Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias

Escuela de Física

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

ESTUDIO DE LA FORMULACIÓN CANÓNICA EN GRAVEDAD LINEALIZADA

Trabajo Especial de Grado presentado por
Daniel Bachour
ante la Facultad de Ciencias de la
ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**

Con la tutoría de: Dr. Lorenzo Leal
Dr. Ernesto Contreras

Abril-2015

Caracas-Venezuela

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

ESTUDIO DE LA FORMULACIÓN CANÓNICA EN GRAVEDAD LINEALIZADA

Trabajo Especial de Grado presentado por
Daniel Bachour
ante la Facultad de Ciencias de la
ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**

Con la tutoría de: Dr. Lorenzo Leal
Dr. Ernesto Contreras

Abril-2015

Caracas-Venezuela

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del Jurado designado por el Consejo de la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo Especial de Grado presentado por **Daniel Bachour**, Cédula de Identidad No. 19.276.120, bajo el título ”**Estudio de la Formulación Canónica en Gravedad Linealizada**″, a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al grado de **Licenciado en Física**, dejan constancia de lo siguiente:

1. Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del Jurado, éste fijó el día 07 de abril de 2015, a las 9:00 am, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la sala de seminarios Guillermo Ruggeri de la Escuela de Física, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado; todo ello conforme a los artículos 20, 21, 22, 25, 26 y 28 de la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente.

2. Finalizada la defensa pública del trabajo, el jurado decidió aprobarlo por considerar que se ajusta a lo dispuesto y exigido en la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente en sus artículos 1, 5 y 6.

En fe de lo cual se levanta la presente acta el 07 de abril de 2015, dejándose también constancia de que, conforme a la normativa jurídica vigente, actuó como Coordinador del Jurado el Tutor del Trabajo Especial de Grado, **Dr. Ernesto Contreras**. Firma del jurado examinador

Dr. Pío Arias
7.183.922
UCV

Msc. Ling Sequera
17.159.101
UCV

Dr. Ernesto Contreras
15.733.583
UCV

Some people want it to happen, some wish it would happen, others make it happen.
Michael Jordan

Agradecimientos

En primera instancia, agradezco a mi familia por haberme formado en todos los aspectos, sin ellos no sería la persona que soy, ésta meta es dedicada a ustedes. Inmensamente agradecido.

A mis tutores, el Profesor Ernesto Contreras y el Profesor Lorenzo Leal, que aparte de ser unos físicos increíbles, son personas muy valiosas que me dieron el ánimo y la motivación necesaria para seguir adelante. Gracias por permitirme entrar en éste bello mundo.

A cada uno de los profesores que pasaron por mi en toda mi formación académica, por brindarme y compartir su sabiduria. Mil gracias.

A mis amigos y hermanos, Camilo las Heras, Julio Torres, Miguel García, Omar Barrios, Antonio Delgado, Sinkler Tormet, Gustavo Martínez, Jesus Fajardo, Jeiler Vargas, Cristian Alvarado, a todos ustedes, un fuerte abrazo.

Al Profesor Pío Arias que me brindó su valioso tiempo y conocimiento para asesorarme con aspectos relacionados a mi trabajo. Agradecido Profesor.

A todos, mis respetos.

Resumen

Se estudia la Gravedad Linealizada en la formulación de Fierz-Pauli partiendo de la acción de Einstein-Hilbert para obtener la acción de la teoría. Se encuentra el Hamiltoniano así como el álgebra de Poisson entre las variables canónicamente conjugadas. Se prueba que el conjunto de ligaduras originales mas las ligaduras provenientes de la fijación de calibre, constituyen un conjunto de segunda clase. Se escriben los corchetes de Dirac para Gravedad Linealizada.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Una teoría de calibre puede ser considerada como aquella donde las variables dinámicas no están completamente determinadas por la dinámica del sistema. La indeterminación puede pensarse como análoga a la libertad que existe en la escogencia de diversos sistemas de referencia a la hora de describir un sistema físico[1]. Las transformaciones de éstas variables generadas por un cambio arbitrario en el marco de referencia son llamadas transformaciones de calibre y las variables físicamente relevantes, son aquellas que son independientes de éstas transformaciones. A las mismas se les denomina observables[1]. Actualmente existen numerosas teorías de calibre en la Física, las cuales se encargan de explicar comportamientos tanto clásicos como cuánticos en la naturaleza. Podemos citar a la Electrodinámica cuántica como una teoría de calibre que explica el comportamiento de una partícula bosónica que es el fotón, y la Relatividad General, que es otra teoría de calibre encargada de explicar la gravedad no como una fuerza, sino como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo[2, 3, 4]. El Modelo Estándar incluye teorías de calibre dando una descripción de la naturaleza a escalas microscópicas. De las dos teorías de calibre mencionadas, la Relatividad General no es parte del Modelo Estándar debido a que aún no hay un modelo cuántico del espacio-tiempo[3, 4, 5, 6].

Para encontrar las ecuaciones de movimiento de una teoría de calibre se puede partir de las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana. En la mayoria de los casos, una teoría viene dada en la formulación Lagrangiana ya que a ese nivel se pueden implementar facilmente todas las simetrías del sistema[2, 7]. Sin embargo si, entre otras cosas, el objetivo es establecer las reglas de cuantización para un sistema físico, se prefiere la Hamiltoniana.

El objetivo primordial en éste trabajo es obtener la formulación Hamiltoniana a partir de la Lagrangiana de teorías de calibre Abelianas, para luego establecer las reglas de cuantización. Sin embargo, como los sistemas a considerar son teorías con vínculos, no todas las variables dinámicas en el espacio de fases son relevantes[1, 7], por ésta razón, para encontrar la formulación Hamiltoniana de estos sistemas, es necesario aplicar un método que tome en consideración a los vínculos, nosotros estudiaremos el método de Dirac[1, 7].

Éste trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el capítulo II se esboza la formulación Canónica sin vínculos, introduciendo el momentum conjugado p^{ab} y ciertos aspectos generales de dicha formulación. Ya establecida la misma, encontraremos que ésta formulación es válida solamente cuando se pueden despejar todas las velocidades en función del momentum conjugado, si esto no es posible realizarlo, es necesario la introducción de un método mas general que permita tratar con este problema. El método de Dirac nos permite tratar con sistemas físicos que presentan dicha característica, dotando de nuevos conceptos que generalizan la formulación canónica sin vínculos y que cubren la falta de generalidad del mismo.

A manera de ejemplo, en el capítulo III se estudia la formulación Canónica para la Electrodinámica clásica sin fuentes en $D = (3+1)$ dimensiones, encontrando el Hamiltoniano de la teoría y el álgebra entre los campos dinámicos. Se fija el calibre de Coulomb a fin de eliminar las variables no dinámicas de la teoría y luego de esto se escriben los corchetes de Dirac. Se presenta una formulación alternativa que hace mas sencillo el cálculo de los corchetes de Dirac y que consiste en tomar desde el inicio al potencial A_0 como multiplicador de Lagrange, debido a que el mismo no tiene dinámica en la teoría.

En el capítulo IV se realiza el estudio de la formulación Canónica para Gravedad Linealizada. Para ello se parte de la acción de Einstein-Hilbert en el vacío para Relatividad General y se construye una acción que describe la dinámica de un campo simétrico no masivo de espin 2 que es la acción de Fierz-Pauli sin masa. Utilizando el método de Dirac para tratar con Lagrangianos singulares, se encuentra el Hamiltoniano y el álgebra de Poisson entre las variables canónicamente conjugadas. Se procede a fijar el calibre trasverso y sin traza con el fin de establecer un conjunto de ligaduras de segunda clase, calculando así los corchetes de Dirac para las variables h_{ab} y p^{ab} en Gravedad Linealizada. Finalmente presentaremos algunas conclusiones y posibles extensiones de esta investigación.

CAPÍTULO 2

FORMALISMO CANÓNICO

2.1. Formulación Hamiltoniana de teorías de campos

Una teoría de campos puede estudiarse siguiendo dos formulaciones equivalentes, la Lagrangiana y la Hamiltoniana [8, 9]. En la primera se parte de una densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$ que depende funcionalmente de los campos y de sus primeras derivadas espaciales y temporales, es decir[8, 9, 10]

$$\mathcal{L}[\phi_I, \partial_a \phi_I, \dot{\phi}_I], \tag{2.1}$$

donde los índices $I = 1, 2, ..., s$ y $a = 1, 2, 3$ etiquetan los campos y las coordenadas espaciales respectivamente. Luego, la acción S de la teoría se escribe como

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}, \tag{2.2}$$

que es un funcional que toma valores en el espacio de configuraciones dado por los campos ϕ_I y de sus derivadas temporales $\dot{\phi}_I$. A partir de la acción podemos encontrar la dinámica de los campos siguiendo principio variacional que establece que “la evolución temporal de un sistema físico es tal que, bajo variaciones infinitesimales, arbitrarias e independientes de los campos que componen el sistema, que se anulan en los tiempos inicial y final y en los bordes del volumen de integración, la variación de la acción es cero” [10]. Es decir

$$\delta S = 0. \tag{2.3}$$

De (2.3) se obtienen s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas denominadas ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_I} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_I)} \right) = 0, \tag{2.4}$$

donde $\mu = 0, 1, 2, 3$ etiqueta las coordenadas espacio-temporales. Estas ecuaciones se pueden escribir también en función del Lagrangiano total $L[\phi_I, \dot{\phi}_I]$ del sistema dado por

$$L = \int d^3x \mathcal{L}. \tag{2.5}$$

Para ello debemos introducir la derivada funcional. Sea $F[\phi]$ un funcional, entonces definimos

$$\delta F[\phi] := \int d^3x \frac{\delta F}{\delta \phi(\vec{x})} \delta\phi(\vec{x}), \tag{2.6}$$

luego si

$$F = \int d^3x f(\phi, \partial_a \phi), \tag{2.7}$$

entonces, integrando por partes y despreciando términos de borde se obtiene

$$\delta F \ = \ \int d^3x \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} - \partial_a \frac{\partial f}{\partial \partial_a \phi} \right) \delta\phi, \tag{2.8}$$

de donde se lee que

$$\frac{\delta F}{\delta \phi} = \frac{\partial f}{\partial \phi} - \partial_a \frac{\partial f}{\partial(\partial_a \phi)}. \tag{2.9}$$

De esta manera sí tomamos F como $L[\phi_I, \dot{\phi}_I]$ y f como $\mathcal{L}(\phi_I, \partial_a \phi_I, \dot{\phi}_I)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta \phi_I} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_I} - \partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi_I)}, \\ \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}_I} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_I}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Restando la primera ecuación del conjunto anterior con la derivada temporal de la segunda, se obtienen finalmente las ecuaciones de Euler-Lagrange en función de L ya que

$$\frac{\delta L}{\delta \phi_I} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}_I} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_I} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_I)}.$$

Por otro lado en la formulación Hamiltoniana la dinámica está descrita por $2s$ ecuaciones de primer orden que se pueden obtener de la siguiente manera. Se define el momentum conjugado como

$$p^I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_I}, \tag{2.11}$$

y a continuación se realiza una transformación de Legendre para sustituir las velocidades $\dot{\phi}_I$ por los momentos conjugados p^I, obteniendo la densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H}[\phi_I, \partial_a \phi_I, p^I] = p^I \dot{\phi}_I - \mathcal{L}[\phi_I, \partial_a \phi_I, \dot{\phi}_I]. \tag{2.12}$$

