}.$$

Sustituyendo los valores  $a_{n+1,n}$ ,  $a_{n+1,n+1}$  y  $b_{n+1}$  se obtiene,

$$\begin{aligned}
& \left( -\frac{1}{12h} \left( 4p \left( 1 - \frac{h}{2} \right) + 16p \left( 1 - \frac{h}{4} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - h^2r \left( 1 - \frac{h}{4} \right) + 4p(1) \right) \right) U_{-1/2} + \left( \frac{1}{12h} \left( 4p \left( 1 - \frac{h}{2} \right) + 16p \left( 1 - \frac{h}{4} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + h^2r \left( 1 - \frac{h}{4} \right) + 4p(1) + h^2r(1) + \frac{p(1)a_2}{b_2} \right) \right) U_0 \\
& \quad = \frac{h}{12} \left( f(1) + 2f \left( 1 - \frac{h}{4} \right) \right) + \frac{p(1)g_2}{b_2}. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Luego, aplicando el desarrollo de Taylor en (A.9) y buscando el error de truncamiento se obtiene,

$$L_h(U - U_n) = \frac{h}{6}f(1) - \frac{h}{6}f\left(1 - \frac{h}{4}\right) + O(h^2). \quad (\text{A.10})$$

# Apéndice B

## Bibliografía

# Bibliografía

- [1] Burden R. y Faires D., Análisis Numérico, 7ma edición, Thomson Editores, 2002.
- [2] Castillo J. y Miranda F., Mimetic Discretization Methods, 1ra edición, Chapman and Hall/CRC, 2013.
- [3] Freitas M., Un estudio comparativo de los métodos miméticos para la ecuación estática de difusión, Tesis UCV, 2004.
- [4] Solano F., Un esquema mimético de diferencias finitas para la ecuación de onda biarmónica, Tesis UCV, 2010.
- [5] Mannarino I., Un método mimético de diferencias finitas para la ecuación no estática de difusión. Tesis UCV, 2007.
- [6] Godoy J., Métodos iterativos para esquemas miméticos en ecuaciones elípticas, Tesis UCV, 2008.
- [7] Guevara J., Sobre los esquemas miméticos de diferencias finitas para la ecuación estática de difusión, Trabajo de Ascenso UCV, 2005.

- [8] Guevara J., Un esquema mimético tipo Richardson para la ecuación biarmónica bicuadrática, Trabajo de ascenso UCV, 2010.
- [9] Lugo A. y Calderón G., Un análisis comparativo de los métodos miméticos, diferencias finitas y elementos finitos para problemas estacionarios. Research gate, 2014.
- [10] Bulirsch R. y Stoer J., Introduction to Numerical Analysis, editorial Springer-Verlag, 1980.
- [11] Boyce W. y Di Prima R., Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, 4ta edición, editorial Limusa, 2000.
- [12] Shashkow M., Conservative Finite-Difference Methods on General Grids, editorial CRC Press LLC, 2000.
- [13] Guevara J., Rojas S., Freites M. y Castillo J., Convergence of a Mimetic Finite Difference Method for Static Diffusion Equation, Hindawi Publishing Corporation, 2007.
- [14] Castillo J. y Yasuda M., Linear Systems Arising for Second-Order Mimetic Divergence and Gradient Discretizations, Springer, 2005.
- [15] Strang G. y Fix G., An Analysis of the Finite Element Method, editorial Prentice-Hall, 1973.
- [16] Calderón G. y Gallo R., Introducción al Método de los Elementos Finitos: un Enfoque Matemático, texto del curso dictado en la XXIV EVM, Mérida, 2011.