En función de la densidad Hamiltoniana la acción S del sistema viene dada por

$$S = \int d^3x (p^I \dot{\phi}_I - \mathcal{H}[\phi_I, \partial_a \phi_I, p^I]),$$

de donde, al aplicar el principio de mínima acción se obtienen las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_I &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p^I}, \\ -\dot{p}^I &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_I} - \partial_a \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_a \phi_I)}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Si definimos el Hamiltoniano total del sistema como

$$H[\phi_I, p^I] = \int d^3x \mathcal{H}[\phi_I, \partial_a \phi_I, p^I], \tag{2.14}$$

las ecuaciones de Hamilton quedan escritas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_I &= \frac{\delta H}{\delta p^I}, \\ -\dot{p}^I &= \frac{\delta H}{\delta \phi_I}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Otra manera de describir la dinámica en la formulación canónica, y que nos será útil mas adelante, es mediante los Corchetes de Poisson, que para funcionales $A[\phi_I, p^I]$ y $B[\phi_I, p^I]$ que toman valores en el espacio de fases se definen como sigue[10]

$$\{A(\vec{x}), B(\vec{y})\} = \int d^3z \left(\frac{\delta A(\vec{x})}{\delta \phi_I(\vec{z})} \frac{\delta B(\vec{y})}{\delta p^I(\vec{z})} - \frac{\delta A(\vec{x})}{\delta p^I(\vec{z})} \frac{\delta B(\vec{y})}{\delta \phi_I(\vec{z})} \right). \tag{2.16}$$

Estos corchetes tienen las siguientes propiedades

- Antisimetría
$$\{A, B\} = -\{B, A\}. \tag{2.17}$$
- Linealidad
$$\{A + B, C\} = \{A, C\} + \{B, C\}. \tag{2.18}$$
- Regla del producto
$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + \{A, C\}B. \tag{2.19}$$
- Identidad de Jacobi
$$\{\{A, B\}, C\} = \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\}. \tag{2.20}$$

Al emplear la definición (2.16), se puede mostrar que los corchetes entre las variables canónicas vienen dados por

$$\begin{aligned} \{\phi_I(\vec{x}), \phi_J(\vec{y})\} &= 0, \\ \{p^I(\vec{x}), p^J(\vec{y})\} &= 0, \\ \{\phi_I(\vec{x}), p^J(\vec{y})\} &= \delta^J{}_I \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Por otra parte, en función de los corchetes de Poisson, las ecuaciones de Hamilton(2.15) se pueden escribir así

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_I(\vec{x}, t) &= \{\phi_I(\vec{x}, t), H\}, \\ \dot{p}^I(\vec{x}, t) &= \{p^I(\vec{x}, t), H\}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

En general, para cualquier funcional del espacio de fases, su evolución temporal viene dada por

$$\dot{A}(\phi_I, p^J) = \int d^3x \left(\frac{\delta A(t)}{\delta \phi_I(\vec{x})} \dot{\phi}_I(\vec{x}) + \frac{\delta A(t)}{\delta p^J(\vec{x})} \dot{p}^J(\vec{x}) \right) = \{A, H\}. \tag{2.23}$$

A partir de la teoría de campos en la formulación Hamiltoniana en términos de los corchetes de Poisson, se pueden aplicar las reglas de cuantización de Dirac y así obtener la teoría cuántica correspondiente como veremos en la siguiente sección.

2.2. Reglas de cuantización de teorías de campos

Una teoría clásica de campos puede ser cuantizada aplicando las reglas introducidas por Dirac, que establecen lo siguiente (utilizando unidades naturales en donde $c = 1$ y $\hbar = 1$)

- Los campos pasan a ser operadores que toman valores sobre un espacio de Hilbert. Esto es

$$\begin{aligned} \phi_I &\rightarrow \hat{\phi}_I, \\ p^I &\rightarrow \hat{p}^I. \end{aligned} \tag{2.24}$$

- Los corchetes de Poisson de la teoría clásica pasan a ser conmutadores

$$\{,\} \rightarrow -i[,]. \tag{2.25}$$

- La evolución de los estados físicos estará dada por la Ecuación de Schrödinger [11]

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi\right\rangle = H\left|\Psi\right\rangle. \tag{2.26}$$

Se debe señalar que la formulación Hamiltoniana y las reglas de cuantización que se acaban de estudiar son válidas únicamente si todas las velocidades $\dot{\phi}_I$ se pueden escribir como función del espacio de fases (ϕ_I, p^I). Si esto no es posible significa que deben haber relaciones del tipo

$$\xi_m(\phi_I, p^I) = 0, \tag{2.27}$$

denominadas ligaduras primarias, que surgen de la ecuación (2.11) y que conducen a que no todas las variables del espacio de fases son independientes. En este caso se dice que el Lagrangiano es singular y ocurre que el determinante del Jacobiano de la transformación entre $\dot{\phi}_I$ y p^I es nulo. Esto es

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_I \partial\dot{\phi}_J} = 0. \tag{2.28}$$

En esa situación la formulación Hamiltoniana y las reglas de cuantización deben ser modificadas. En la siguiente sección estudiaremos el método de Dirac para encontrar el Hamiltoniano partiendo de Lagrangianos singulares y mas adelante veremos como se modifican las reglas de cuantización.

2.2.1. Formulación Hamiltoniana de Lagrangianos singulares mediante el método de Dirac

Para obtener las ecuaciones de movimiento de Hamilton cuando el Lagrangiano de la teoría es singular hay que enfrentar el problema de encontrar extremos de funcionales (en este caso el funcional acción S) sujeto a ligaduras. Esto se resuelve utilizando el método de multiplicadores de Lagrange, por lo que el principio de mínima acción se debe aplicar sobre

$$S = \int d^4x(p^I\dot{\phi}_I - \mathcal{H} - \lambda^m\xi_m), \tag{2.29}$$

donde λ^m son los multiplicadores de Lagrange. Nótese que aunque no todas las variables del espacio de fase son independientes ocurre que

$$\delta\mathcal{H} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_I}\delta\phi_I + \dot{\phi}_I\delta p^J - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_a\phi_I)}\right)\delta(\partial_a\phi_I), \tag{2.30}$$

de manera que siempre podrá considerarse la densidad Hamiltoniana como función de los campos, sus gradientes y de los momentos conjugados. De esta manera, aplicando el principio de mínima acción sobre (2.29) y considerando (2.30), se obtienen las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_I &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p^I} + \lambda^m\frac{\partial\xi_m}{\partial p^I}, \\
\dot{p}^I &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi_I} + \partial_a\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_a\phi_I} - \lambda^m\frac{\partial\xi_m}{\partial\phi_I}, \\
\xi_m[\phi_I, p^I] &= 0.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Debe señalarse que la última ecuación debe implementarse después de haber llevado a cabo todas las derivaciones en alguna expresión que involucre las ligaduras. Para ilustrar esta situación, supongamos la siguiente relación entre cantidades del espacio de fases

$$A(\phi, p) = \frac{\partial}{\partial\phi}\left(B(\phi, p) + \alpha_m(\phi, p)\xi_m(\phi, p)\right), \tag{2.32}$$

con ξ_m una ligadura. Entonces, al derivar se obtiene

$$A(\phi, p) = \frac{\partial}{\partial\phi}B(\phi, p) + \xi_m(\phi, p)\frac{\partial}{\partial\phi}\alpha_m(\phi, p) + \alpha_m(\phi, p)\frac{\partial}{\partial\phi}\xi_m(\phi, p). \tag{2.33}$$

Luego, aplicando $\xi_m = 0$ en esa solución final se llega a

$$A(\phi, p) = \frac{\partial}{\partial\phi}B(\phi, p) + \alpha_m(\phi, p)\frac{\partial}{\partial\phi}\xi_m(\phi, p). \tag{2.34}$$

Para recordar este hecho, Dirac[1, 7] introdujo la notación $\approx$ que significa "debilmente igual a". En este sentido las ligaduras se expresan

$$\xi_m \approx 0. \tag{2.35}$$

De lo dicho anteriormente es directo probar que las ecuaciones de Hamilton se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_I &= \frac{\delta\tilde{H}}{\delta p^I}, \\
\dot{p}^I &= -\frac{\delta\tilde{H}}{\delta\phi_I},
\end{aligned}$$

donde

$$\tilde{H} = \int d^3x\mathcal{H} + \int d^3x\lambda^m\xi_m = H + \int d^3x\lambda^m\xi_m, \tag{2.36}$$

se denomina Hamiltoniano total modificado.

En términos de los corchetes de Poisson las ecuaciones de Hamilton se escriben como

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_I &= \{\phi_I, \tilde{H}[\phi_I, p^I]\},\\ \dot{p^I} &= \{p^I, \tilde{H}[\phi_I, p^I]\},\\ \xi_m[\phi_I, p^I] &\approx 0.\end{aligned} \tag{2.37}$$

donde debe recordarse que la última ecuación se implementa después de haber resuelto los corchetes ya que estos contienen derivadas.

Como paso siguiente en el método de Dirac, es necesario imponer la preservación de las ligaduras en el tiempo, esto es[1, 7]:

$$\dot{\xi}_m = \{\xi_m, \tilde{H}\} \approx \{\xi_m, H\} + \lambda^n\{\xi_n, \xi_m\} \approx 0. \tag{2.38}$$

De lo anterior puede ocurrir que

1. Se obtenga una identidad $0 = 0$
2. Se obtenga una expresión para los multiplicadores $\lambda^m = \lambda^m(\phi_I, p^I)$
3. Surjan relaciones del tipo

   $$\gamma_k[\phi_I, p^I] = 0, \qquad\qquad k = 1, ..., K$$

   independientes de las ligaduras primarias. A estas ligaduras se les denomina secundarias.
4. Una inconsistencia

Si ocurre (1) o (2) termina el proceso de preservación de vínculos. Si se obtiene (3) se procede a la preservación de las ligaduras secundarias y puede ocurrir cualquiera de los casos anteriores. El proceso de preservación de vínculos termina cuando no se obtengan mas ligaduras secundarias. Si ocurre (4) la teoría debe ser descartada. Al final del proceso de preservación de ligaduras se tienen M ligaduras primarias y K ligaduras secundarias para un total de $M + K$ ligaduras. Sin embargo, como la distinción entre primarias y secundarias no será relevante en discusiones futuras, convendremos en decir que el número total de ligaduras es M y que todas las ligaduras cumplen con

$$\xi_m \approx 0. \tag{2.39}$$

De esta manera, finalizado el proceso de preservación de vínculos, las ecuaciones de Hamilton del sistema son (2.37).

El conjunto total de ligaduras puede ser dividido en ligaduras de primera y segunda clase, que como veremos mas adelante juegan un papel mas relevante en el programa de cuantización de Dirac. Una cantidad Σ con valores en el espacio de fases se dice que es de primera clase si tiene corchete de Poisson debilmente igual a cero con todas las demás ligaduras de la teoría[1, 7]. Esto es, aquellas que cumplen con

$$\{\Sigma, \xi_m[\phi_I, p^I]\} \approx 0 \qquad\qquad \forall m. \tag{2.40}$$

Por otra parte, si una cantidad Σ tiene corchete de Poisson no nulo con al menos una de las ligaduras del conjunto, se dirá que la misma es de segunda clase[1, 7]. Es decir

$$\{\Sigma, \xi_m[\phi_I, p^I]\} \not\approx 0 \qquad \text{para al menos un } m. \tag{2.41}$$

Con las definiciones anteriores podemos ahora dividir en dos grupos el conjunto de todas las ligaduras como sigue

- Las ligaduras de primera clase, que denotaremos como ψ_α, son

  $$\psi_\alpha[\phi_I, p^I] \approx 0 \qquad \alpha = 1, ..., A. \tag{2.42}$$

  Se debe señalar que las ligaduras de primera clase estan relacionadas con la invariancia local que posee la teoría, es decir, son las generadoras de las transformaciones de calibre de los campos[1]. El generador viene dado por

  $$\Phi = \int d^3x \Lambda^\alpha \psi_\alpha, \tag{2.43}$$

  donde Λ^α son funciones arbitrarias a determinar y ψ_α son todas las ligaduras de primera clase del sistema. Este resultado es conocido como la conjetura de Dirac[1].

- Las ligaduras de segunda clase las denotaremos como θ_β, es decir

  $$\theta_\beta[\phi_I, p^I] \approx 0 \qquad \beta = 1, ..., B = M - A. \tag{2.44}$$

El próximo paso en nuestro programa es establecer las reglas de cuantización para teorías con ligaduras como veremos a continuación.

2.2.2. Reglas de cuantización para teorías con ligaduras

En esta sección estableceremos las reglas de cuantización para los casos en que las teorías de campos poseen ligaduras de primera y segunda clase.

Si todas las ligaduras son de primera clase, las reglas de cuantización son (utilizando unidades naturales)

- Las variables canónicamente conjugadas pasan a ser operadores que toman valores en un espacio de Hilbert

  $$\phi_I \to \hat{\phi}_I, \tag{2.45}$$
  $$p^I \to \hat{p}^I. \tag{2.46}$$

- El conmutador entre las variables canónicas se puede obtener de los corchetes clásicos de la siguiente manera

  $$\{\phi_I, p^J\} \to -i\left[\hat{\phi}_I, \hat{p^J}\right], \tag{2.47}$$

  donde el commutador debe cumplir

  $$\left[\hat{\phi}_I(\vec{x}), \hat{p^J}(\vec{y})\right] = i\delta^J{}_I \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \tag{2.48}$$

- Se considerán kets físicos de la teoría aquellos que cumplen con

$$\psi_\alpha[\phi_I, p^I]\,|\Psi\rangle = 0 \qquad\qquad \forall\alpha, \tag{2.49}$$

  es decir, los estados físicos $|\Psi\rangle$, que son funcionales de onda, son aquellos tales que son aniquilados por las ligaduras de primera clase. De tal manera que el espacio de Hilbert físico es un subespacio del original.

- La evolución de los estados físicos vendrá dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi\rangle = \tilde{H}\,|\Psi\rangle\,, \tag{2.50}$$

  donde $\tilde{H}$ estará dado por la relación (2.36). Resolviendo la ecuación de Schrödinger para un Hamiltoniano $\tilde{H}$ encontramos la evolución de los estados físicos en el tiempo. Es importante resaltar que la presencia de (2.49) implica que (2.50) será

$$i\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi\rangle = H\,|\Psi\rangle\,. \tag{2.51}$$

Si hay ligaduras de segunda clase se procede de la siguiente manera. En primer lugar se construye la matriz $C_{ss'}$ cuyos elementos estarán dados por

$$C_{ss'}(\vec{x},\vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \{\theta_1(\vec{x}),\theta_2(\vec{y})\} & \{\theta_1(\vec{x}),\theta_3(\vec{y})\} & \cdots & \{\theta_1(\vec{x}),\theta_s(\vec{y})\} \\ \{\theta_2(\vec{x}),\theta_1(\vec{y})\} & 0 & \{\theta_2(\vec{x}),\theta_3(\vec{y})\} & \cdots & \{\theta_2(\vec{x}),\theta_s(\vec{y})\} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \{\theta_{s'}(\vec{x}),\theta_1(\vec{y})\} & \{\theta_{s'}(\vec{x}),\theta_2(\vec{y})\} & \{\theta_{s'}(\vec{x}),\theta_3(\vec{y})\} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar, la matriz $C_{ss'}$ es antisimétrica por construcción y su determinante no es igual a cero, ni siquiera debilmente[1, 7]. Esto se debe a que $C_{ss'}$ es antisimétrica y todo determinante de cualquier matriz antisimétrica es cero si la dimensión de la misma es impar. El próximo paso en el programa es calcular la inversa de la matriz $C_{ss'}$, y con ella, construir los corchetes de Dirac que se definen como[1, 7, 11]

$$\{A(\vec{x'}),B(\vec{y'})\}^* = \{A(\vec{x'}),B(\vec{y'})\} - \int d^3x \int d^3y \{A(\vec{x'}),\theta_s(\vec{x})\}C^{-1}_{ss'}(\vec{x},\vec{y})\{\theta_{s'}(\vec{y}),B(\vec{y'})\}. \tag{2.52}$$

Se puede demostrar que los corchetes de Dirac cumplen con las propiedades usuales de los corchetes de Poisson, es decir

- Antisimetría
$$\{A,B\}^* = -\{B,A\}^*. \tag{2.53}$$

- Linealidad
$$\{A+B,C\}^* = \{A,C\}^* + \{B,C\}^*. \tag{2.54}$$

- Regla del producto
$$\{A,BC\}^* = \{A,B\}^*C + \{A,C\}^*B. \tag{2.55}$$

- Identidad de Jacobi

$$\{\{A,B\}^*,C\}^* = \{\{B,C\}^*,A\}^* + \{\{C,A\}^*,B\}^*. \tag{2.56}$$

Además de estas propiedades, se tiene que

- Si f es una cantidad de primera clase, entonces

$$\{g,f\}^* = \{g,f\},$$

es decir, el corchete de Dirac coincide con el corchete de Poisson. Esto se debe a que al desarrollar el corchete de Dirac existe un término igual a

$$\{g(\vec{x'}), f(\vec{y'})\}^* = \{g(\vec{x'}), f(\vec{y'})\} - \int d^3x \int d^3y \{g(\vec{x'}), \theta_s(\vec{x})\} C^{-1}_{ss'}(\vec{x},\vec{y}) \{\theta_{s'}(\vec{y}), f(\vec{y'})\},$$

que se anula ya que $\{\theta_{s'}(\vec{y}), f(\vec{y'})\} = 0$, por ser f una cantidad de primera clase. Esto implica que la evolución estará descrita por

$$\dot{g} = \{g, \tilde{H}\}^* = \{g, \tilde{H}\}, \tag{2.57}$$

ya que el Hamiltoniano $\tilde{H}$ es de primera clase.

- Se cumple que $\{\theta_a, \Pi\}^* = 0$, donde Π es cualquier función del espacio de fases. Para demostrar esta propiedad desarrollamos el corchete de Dirac (2.52)

$$\begin{aligned} \{\theta_a(\vec{x'}), \Pi(\vec{y'})\}^* &= \{\theta_a(\vec{x'}), \Pi(\vec{y'})\} - \int d^3x \int d^3y \{\theta_a(\vec{x'}), \theta_s(\vec{x})\} C^{-1}_{ss'}(\vec{x},\vec{y}) \{\theta_{s'}(\vec{y}), \Pi(\vec{y'})\} \\ &= \{\theta_a(\vec{x'}), \Pi(\vec{y'})\} - \int d^3x \int d^3y C_{as}(\vec{x'},\vec{x}) C^{-1}_{ss'}(\vec{x},\vec{y}) \{\theta_{s'}(\vec{y}), \Pi(\vec{y'})\}, \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} \{\theta_a(\vec{x'}), \Pi(\vec{y'})\}^* &= \{\theta_a(\vec{x'}), \Pi(\vec{y'})\} - \int d^3x \int d^3y \delta^{s'}{}_a \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \{\theta_{s'}(\vec{y}), \Pi(\vec{y'})\} \\ &= \{\theta_a(\vec{x'}), \Pi(\vec{y'})\} - \{\theta_a(\vec{x'}), \Pi(\vec{y'})\} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Esta propiedad nos indica que el corchete de Dirac entre las ligaduras de segunda clase y cualquier función del espacio de fases es cero, lo que implica que las ligaduras pueden ser consideradas como igualdades fuertes

$$\theta_s[\phi_I, p^I] \approx 0 \rightarrow \theta_s[\phi_I, p^I] = 0. \tag{2.59}$$

En este caso las reglas de cuantización son

- Las variables canónicamente conjugadas pasan a ser operadores que toman valores en un espacio de Hilbert

$$\phi_I \rightarrow \hat{\phi}_I, \tag{2.60}$$
$$p^I \rightarrow \hat{p}^I. \tag{2.61}$$

- El conmutador entre las variables canónicas se puede obtener de los corchetes de Dirac como

$$\{\phi_I, p^I\}^* \rightarrow -i\left[\hat{\phi}_I, \hat{p}^I\right], \tag{2.62}$$

donde se debe satisfacer (2.48).

- Se consideran kets físicos de la teoría aquellos que cumplen con

$$\psi_\alpha[\phi_I, p^J]\,|\Psi\rangle = 0 \qquad\qquad \forall\alpha, \tag{2.63}$$

donde observamos como nuevamente los estados físicos son tales que son aniquilados por las ligaduras de primera clase. Estos estados representan un subespacio del espacio de Hilbert.

- La evolución de los estados físicos estará dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi\rangle = \tilde{H}\,|\Psi\rangle\,. \tag{2.64}$$

- Los operadores correspondientes a las ligaduras de segunda clase deben ser cero en virtud de que los corchetes de Dirac ya están establecidos.

Ya establecidas las bases del método de Dirac, en la siguiente sección procedemos a desarrollar la formulación Canónica para la Electrodinámica clásica sin fuentes en $D = (3+1)$ dimensiones, aplicando dicho método a manera de ejemplo.

CAPÍTULO 3

FORMULACIÓN HAMILTONIANA PARA LA ELECTRODINÁMICA CLÁSICA SIN FUENTES EN D=(3+1) DIMENSIONES

El Campo Electromagnético está descrito por un conjunto de ecuaciones fundamentales conocidas como las ecuaciones de Maxwell[10, 11, 12]. Las mismas relacionan dos campos vectoriales tridimensionales: el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x},t)$ y el campo magnético $\vec{B}(\vec{x},t)$, las cuales describen los fenómenos de origen electromagnético en la naturaleza. A nivel de teoría de campos, la Electrodinámica clásica, es una teoría de calibre Abeliana que esta formulada en función de un cuadripotencial A_μ que transforma bajo la representación de espin 1 del grupo de Lorentz, cuyas componentes estan representadas por el potencial escalar ϕ y el vectorial $\vec{A}$. Es posible expresar las ecuaciones de Maxwell de manera que se manifieste la covariancia Lorentz. Para ello se introduce un tensor de tipo $\binom{0}{2}$ llamado tensor de campo Electromagnético $F_{\mu\nu}$ cuyas componentes representan los campos eléctricos y magnéticos respectivamente[10, 11, 13]. Con este tensor podemos construir una acción (que por construcción es un escalar de Lorentz) donde, al aplicar el principio variacional reproduzca las ecuaciones de Maxwell[13].

La Electrodinámica clásica presenta dos simetrías fundamentales, una de ellas es la simetría Lorentz que condujo a la Relatividad Especial y la segunda la simetría bajo transformaciones de calibre locales, que resulta de gran interés a nivel de interacciones fundamentales[10]. La última simetría está relacionada con el hecho de que al realizar la cuantización Canónica y postular que la evolución de los estados físicos está dada por la ecuación de Schrödinger, tendremos que la solución de la misma representa los estados cuánticos para el fotón, que es justamente el bosón de calibre mediador de las interacciones electromagnéticas[2, 10, 11]. Aparte de estas simetrías, encontramos que la teoría exhibe dualidad entre los campos eléctricos y magnéticos, la cual consiste en rotaciones que pertenecen al grupo especial ortogonal en dos dimensiones $SO(2)$, que intercambian el tensor de campo $F_{\mu\nu}$ con su dual $*F_{\mu\nu}$.

Este capítulo esta dedicado a la formulación Hamiltoniana de Lagrangianos singulares, que estudiamos anteriormente, para la Electrodinámica clásica sin fuentes en $D = 3 + 1$ dimensiones. Obtendremos la dinámica de la teoría para el caso de tener presentes ligaduras de primera clase. Posterior a esto, teniendo la dinámica dada por el Hamiltoniano y las ligaduras de primera clase, se fijará el calibre de Coulomb con la intención de eliminar los grados de libertad no relevantes de la teoría y con esto proceder a escribir los corchetes de Dirac entre los campos dinámicos de la teoría.

Al final del capítulo presentaremos una Formulación Canónica alternativa para la Electrodinámica que conduce a los mismos corchetes de Dirac entre las variables canónicamente conjugadas y que consiste en tomar al campo A_0 como multiplicador de Lagrange en vez de una variable dinámica de la teoría.

Para encontrar el Hamiltoniano de la teoría, partimos de la acción de Maxwell sin fuentes en $D = 3 + 1$ dimensiones[10, 11, 12, 13]

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \int d^4x \mathcal{L}, \tag{3.1}$$

donde $\mathcal{L}$ es la densidad Lagrangiana, $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{3.2}$$

y A_μ son los cuadripotenciales de la teoría, donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Debe señalarse además que en los cálculos realizados en este capítulo se utilizará la métrica $\eta_{\mu\nu} = diag(-+++)$.

Para leer claramente las velocidades y así poder definir los momentos conjugados para pasar a la formulación Hamiltoniana, hacemos la descomposición en $D = 3+1$ dimensiones de la densidad Lagrangiana, obteniendo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F_{0a}F^{0a} - \frac{1}{4}F^{ab}F_{ab}, \tag{3.3}$$

donde

$$\begin{aligned} F^{ao} &= E^a, \\ B^a &= \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}F_{bc}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

y $a, b = 1, 2, 3$. Luego los momentos conjugados serán

$$\begin{aligned} p^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0, \\ p^a &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_a} = E^a \Rightarrow \dot{A}_a = E^a + \partial_a A_0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Como se puede observar la igualdad para el momentum conjugado p^0 constituye una ligadura primaria en virtud de que no es posible despejar $\dot{A}_0$ en función del momento conjugado p^0 o de $\partial_a A_\mu$. Esta ligadura será denotada como

$$\xi_1 = p^0 \approx 0. \tag{3.6}$$

En términos del momento conjugado E^a y de las componentes espaciales del tensor de campo $F_{\mu\nu}$, la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$ se escribe

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\dot{A}_a - \partial_a A_0\right)\left(\dot{A}^a - \partial^a A^0\right) - \frac{1}{4}F^{ab}F_{ab} \\ &= \frac{1}{2}E^a E^a - \frac{1}{4}F^{ab}F_{ab}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Lo próximo es obtener la densidad Hamiltoniana a partir de (3.7) mediante una transformación de Legendre, es decir

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= E^a\dot{A}_a - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}\left[E^aE^a + \frac{1}{2}F^{ab}F_{ab}\right] + E^a\partial_a A_0 = \frac{1}{2}\left[|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right] + E^a\partial_a A_0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Luego integrando la densidad Hamiltoniana en todo el espacio, se obtiene el Hamiltoniano total de la teoría

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\left[E^aE^a + \frac{1}{2}F^{ab}F_{ab}\right] - A_0\partial_a E^a\right), \tag{3.9}$$

de manera que el Hamiltoniano modificado que contiene la ligadura primaria (3.6) es

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= H + \lambda^1\xi_1 \\ &= \frac{1}{2}\left[|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right] - A_0\partial_a E^a + \lambda^1\xi_1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

A este nivel las ecuaciones de movimiento del sistema son

$$\begin{aligned}\dot{A}_a &= \{A_a, \tilde{H}\}, \\ \dot{E}^a &= \{E^a, \tilde{H}\}, \\ \xi_1 &\approx 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

con el álgebra fundamental entre las variables canónicas dada por

$$\begin{aligned}\{A_a(\vec{x}), A_b(\vec{y})\} &= \{E^a(\vec{x}), E^b(\vec{y})\} = 0, \\ \{A_0(\vec{x}), E^0(\vec{y})\} &= \delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\ \{A_a(\vec{x}), E^b(\vec{y})\} &= -\{E^b(\vec{y}), A_a(\vec{x})\} = \delta^b{}_a\delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Procedemos a preservar la ligadura (3.6) en el tiempo

$$\dot{\xi}_1 \approx \{\xi_1(\vec{x}), \tilde{H}(\vec{y})\} \approx 0. \tag{3.13}$$

De lo anterior se obtiene

$$\partial_a^{\vec{x}} E^a(\vec{x}) \approx 0. \tag{3.14}$$

Esta igualdad constituye una ligadura secundaria que denotaremos como

$$\xi_2 = \partial_a^{\vec{x}} E^a(\vec{x}) \approx 0. \tag{3.15}$$

Esta ligadura secundaria, conocida como la ligadura de Gauss, indica que el campo eléctrico debe ser trasverso. La preservación de esta ligadura secundaria conduce a

$$\dot{\xi}_2 = \{\partial_a^{\vec{x}} E^a(\vec{x}), \tilde{H}(\vec{y})\} \approx 0, \tag{3.16}$$

de donde se obtiene una igualdad $0 = 0$. Ahora, como no se obtienen mas ligaduras, el proceso de preservación de las mismas termina aquí. Si se calcula el corchete de Poisson entre las ligaduras obtenidas, notamos que

$$\{\xi_1(\vec{x}), \xi_2(\vec{y})\} = \{p^0(\vec{x}), \partial_a^{\vec{y}} E^a(\vec{y})\} = 0, \tag{3.17}$$

de donde se concluye que son de primera clase. Esto hace que el Hamitoniano $\tilde{H}$ sea también de primera clase. Por otro lado estas ligaduras generan las transformaciones de calibre local de la teoría. Para ver esto, procedemos a definir el generador

$$\Phi = \int d^3x(\Lambda^1\xi_1 + \Lambda^2\xi_2), \tag{3.18}$$

donde Λ^1 y Λ^2 son funciones. Ahora, sustituyendo las ligaduras en el generador obtenemos

$$\Phi = \int d^3x(\Lambda^1 p^0 + \Lambda^2\partial_a E^a), \tag{3.19}$$

Con lo anterior calculamos la transformación de calibre del campo A_a

$$A'_a = A_a + \delta_\Phi A_a, \tag{3.20}$$

donde

$$\delta_\Phi A_a = \{A_a(\vec{x}), \Phi(\vec{y})\} = \partial_a^{\vec{x}}\Omega(\vec{x}).$$

con $-\Lambda(\vec{x}) = \Omega(\vec{x})$. De esta manera

$$A_a^{'} = A_a + \partial_a\Omega, \tag{3.21}$$

que es justamente la transformación de calibre usual para el campo A_a. Si se realiza el mismo procedimiento para el campo E^a, encontramos

$$E'^a = E^a + \delta_\Phi E^a, \tag{3.22}$$

donde

$$\delta_\Phi E^a = \{E^a(\vec{x}), \Phi(\vec{y})\} = 0, \tag{3.23}$$

de manera que E^a es invariante de calibre y por lo tanto un observable en Electrodinámica.

Para resumir lo que hemos obtenido en esta sección, podemos decir que al realizar la formulación Hamiltoniana de la Electrodinámica clásica siguiendo el método de Dirac se obtiene un conjunto de ligaduras de primera clase que generan las transformaciones de calibre local de la teoría. En la siguiente sección realizaremos una fijación de calibre con la finalidad de obtener un conjunto de ligaduras de segunda clase y así una descripción de la teoría en términos de los verdaderos grados de libertad.

3.1. Ligaduras de segunda clase y corchetes de Dirac para la Electrodinámica clásica

En esta sección procederemos a la fijación de calibre de los campos de la Electrodinámica. Como se sabe[1], siempre se pueden escoger tantas ligaduras de fijación de calibre como ligaduras de primera clase existan, esto con el fin de eliminar todos los grados de libertad espúrios de la teoría, además de conducir a un conjunto de ligaduras de segunda clase. Inspirados en la ligadura de Gauss, convendremos en fijar el calibre de Coulomb que implica que la parte espacial del campo de calibre A_μ es trasverso. El calibre de Coulomb es

$$\partial^a A_a = 0. \tag{3.24}$$

Previo a la fijación del calibre de Coulomb, es necesario verificar que se cumplan tres requerimientos fundamentales. El primero es que el parámetro Ω en la transformación de calibre (3.21) del campo A_a exista y sea único. El segundo requerimiento es que el calibre se preserve en el tiempo y por último, que la fijación debe ser consistente con las ecuaciones de movimiento para los campos A_a y E^a.

Para verificar el primer requerimiento, partimos de la transformación de calibre (3.21) para el campo A_a

$$A_a^{'} = A_a + \partial_a \Omega.$$

Si tomamos la divergencia en la expresión anterior y utilizamos el calibre de Coulomb, obtenemos

$$\partial^a A_a = -\partial^a \partial_a \Omega,$$

de manera tal que el parámetro de la transformación existe, es único y esta dado por

$$\Omega = -\nabla^{-2} \partial^a A_a, \tag{3.25}$$

donde ∇^{-2} representa el inverso del operador Laplaciano, esto es

$$\nabla^{-2} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3x}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \tag{3.26}$$

Verifiquemos la segunda situación donde se exige que el calibre se preserve en el tiempo, para ello

$$\{\partial_{\vec{x}}^a A_a(\vec{x}), H(\vec{y})\} = 0, \tag{3.27}$$

es decir

$$\{\partial_{\vec{x}}^a A_a(\vec{x}), H(\vec{y})\} = \partial_b^{\vec{x}} E^b(\vec{x}) - \nabla_{\vec{x}}^2 A_0(\vec{x}),$$

donde al utilizar la ligadura de Gauss y en vista de que los campos tienden a cero en el infinito espacial, obtenemos que al exigir que el calibre de Coulomb se preserve en el tiempo, necesariamente se tiene que cumplir que para todo tiempo t

$$A_0 = 0. \tag{3.28}$$

Por último veamos que al fijar calibre no entramos en contradicción con las ecuaciones canónicas de movimiento. Para ello, las ecuaciones de movimiento (3.11) para los campos A_a y E^a en el calibre de Coulomb se reducen a

$$\begin{aligned} \dot{A}_a &= E^a, \\ \dot{E}^a &= -\nabla^{-2} A_a. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Al tomar la divergencia de la ecuación de movimiento para el campo A_a, observamos

$$\partial^a \dot{A}_a = \partial_a E^a, \tag{3.30}$$

donde ambos lados de la ecuación son cero. El izquierdo en virtud del calibre de Coulomb ya que podemos expresar dicho término como $\partial_0(\partial^a A_a)$, y el derecho por la ligadura de Gauss.
Tomando la divergencia de la ecuación de movimiento para el campo E^a, obtenemos

$$\partial_a \dot{E}^a = -\nabla^{-2} \partial^a A_a, \tag{3.31}$$

donde se observa que el lado izquierdo se puede expresar como $\partial_0(\partial_a E^a)$, que es igual a cero en virtud de la ligadura de Gauss. Por otra parte, el lado derecho tambien se anula debido al calibre de Coulomb. Esto demuestra entonces que la escogencia del calibre de Coulomb no contradice las ecuaciones de movimiento para los campos dinámicos de la teoría E^a y A_a, con lo que se completa los tres requerimientos planteados al momento de fijar calibre.

De la fijación de calibre se obtiene entonces el conjunto de ligaduras

$$\begin{aligned} \theta_1 &= p^0 \approx 0, \\ \theta_2 &= \partial_a E^a \approx 0, \\ \theta_3 &= A_0 \approx 0, \\ \theta_4 &= \partial^a A_a \approx 0, \end{aligned} \tag{3.32}$$

que son de segunda clase, en virtud de que

$$\begin{aligned} \{\theta_2, \theta_4\} &= \nabla^2_{\vec{x}} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\theta_1, \theta_3\} &= -\delta^3(x - y). \end{aligned} \tag{3.33}$$

El próximo paso en el programa para tratar teorías con ligaduras de segunda clase, consiste en construir la matriz de Dirac que, utilizando los corchetes entre las ligaduras (3.33) viene dada por

$$C_D(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla^2_{\vec{x}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nabla^2_{\vec{x}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}).$$

Ahora para escribir los corchetes de Dirac es necesario encontrar la inversa de la matriz anterior, la cual obtendremos de la siguiente manera. Sea $C_{ss'}$ los elementos de $C_D(\vec{x}, \vec{y})$ y $(C_{s's''}(\vec{z}, \vec{y}))^{-1}$ los de la inversa $C_D(\vec{x}, \vec{y})^{-1}$, entonces debe cumplirse que

$$\int d^3 z (C_{ss'}(\vec{x}, \vec{z}))(C_{s's''}(\vec{z}, \vec{y}))^{-1} = \delta^s{}_{s''} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \tag{3.34}$$

Al realizar la multiplicación de matrices (3.34), se encuentra que los elementos de matriz $(C_{s's''}(\vec{z},\vec{y}))^{-1}$ distintos de cero y que cumplen con lo anterior, deben ser de la forma

$$\begin{aligned} C_{13}(\vec{x},\vec{y})^{-1} &= \alpha\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\ C_{24}(\vec{x},\vec{y})^{-1} &= \beta\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\ C_{31}(\vec{x},\vec{y})^{-1} &= \gamma\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\ C_{42}(\vec{x},\vec{y})^{-1} &= \rho\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \end{aligned} \tag{3.35}$$

con α,β,γ y ρ escalares a determinar. Para encontrar α, sustituimos el elemento de matriz $C_{13}(\vec{x},\vec{y})^{-1}$ en la relación (3.34)

$$\begin{aligned} \int d^3z(C_{31}(\vec{x},\vec{z}))(C_{13}(\vec{z},\vec{y}))^{-1} &= \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ \int d^3z(\delta^3(\vec{x}-\vec{z}))(\alpha\delta^3(\vec{z}-\vec{y})) &= \delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \end{aligned} \tag{3.36}$$

de donde se observa que

$$\alpha = 1, \tag{3.37}$$

por lo que el elemento de matriz $C_{13}(\vec{x},\vec{y})^{-1}$ es

$$C_{13}(\vec{x},\vec{y})^{-1} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \tag{3.38}$$

Ahora, para determinar β, sustituimos el elemento de matriz $C_{24}(\vec{x},\vec{y})^{-1}$ en la relación (3.34)

$$\begin{aligned} \int d^3z(C_{42}(\vec{x},\vec{z}))(C_{24}(\vec{z},\vec{y}))^{-1} &= \delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\ \int d^3z(-\nabla^2_{\vec{x}}\delta^3(\vec{x}-\vec{z}))(\beta\delta^3(\vec{z}-\vec{y})) &= \delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \end{aligned} \tag{3.39}$$

de donde

$$\beta = -\nabla^{-2}_{\vec{z}}, \tag{3.40}$$

y de esta manera, el elemento de matriz $C_{24}(\vec{x},\vec{y})^{-1}$ será entonces

$$C_{24}(\vec{x},\vec{y})^{-1} = -\nabla^{-2}_{\vec{x}}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \tag{3.41}$$

donde el operador ∇^{-2} se entiende como el inverso del operador laplaciano, esto es

$$\nabla^{-2}_{\vec{x}}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}.$$

Luego, como la matriz de Dirac es antisimétrica, se sigue inmediatamente que

$$\begin{aligned} \gamma &= -1, \\ \rho &= \nabla^{-2}_{\vec{z}}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

por lo que los elementos de matriz inversos restantes serán

$$\begin{aligned} C_{31}(\vec{x},\vec{y})^{-1} &= -\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\ C_{42}(\vec{x},\vec{y})^{-1} &= \nabla^{-2}_{\vec{x}}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Finalmente la inversa de la matriz de Dirac es

$$C_D{}^{-1}(\vec{x},\vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla_{\vec{x}}^{-2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_{\vec{x}}^{-2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}).$$

Procedemos a calcular los corchetes de Dirac a tiempos iguales entre los campos dinámicos de la teoría A_a y E^a, Los mismos definidos en (2.2.2) son

$$\{A(\vec{x'}),B(\vec{y'})\}^* = \{A(\vec{x'}),B(\vec{y'})\} - \int d^3x \int d^3y \{A(\vec{x'}),\theta_s(\vec{x})\} C^{-1}_{ss'}(\vec{x},\vec{y})\{\theta_{s'}(\vec{y}),B(\vec{y'})\},$$

entonces

$$\begin{aligned} \{A_a(\vec{x'}),E^b(\vec{y'})\}^* &= \{A_a(\vec{x'}),E^b(\vec{y'})\} \\ &- \int d^3x \int d^3y \{A_a(\vec{x'}),\theta_1(\vec{x})\} C^{-1}_{13}(\vec{x},\vec{y})\{\theta_3(\vec{y}),E^b(\vec{y'})\} \\ &- \int d^3x \int d^3y \{A_a(\vec{x'}),\theta_2(\vec{x})\} C^{-1}_{24}(\vec{x},\vec{y})\{\theta_4(\vec{y}),E^b(\vec{y'})\} \\ &- \int d^3x \int d^3y \{A_a(\vec{x'}),\theta_3(\vec{x})\} C^{-1}_{31}(\vec{x},\vec{y})\{\theta_1(\vec{y}),E^b(\vec{y'})\} \\ &- \int d^3x \int d^3y \{A_a(\vec{x'}),\theta_4(\vec{x})\} C^{-1}_{42}(\vec{x},\vec{y})\{\theta_2(\vec{y}),E^b(\vec{y'})\}, \end{aligned}$$

donde al resolver cada uno de los corchetes de Poisson involucrados, obtenemos finalmente

$$\{A_a(\vec{x'}),E^b(\vec{y'})\}^* = (\delta^b{}_a - \delta^0{}_a\delta^b{}_0)\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - \partial^{\vec{x}}_a\partial^b_{\vec{y}}\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}, \tag{3.44}$$

además de

$$\{A_a(\vec{x'}),A^b(\vec{y'})\}^* = \{E_a(\vec{x'}),E^b(\vec{y'})\}^* = 0. \tag{3.45}$$

En virtud de que los corchetes de Dirac entre las ligaduras de segunda clase y cualquier función del espacio de fases es cero, procedemos a fijar el conjunto de ligaduras como igualdades fuertes

$$\begin{aligned} \theta_1 &= p^0 = 0, \\ \theta_2 &= \partial_a E^a = 0, \\ \theta_3 &= A_0 = 0, \\ \theta_4 &= \partial^a A_a = 0. \end{aligned} \tag{3.46}$$

De esta manera, el Hamiltoniano de la teoría tendrá la siguiente forma

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x \left[|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right], \tag{3.47}$$

y las ecuaciones de movimiento del sistema serán

$$\begin{aligned} &\dot{A}_a = \{A_a,H\}^* = \{A_a,H\}, \\ &\dot{E}^a = \{E^a,H\}^* = \{E^a,H\}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

En la siguiente sección estudiaremos una forma alternativa para la aplicación del método de Dirac que conduce a un conjunto reducido de segunda clase, lo que hace mas fácil encontrar los corchetes de Dirac de la teoría.

3.2. Formulación Alternativa de la Electrodinámica Clásica. Reglas de cuantización.

En esta sección construiremos una formulación alternativa para la Electrodinámica que conducirá a los mismos corchetes de Dirac obtenidos en la sección anterior. Para ello no consideraremos al potencial A_0 como variable dinámica, ya que al realizar la descomposicion en $D = (3+1)$ dimensiones de la densidad Lagrangiana, no aparecen derivadas temporales de dicho campo. De esta manera solo se obtiene el momentum conjugado asociado al potencial A_a, donde al aplicar el principio de mínima acción en

$$S = \int d^4x(E^a\dot{A}_a - \mathcal{H}),$$

con

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right) - A_0\partial_a E^a. \tag{3.49}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{A}_a &= E_a(\vec{x}) - \partial_a^{\vec{x}} A_0(\vec{x}), \\ \dot{E}^a &= -\nabla_{\vec{x}}^2 A^a(\vec{x}) + \partial_{\vec{x}}^b \partial_{\vec{x}}^a A_b(\vec{x}), \\ \partial_a E^a &\approx 0. \end{aligned} \tag{3.50}$$

La última ecuación del conjunto anterior corresponde a la ligadura de Gauss y puede probarse que se preserva en el tiempo y que es de primera clase. Ahora, si fijamos el calibre de Coulomb el conjunto de ligaduras

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \partial_a E^a \approx 0, \\ \theta_2 &= \partial^a A_a \approx 0, \end{aligned} \tag{3.51}$$

será de segunda clase.

Luego la matriz de Dirac vendrá dada por

$$C_D(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \nabla_{\vec{x}}^2 \\ -\nabla_{\vec{x}}^2 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

que es un matriz 2×2 y no 4×4 como se obtuvo anteriormente. Para hallar su inversa, se seguirá la misma estrategia de la sección anterior, con la ventaja de que la cantidad de ligaduras de segunda clase es menor. Al usar (3.34) se obtiene que

$$\begin{aligned} C_{12}(\vec{x}, \vec{y})^{-1} &= \alpha\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ C_{21}(\vec{x}, \vec{y})^{-1} &= \rho\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \tag{3.52}$$

con α y ρ escalares a determinar. Puede mostrarse que $\alpha = -\nabla_{\vec{z}}^{-2}$ y en virtud de que la matriz de Dirac es antisimétrica se sigue inmediatamente que $\rho = -\alpha = \nabla_{\vec{z}}^{-2}$. De lo anterior

$$C_D{}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla_{\vec{x}}^{-2} \\ \nabla_{\vec{x}}^2 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

Al calcular los corchetes de Dirac se obtiene

$$\begin{aligned} \{A_a(\vec{x'}), E^b(\vec{y'})\}^* &= \delta^b{}_a \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - \partial_a^{\vec{x}} \partial_{\vec{y}}^b \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}, \\ \{A_a(\vec{x'}), A^b(\vec{y'})\}^* &= \{E_a(\vec{x'}), E^b(\vec{y'})\}^* = 0, \end{aligned} \tag{3.53}$$

que coinciden con (3.44) y (3.45), donde se consideró al potencial A_0 como variable dinámica de la teoría.

En vista de las propiedades que satisfacen los corchetes de Dirac señaladas en (2.2.2), el conjunto de ligaduras de segunda clase (3.51) pueden ser consideradas como igualdades fuertes, esto es

$$\begin{aligned} \partial_a E^a &= 0, \\ \partial^a A_a &= 0. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Llegado a este punto donde estan establecidos los corchetes de Dirac, las reglas de cuantización serán (usando unidades naturales)

- Los campos dinámicos de la teoría pasan a ser operadores cuyo dominio toman valores en un espacio de Hilbert

$$\begin{aligned} A_a &\rightarrow \hat{A}_a \\ E^a &\rightarrow \hat{E}^a \end{aligned}$$

- El conmutador de la teoría cuántica se obtiene de los corchetes de Dirac como

$$\{A_a, E^b\}^* \rightarrow -i[\hat{A}_a, \hat{E}^b],$$

- Los kets físicos de la teoría son aquellos que son aniquilados por las ligaduras de primera clase, es decir

$$\partial_a E^a |\Psi\rangle = 0.$$

  donde la evolución de los estados físicos vendrá dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \tilde{H}|\Psi\rangle .$$

- Los operadores correspondientes a las ligaduras de segunda clase son cero en virtud que los corchetes de Dirac entre los campos dinámicos (3.53) ya estan establecidos.

Para resumir lo obtenido en esta sección podemos decir que se hizó una descripción de la Electrodinámica clásica con ligaduras de segunda clase, obteniendo los corchetes de Dirac y las reglas de cuantización en este caso. Los grados de libertad físicos de la teoría residen en la parte trasversa de los campos A_a y E^a, donde el potencial A_0 es el multiplicador de Lagrange para la ligadura de Gauss.
Aunque los corchetes de Dirac siguiendo ambas formulaciones resultaron ser totalmente equivalentes, la ventaja de seguir la metodología de esta sección radica que al considerar

los verdaderos grados de libertad, el rango de la matriz de Dirac es menor, lo que conlleva a que el cálculo de su inversa (y con ella, la obtención de los corchetes de Dirac), sea más sencillo de realizar. Por esta razón, llevaremos a cabo esta formulación alternativa en el siguiente capítulo, cuando estudiemos la formulación Hamiltoniana en Gravedad Linealizada, que conducirá a invertir una matriz $4{\times}4$ en vez de una 8×8, y que corresponde al problema central de este trabajo.

CAPÍTULO 4

GRAVEDAD LINEALIZADA

A nivel clásico, la teoría que describe los fenómenos gravitacionales es la Relatividad General de Einstein, que considera al campo gravitatorio como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo[13, 14, 15]. Las relaciones fundamentales de esta teoría son las ecuaciones de Einstein, las cuales vinculan la geometría del espacio-tiempo con la materia que la genera. Las mismas son altamente no lineales, por lo que solo existen pocas soluciones exactas a estas. Entre las soluciones podemos citar a la de Schwarzschild que describe un espacio-tiempo estático con simetría esférica en el vacío, la solución de Robertson-Walker la cual esta dada por una métrica que describe un universo en expansión, homogéneo y isótropo y la solución de Reissner-Nordström que representa un espacio-tiempo exterior a un objeto cargado esféricamente simétrico[3, 13, 14, 15]. Por otro lado existe una formulación linealizada que permite obtener soluciones perturbativas a las ecuaciones de Campo de Einstein, la cual consiste en descomponer la métrica espacio-temporal $g_{\mu\nu}$ en la métrica plana de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ más una perturbación $h_{\mu\nu}$ que es un campo no masivo simétrico que transforma bajo la representación de espin 2 del grupo de Lorentz. Las soluciones generadas (en un calibre) en esta aproximación, llamada aproximación de campos débiles, son ecuaciones de ondas clásicas, por lo que la solución viene dada por ondas planas[13, 14, 15]. En este punto se introduce el concepto de ondas gravitacionales. Actualmente la Física experimental ha avanzado con pasos gigantes en la busqueda de métodos experimentales que logren medir o detectar dichas ondas[15].

En este capítulo estudiaremos la Formulación Canónica para Gravedad Linealizada haciendo uso del método de Dirac para tratar con Lagrangianos singulares, obteniendo el Hamiltoniano de la teoría, las ecuaciones canónicas de movimiento y el álgebra que satisfacen los campos dinámicos dada por los corchetes de Dirac.

4.1. Aspectos generales de la Relatividad General y la Acción de Fierz-Pauli

Las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0, \tag{4.1}$$

pueden ser derivadas vía un principio variacional partiendo de la acción de Einstein-Hilbert, que usando unidades naturales donde la constante de gravitación universal toma el valor $G = 1$ es[14, 15]

$$S = \frac{1}{16\pi} \int_M d^4 x R \sqrt{-g}, \tag{4.2}$$

donde el espacio-tiempo M es una variedad orientada semi-Riemanniana, g el determinante del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y R el escalar de curvatura. Éstas ecuaciones dictan la dinámica del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y conectan la geometría del espacio-tiempo con la densidad de materia existente. A su vez, en términos de las componentes del tensor de Riemann $R^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho}$, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura se pueden escribir respectivamente como

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}, \\ R &= \delta^{\lambda}{}_{\mu} g^{\nu\rho} R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Por otra parte, las componentes del tensor de Riemann $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}$ se definen tomando el conmutador de derivadas covariantes, es decir

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\lambda = R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} V^\rho, \tag{4.4}$$

donde la derivada covariante ∇_μ actuando sobre un vector contravariante V^ν definido en un espacio N dimensional sobre un sistema de coordenadas curvo X^ρ $(\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2, ..., N)$ se define como[13, 14, 15]

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^{\nu}{}_{\rho\mu} V^\rho, \tag{4.5}$$

y de esta manera las componentes del tensor de Riemann resultan ser[13, 14, 15]

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\rho} = \partial_\nu \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\rho} - \partial_\alpha \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} + \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\rho} \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\sigma}, \tag{4.6}$$

donde $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}$ son los símbolos de Christoffel, que en función del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ están dados por[13, 14]

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \{ \partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\rho g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\rho} \}. \tag{4.7}$$

Para obtener soluciones perturbativas de las ecuaciones de campo de Einstein, consideramos una pequeña perturbación $h_{\mu\nu} \ll 1$ alrededor de la métrica plana de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = diag(- + ++)$[13, 14, 15, 16]

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \\ g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

de donde se observa que hasta primer orden en $h_{\mu\nu}$ se obtiene

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\rho} = \delta^{\nu}{}_{\rho}. \tag{4.9}$$

Las ecuaciones de movimiento para Gravedad Linealizada se pueden obtener vía el principio variacional sobre la acción de Fierz-Pauli[13]. Esta acción se deriva de la de Einstein-Hilbert suponiendo (4.8) y tomando en cuenta las siguientes consideraciones[13]

1. Los índices se suben y se bajan con la métrica $\eta_{\mu\nu}$ y $\eta^{\mu\nu}$.

2. Conservaremos términos a primer orden en la perturbación $h_{\mu\nu}$ a nivel de las ecuaciones de movimiento y a segundo orden a nivel Lagrangiano. Debido a esto se sigue que
$$\nabla_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi, \tag{4.10}$$
donde ϕ es un campo del orden de $h_{\mu\nu}$

En lo que sigue, tomaremos en cuenta las consideraciones anteriores para escribir la acción (4.2) en términos de $h_{\mu\nu}$. En primer lugar el determinante del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ viene dado por[13]
$$g = \frac{1}{4!}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon^{\mu'\nu'\lambda'\rho'}g_{\mu\mu'}g_{\nu\nu'}g_{\lambda\lambda'}g_{\rho\rho'}, \tag{4.11}$$
de donde, en la aproximación de campos débiles y tomando solo contribuciones a primer orden se obtiene

$$\begin{aligned} g &= -1 + \frac{1}{4!}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\mu}{}^{\nu'}{}_{\lambda\rho}h_{\nu\nu'} + \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\lambda'}{}_{\rho}h_{\lambda\lambda'} \\ &+ \frac{1}{4!}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}{}^{\rho'}h_{\rho\rho'} + \frac{1}{4!}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon^{\mu'}{}_{\nu\lambda\rho}h_{\mu\mu'} + \mathcal{O}(h^2), \\ &= -(1+h) + \mathcal{O}(h^2), \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ es la traza del campo $h_{\mu\nu}$. Luego, haciendo un desarrollo en serie de potencias notamos que

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{1}{2}h + \mathcal{O}(h^2). \tag{4.13}$$

Por otro lado, para escribir el escalar de Ricci en términos de $h_{\mu\nu}$ es necesario obtener las expresiones perturbativas para los símbolos de Christoffel (4.7), sustituir en (4.6) para obtener las componentes del tensor de Riemann y finalmente usar (4.3). De (4.7) los simbolos de Christoffel en la aproximación de campos débiles vienen dados por

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} &= \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\{\partial_{\nu}g_{\lambda\rho} + \partial_{\rho}g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}g_{\nu\rho}\} \\ &= \frac{1}{2}(\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\{\partial_{\nu}g_{\lambda\rho} + \partial_{\rho}g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}g_{\nu\rho}\}, \\ &= \frac{1}{2}\{\partial_{\nu}h^{\mu}{}_{\rho} + \partial_{\rho}h^{\mu}{}_{\nu} - \partial^{\mu}h_{\nu\rho} - h^{\mu\lambda}\partial_{\nu}h_{\lambda\rho} - h^{\mu\lambda}\partial_{\rho}h_{\lambda\nu} + h^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}h_{\nu\rho}\}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde hemos mantenido las contribuciones a segundo orden porque, como veremos mas adelante, van a contribuir en la acción. Ahora, sustituyendo los símbolos arriba escritos en la expresión para las componentes del tensor de Riemman (4.6) obtenemos

$$\begin{aligned}
R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho} &= \frac{1}{2}\{\partial_\nu\partial_\lambda h^{\mu}{}_{\rho} + \partial_\nu\partial_\rho h^{\mu}{}_{\lambda} - \partial_\nu\partial^{\mu} h_{\lambda\rho} - \partial_\lambda\partial_\nu h^{\mu}{}_{\rho} - \partial_\lambda\partial_\rho h^{\mu}{}_{\nu} + \partial_\lambda\partial^{\mu} h_{\nu\rho}\} \\
&+ \frac{1}{4}\{\partial_\lambda h^{\alpha}{}_{\rho}\partial_\nu h^{\mu}{}_{\alpha} + \partial_\lambda h^{\alpha}{}_{\rho}\partial_\alpha h^{\mu}{}_{\nu} - \partial_\lambda h_{\alpha\rho}\partial^{\mu} h^{\alpha}{}_{\nu} + \partial_\rho h^{\alpha}{}_{\lambda}\partial_\nu h^{\mu}{}_{\alpha} + \partial_\rho h^{\alpha}{}_{\lambda}\partial_\alpha h^{\mu}{}_{\nu}\} \\
&+ \frac{1}{4}\{\partial_\rho h^{\alpha}{}_{\lambda}\partial^{\mu} h_{\nu\alpha} - \partial^{\alpha} h_{\lambda\rho}\partial_\nu h^{\mu}{}_{\alpha} - \partial^{\alpha} h_{\lambda\rho}\partial_\alpha h^{\mu}{}_{\nu} + \partial^{\alpha} h_{\lambda\rho}\partial^{\mu} h_{\nu\alpha} - \partial_\nu h^{\alpha}{}_{\rho}\partial_\lambda h^{\mu}{}_{\alpha}\} \\
&+ \frac{1}{4}\{\partial_\nu h^{\alpha}{}_{\rho}\partial^{\mu} h_{\lambda\alpha} - \partial_\nu h^{\alpha}{}_{\rho}\partial_\alpha h^{\mu}{}_{\lambda} - \partial_\rho h^{\alpha}{}_{\nu}\partial_\lambda h^{\mu}{}_{\alpha} - \partial_\rho h^{\alpha}{}_{\nu}\partial_\alpha h^{\mu}{}_{\lambda} + \partial_\rho h^{\alpha}{}_{\nu}\partial^{\mu} h_{\lambda\alpha}\} \\
&+ \frac{1}{4}\{\partial^{\alpha} h_{\nu\rho}\partial_\lambda h^{\mu}{}_{\alpha} + \partial^{\alpha} h_{\nu\rho}\partial_\alpha h^{\mu}{}_{\lambda} - \partial^{\alpha} h_{\nu\rho}\partial^{\mu} h_{\lambda\alpha}\} + \mathcal{O}(h^3). \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Finalmente, al reemplazar las componentes (4.15) en (4.3) se obtiene

$$R = \partial^{\mu}\partial_\mu h^{\nu}{}_{\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\rho h^{\mu}{}_{\nu}\partial_\mu h^{\nu\rho} + \frac{1}{4}\partial^{\mu} h_{\nu\rho}\partial_\mu h^{\nu\rho} + \frac{1}{4}\partial^{\alpha} h^{\rho}{}_{\rho}\partial_\alpha h^{\mu}{}_{\mu} + \mathcal{O}(h^3), \quad (4.16)$$

que al combinar con (4.13) y sustituir en (4.2) conduce a la acción de Fierz-Pauli

$$S[h_{\mu\nu}] = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\{\partial_\nu h^{\mu\nu}\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\lambda} - \partial_\rho h^{\mu}{}_{\nu}\partial_\mu h^{\nu\rho}\} + \frac{1}{4}\{\partial^{\mu} h_{\nu\rho}\partial_\mu h^{\nu\rho} - \partial^{\alpha} h^{\rho}{}_{\rho}\partial_\alpha h^{\mu}{}_{\mu}\} + \mathcal{O}(h^3)\right), \quad (4.17)$$

que es un funcional que dicta la dinámica del campo no masivo $h_{\mu\nu}$ en Gravedad Linealizada. Lo próximo será obtener el Hamiltoniano a partir de esta acción y obtener las reglas de cuantización cuando el conjunto total de ligaduras del sistema es de segunda clase. Estos y otros aspectos se estudian a continuación.

4.2. Formulación Hamiltoniana en Gravedad Linealizada

Partiendo de la acción de Fierz-Pauli

$$S[h_{\mu\nu}] = \int d^4x \frac{1}{2}\{\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial^{\rho} h_{\rho\nu} - \partial^{\mu} h^{\rho}{}_{\rho}\partial^{\nu} h_{\mu\nu}\} + \frac{1}{4}\{\partial^{\mu} h^{\rho}{}_{\rho}\partial_\mu h^{\sigma}{}_{\sigma} - \partial^{\rho} h^{\mu\nu}\partial_\rho h_{\mu\nu}\},$$

se observa que la densidad Lagrangiana viene dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\{\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial^{\rho} h_{\rho\nu} - \partial^{\mu} h^{\rho}{}_{\rho}\partial^{\nu} h_{\mu\nu}\} + \frac{1}{4}\{\partial^{\mu} h^{\rho}{}_{\rho}\partial_\mu h^{\sigma}{}_{\sigma} - \partial^{\rho} h^{\mu\nu}\partial_\rho h_{\mu\nu}\}. \quad (4.18)$$

Ahora procederemos a realizar la descomposición en (3+1) dimensiones (término a término) de (4.18) con la finalidad de leer claramente las velocidades. El primer término será

$$\begin{aligned}
\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial^{\rho} h_{\rho\nu} &= \partial_0 h^{00}\partial^0 h_{00} + \partial_0 h^{00}\partial^a h_{a0} + \partial_0 h^{0a}\partial^0 h_{0a} + \partial_0 h^{0a}\partial^b h_{ab} \\
&+ \partial_a h^{a0}\partial^0 h_{00} + \partial_a h^{0a}\partial^b h_{0b} + \partial_a h^{ab}\partial^0 h_{0b} + \partial_a h^{ab}\partial^c h_{cb}. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

El segundo término resulta ser

$$\begin{aligned}\partial^\mu h^\rho{}_\rho \partial^\nu h_{\mu\nu} &= \partial^0 h^0{}_0 \partial^0 h_{00} + \partial^0 h^0{}_0 \partial^a h_{0a} + \partial^0 h^a{}_a \partial^0 h_{00} + \partial^0 h^a{}_a \partial^b h_{0b} \\ &+ \partial^a h^0{}_0 \partial^0 h_{a0} + \partial^a h^0{}_0 \partial^b h_{ab} + \partial^a h^b{}_b \partial^0 h_{a0} + \partial^a h^b{}_b \partial^c h_{ac}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Para el tercer término obtenemos

$$\begin{aligned}\partial^\mu h^\rho{}_\rho \partial_\mu h^\sigma{}_\sigma &= \partial^0 h^0{}_0 \partial_0 h^0{}_0 + \partial^0 h^0{}_0 \partial_0 h^a{}_a + \partial^0 h^a{}_a \partial_0 h^0{}_0 + \partial^0 h^a{}_a \partial_0 h^b{}_b \\ &+ \partial^a h^0{}_0 \partial_a h^0{}_0 + \partial^a h^0{}_0 \partial_a h^b{}_b + \partial^a h^b{}_b \partial_a h^0{}_0 + \partial^a h^b{}_b \partial_a h^c{}_c. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Finalmente, para el cuarto término se tiene

$$\begin{aligned}\partial^\rho h^{\mu\nu} \partial_\rho h_{\mu\nu} &= \partial^0 h^{00} \partial_0 h_{00} + 2\partial^0 h^{0a} \partial_0 h_{0a} + \partial^0 h^{ab} \partial_0 h_{ab} \\ &+ \partial^a h^{00} \partial_a h_{00} + 2\partial^a h^{0b} \partial_a h_{0b} + \partial^a h^{bc} \partial_a h_{bc}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Combinando (4.19), (4.20), (4.21) y (4.22), la densidad Lagrangiana (4.18) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_0 h \partial^b h_{0b} - \partial_0 h_{0a} \partial^b h^a{}_b + \frac{1}{2}\{\partial^a h^b{}_0 \partial_a h_{0b} - \partial^a h_{0a} \partial^b h_{0b}\} \\ &+ \frac{1}{4}\{\partial_0 h^{ab} \partial_0 h_{ab} - \partial_0 h \partial_0 h\} + \frac{1}{2} h_{00}\{\partial^a \partial_a h - \partial^a \partial^b h_{ab}\} + \mathcal{I}, \end{aligned}$$

donde hemos definido el siguiente funcional

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\{\partial_a h^{ab} \partial^c h_{bc} - \partial^a h \partial^c h_{ac}\} + \frac{1}{4}\{\partial^a h \partial_a h - \partial^a h^{bc} \partial_a h_{bc}\}. \tag{4.23}$$

Luego, la acción de Fierz-Pauli (4.17) separada en espacio y tiempo es

$$\begin{aligned} S &= \int d^3x (\partial_0 h \partial^b h_{0b} - \partial_0 h^{ab} \partial_b h_{0a}) + \frac{1}{2}(\partial^a h^{0b} \partial_a h_{0b} - \partial^a h_{0a} \partial^b h_{0b}) \\ &+ \frac{1}{4}(\partial_0 h^{ab} \partial_0 h_{ab} - \partial_0 h \partial_0 h) + \frac{1}{2} h_{00}(\partial^a \partial_a h - \partial^a \partial^b h_{ab}) + \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Nótese que en la acción anterior no aparecen derivadas temporales de los campos h_{00} y h_{0a}, por esta razón, al igual que en la formulación Hamiltoniana alternativa de la sección 3.2, no los consideraremos como campos dinámicos de la teoría. En base a esto, el momentum conjugado p^{ab} asociado al campo h_{ab} viene dado por

$$p^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ab}}, \tag{4.25}$$

de donde obtenemos

$$p^{ab} = \frac{1}{2}\left\{-\partial^b h^a{}_0 - \partial^a h^b{}_0 + \partial_0 h^{ab} - \eta^{ab} \partial_0 h\right\} + \eta^{ab} \partial^c h_{oc}, \tag{4.26}$$

por lo que

$$\partial_0 h^{ab} = 2p^{ab} + \partial^b h^a{}_0 + \partial^a h^b{}_0 - \eta^{ab} p, \tag{4.27}$$

donde p es la traza de p^{ab}. Luego, la densidad Hamiltoniana dada por

$$\mathcal{H} = p^{ab}\partial_0 h_{ab} - \mathcal{L}, \tag{4.28}$$

queda expresada en función de los campos dinámicos de la teoría como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - 2\nu_b \partial_a p^{ab} - \frac{1}{2}\nu(\partial^a\partial_a h - \partial^a\partial^b h_{ab}), \tag{4.29}$$

donde:

$$\mathcal{H}_0 = p^{ab}p_{ab} - \frac{1}{2}p^2 - \mathcal{I}, \tag{4.30}$$

y además hemos definido con ν y ν_b a h_{00} y h_{0b} respectivamente. Es oportuno señalar que los mismos estan relacionados con las funciones Lapso y Shift que se obtienen como multiplicadores de Lagrange al realizar la formulación *ADM* de la Relatividad General[15, 17]. En función de la densidad Hamiltoniana, la acción de Fierz-Pauli (4.17) queda escrita como

$$S[h_{ab}, p^{ab}, \nu, \nu_b] = \int d^4x \left\{ p^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathcal{H}_0 + 2\nu_b\partial_a p^{ab} - \frac{1}{2}\nu(\partial^a\partial^b h_{ab} - \partial^a\partial_a h) \right\}, \tag{4.31}$$

de donde, al aplicar el principio de mínima acción, se obtienen las ecuaciones de movimiento para los campos h_{ab} y p^{ab}

$$\begin{aligned} \dot{h}_{ab} &= \{h_{ab}, H\} = 2p_{ab} - \eta_{ab}p, \\ \dot{p}^{ab} = \{p^{ab}, H\} &= \frac{1}{4}\partial^a\partial_c h^{cb} - \frac{1}{2}\partial^c\partial_c h^{ab} + \frac{1}{4}\partial^b\partial_c h^{ac} + \frac{1}{4}\partial^a\partial_c h^{cb} + \frac{1}{4}\partial^b\partial_c h^{ac} - \frac{1}{2}\eta^{ab}\partial^c\partial^d h_{cd} \\ &- \frac{1}{2}\partial^a\partial^b h + \frac{1}{2}\eta^{ab}\partial^c\partial_c h, \end{aligned} \tag{4.32}$$

con

$$\begin{aligned} \xi_1 = \partial^a\partial^b h_{ab} - \partial^a\partial_a h &\approx 0, \\ \xi^b{}_2 = \partial_a p^{ab} &\approx 0, \end{aligned} \tag{4.33}$$

donde el Hamiltoniano total es

$$H = \int d^3x \left\{ \mathcal{H}_0 - 2\nu_b\partial_a p^{ab} - \frac{1}{2}\nu(\partial^a\partial_a h - \partial^a\partial^b h_{ab}) \right\}, \tag{4.34}$$

y el álgebra canónica dada por

$$\begin{aligned} \{h^{ab}(\vec{x}), p^{a'b'}(\vec{y})\} &= \frac{1}{2}\left(\delta^{a'}{}_a\delta^{b'}{}_b + \delta^{a'}{}_b\delta^{b'}{}_a\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\ \{h_{ab}(\vec{x}), h_{a'b'}(\vec{y})\} &= \{p^{ab}(\vec{x}), p^{a'b'}(\vec{y})\} = 0. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Nótese que las dos ecuaciones del conjunto (4.33) son las ligaduras escalares y vectoriales para Gravedad Linealizada. Se puede probar que estas ligaduras se preservan en el tiempo. En efecto para la ligadura escalar tenemos

$$\dot{\xi}_1 = \{\xi_1, H\} = \partial_{a'}\partial_{b'}p^{a'b'} \approx 0,$$

que se anula en virtud del conjunto (4.33). De la preservación en el tiempo de la ligadura vectorial obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{\xi}^b{}_2 = \{\xi^b{}_2, H\} &= \frac{1}{2}\{\partial^{a'}\partial_{a'}\partial^{c'}h^{b'}{}_{c'} - \partial^{a'}\partial_{a'}\partial^{c'}h^{b'}{}_{c'} + \partial^{a'}\partial^{b'}\partial^{c'}h_{a'c'} - \partial^{b'}\partial^{a'}\partial^{c'}h_{a'c'} \\ &- \partial^{a'}\partial_{a'}\partial^{b'}h + \partial^{a'}\partial_{a'}\partial^{b'}h\} = 0.\end{aligned}$$

Por otra parte, las ligaduras escalares y vectoriales (4.33) forman un conjunto de primera clase, es decir

$$\{\partial^a_{\vec{x}}\partial^b_{\vec{x}}h_{ab}(\vec{x}) - \partial^a_{\vec{x}}\partial^{\vec{x}}_a h(\vec{x}), \partial^{\vec{y}}_{a'}p^{a'b'}(\vec{y})\} = 0, \tag{4.36}$$

por lo que son las generadoras de las transformaciones de calibre de la teoría. Para ver esto, comenzamos definiendo el generador

$$\Phi = \int d^3x(\Lambda^1\xi_1 + \Lambda^2{}_b\xi^b{}_2), \tag{4.37}$$

donde Λ^1 y $\Lambda^2{}_b$ son funciones. Sustituyendo (4.33) en el generador (4.37) obtenemos

$$\Phi = \int d^3x\left(\Lambda^1(\partial^a\partial^b h_{ab} - \partial^a\partial_a h)\right) + \int d^3x(\Lambda^2{}_b\partial_a p^{ab}). \tag{4.38}$$

Con el generador definido, la transformación de calibre del campo h_{ab} será

$$h'_{ab} = h_{ab} + \delta_\Phi h_{ab}, \tag{4.39}$$

donde

$$\begin{aligned}\delta_\Phi h_{ab} = \{h_{ab}(\vec{x}), \Phi(\vec{y})\} &= \{h_{ab}(\vec{x}), \int d^3y\Lambda^2{}_b(\vec{y})\partial^{\vec{y}}_{a'}p^{a'b'}(\vec{y})\} \\ &= \frac{1}{2}(\partial^{\vec{x}}_a\Lambda^2{}_b(\vec{x}) + \partial^{\vec{x}}_b\Lambda^2{}_a(\vec{x})),\end{aligned}$$

por lo que finalmente

$$h'_{ab} = h_{ab} + \partial^{\vec{x}}_a\Lambda^2{}_b(\vec{x}) + \partial^{\vec{x}}_b\Lambda^2{}_a(\vec{x}). \tag{4.40}$$

Procedamos ahora a encontrar la transformación de calibre para el momentum conjugado p^{ab}, para ello

$$p'_{ab} = p^{ab} + \delta_\Phi p^{ab}, \tag{4.41}$$

donde

$$\begin{aligned}\delta_\Phi p^{ab} = \{p^{ab}(\vec{x}), \Phi(\vec{y})\} &= \{p^{ab}(\vec{x}), \int d^3y\Lambda^1(\vec{y})\partial^{a'}_{\vec{y}}\partial^{b'}_{\vec{y}}h_{a'b'}(\vec{y}) - \partial^{a'}_{\vec{y}}\partial^{\vec{y}}_{a'}h(\vec{y})\} \\ &= -\partial^a_{\vec{x}}\partial^b_{\vec{x}}\Lambda(\vec{x})^1 + \eta^{ab}\partial^a_{\vec{x}}\partial^{\vec{x}}_a\Lambda^1(\vec{x}),\end{aligned}$$

y finalmente

$$p^{ab'} = p^{ab} - \partial^a_{\vec{x}}\partial^b_{\vec{x}}\Lambda^1(\vec{x}) + \eta^{ab}\nabla^2_{\vec{x}}\Lambda^1(\vec{x}). \tag{4.42}$$

En resumen, hemos obtenido la acción de Fierz-Pauli para Gravedad Linealizada partiendo de la de Einstein-Hilbert, para luego encontrar el Hamiltoniano y las ecuaciones de movimiento de la teoría siguiendo el tratamiento de Lagrangianos singulares. En la siguiente sección nos ocuparemos de la fijación de calibre de los campos, esto con la finalidad de hacer una descripción en donde el conjunto de ligaduras sea de segunda clase y así definir los corchetes de Dirac para Gravedad Linealizada.

4.3. Fijación de calibre en Gravedad Linealizada

En vista de la ligadura vectorial del conjunto (4.33), el momentum conjugado p^{ab} es trasverso, esto sugiere que un calibre adecuado para el campo dinámico h_{ab} es

$$\partial^a h_{ab} = 0. \tag{4.43}$$

Para fijar el otro calibre, debemos notar que la ligadura escalar señalada en (4.33), no es otra cosa que la traza de la parte trasversa del campo h_{ab}. Para demostrar este hecho, realizamos la descomposición Helmholtz del campo h_{ab}, donde se propone que para campos con buen comportamiento, el mismo se puede descomponer en su parte longitudinal mas su parte trasversal[12]. La descomposición trasverso-longitudinal del campo h_{ab} será

$$h_{ab} = h^{tras}_{ab} + h^{L}_{ab}, \tag{4.44}$$

con h^{tras}_{ab} y h^{L}_{ab} la parte trasversa y longitudinal respectivamente. Proponemos que la parte longitudinal de h_{ab} viene dada por

$$h^{L}_{ab} = \partial_a\phi_b + \partial_b\phi_a. \tag{4.45}$$

Al sustituir (4.45) en (4.44), puede demostrarse que

$$\phi_b = \nabla^{-2}\{\partial^a h_{ab} - \frac{1}{2}\nabla^{-2}\partial_b\partial^c\partial^d h_{cd}\}, \tag{4.46}$$

por lo que las partes trasverso-longitudinal del campo h_{ab} estarán dadas por

$$h^{L}_{ab} = \nabla^{-2}\{\partial^c\partial_a h_{cb} - \frac{1}{2}\nabla^{-2}\partial_a\partial_b\partial^c\partial^d h_{cd} + \partial^c\partial_b h_{ac} - \frac{1}{2}\nabla^{-2}\partial_b\partial_a\partial^c\partial^d h_{cd}\}, \tag{4.47}$$

$$h^{tras}_{ab} = h_{ab} - \nabla^{-2}\{\partial^c\partial_a h_{cb} + \nabla^{-2}\partial_a\partial_b\partial^c\partial^d h_{cd} - \partial^c\partial_b h_{ac}\}. \tag{4.48}$$

Al tomar el Laplaciano de la traza de h^{tras}_{ab} se obtiene

$$\nabla^2 h^{tras} = -\nabla^2(\partial^a\partial^b h_{ab} - \nabla^2 h), \tag{4.49}$$

que es justamente el laplaciano de la ligadura escalar ξ_1. Lo que significa que

$$\nabla^2 h^{tras} \approx 0, \tag{4.50}$$

así que necesariamente $h^{tras} = 0$. De esta manera, proponemos que la traza de la parte trasversa del momento conjugado $p^{tras} = 0$ como la otra fijación de calibre, o de manera equivalente

$$\partial_a\partial_b p^{ab} - \partial^a\partial_a p = 0. \tag{4.51}$$

Por lo tanto, el conjunto de ligaduras por fijación de calibre es

$$\begin{aligned} \partial^a h_{ab} &= 0, \\ \partial_a\partial_b p^{ab} - \partial^a\partial_a p &= 0. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Se puede verificar que el conjunto (4.52) se preserva en el tiempo, en efecto, para el primer calibre tenemos

$$\{\partial^a_{\vec{x}} h_{ab}(\vec{x}), H(\vec{y})\} \approx 0,$$

que determina la expresión para el multiplicador ν_b

$$\nu_b = \frac{1}{4}\partial_b \nabla^{-2} p, \tag{4.53}$$

mientras que para la preservación del segundo calibre obtenemos

$$\{\partial^{\vec{x}}_a \partial^{\vec{x}}_b p^{ab}(\vec{x}) - \partial^a_{\vec{x}} \partial^{\vec{x}}_a p(\vec{x}), H(\vec{y})\} \approx 0 \approx -2\partial^a_{\vec{x}} \partial^{\vec{x}}_a \nu(\vec{x}), \tag{4.54}$$

lo que indica que el multiplicador ν asociado a la ligadura escalar es igual a cero.
Lo próximo es verificar que la escogencia del conjunto de calibres (4.52) no entra en contradicción con las ecuaciones de movimiento (4.32). Tomando la divergencia de la ecuación para h_{ab} se obtiene

$$\partial_0(\partial^a \partial^b h_{ab}) = \partial^a \partial^b p_{ab} - \partial^a \partial_a p,$$

que es una identidad debido al conjunto (4.52). La ecuación de movimiento para p^{ab} tomando en cuenta (4.52) se reduce a

$$\dot{p}^{ab} = \frac{1}{2}\{\eta^{ab}\nabla^2 h - \nabla^2 h^{ab} - \partial^a \partial^b h\},$$

donde al tomar la divergencia encontramos

$$\partial_0(\partial_a p^{ab}) = -\frac{1}{2}\nabla^2 \partial_a h^{ab}, \tag{4.55}$$

que es una identidad debido a la ligadura vectorial y al calibre fijado para el campo h_{ab}.
Por otra parte, se encuentra que las funciones ${\Lambda^2}_b$ y Λ^1 en (4.40) y (4.42) son

$$\begin{aligned}
{\Lambda^2}_a(\vec{x}) &= -\nabla^2_{\vec{x}} \partial^b_{\vec{x}} \left\{ h_{ab}(\vec{x}) + \frac{1}{2}\nabla^{-2}_{\vec{x}} \partial^{\vec{x}}_a \partial^c_{\vec{x}} h_{bc}(\vec{x}) \right\}, \\
\Lambda^1(\vec{x}) &= \frac{1}{2}\nabla^{-4}_{\vec{x}} \left\{ \partial^{\vec{x}}_a \partial^{\vec{x}}_b p^{ab}(\vec{x}) - \eta_{ab} \nabla^{-2}_{\vec{x}} p^{ab}(\vec{x}) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Como notamos, la escogencia de los calibres (4.52) es consistente en la teoría. Podemos decir entonces que el conjunto de ligaduras de primera clase mas las ligaduras provenientes de la fijación de calibre vendrá dado por

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \partial^a \partial^b h_{ab} - \partial^a \partial_a h \approx 0, \\
{\theta^b}_2 &= \partial_a p^{ab} \approx 0, \\
\theta_3 &= \partial_a \partial_b p^{ab} - \partial^a \partial_a p \approx 0, \\
\theta_{4b} &= \partial^a h_{ab} \approx 0,
\end{aligned} \tag{4.57}$$

donde se puede verificar que el conjunto total de ligaduras (4.57) es de segunda clase. En efecto, los corchetes no nulos serán

$$\begin{aligned}
\{\theta_1, \theta_3\} &= -\{\theta_3, \theta_1\} = 2\nabla^2_{\vec{x}} \nabla^2_{\vec{y}} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\
\{{\theta^b}_2, \theta_{4b'}\} &= -\{\theta_{4b'}, {\theta^b}_2\} = \frac{1}{2}\left[\partial^{\vec{x}}_l \partial^b_{\vec{y}} - {\delta^b}_l \nabla^2_{\vec{x}}\right] \delta^3(\vec{x} - \vec{y}).
\end{aligned} \tag{4.58}$$

El siguiente paso en nuestro estudio consiste en construir los corchetes de Dirac para la teoría con las ligaduras de segunda clase indicadas en (4.58).

4.4. Corchetes de Dirac para Gravedad Linealizada

En esta sección procedemos con el cálculo de los corchetes de Dirac para Gravedad Linealizada. Para ello se debe calcular previamente la inversa de la matriz de Dirac dada por

$$C_D(\vec{x},\vec{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\nabla^4_{\vec{x}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left[\delta^a{}_b\nabla^2_{\vec{z}} + \partial^a_{\vec{z}}\partial^{\vec{x}}_b\right] \\ -2\nabla^4_{\vec{x}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\left[\delta^a{}_b\nabla^2_{\vec{z}} + \partial^a_{\vec{z}}\partial^{\vec{x}}_b\right] & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x}-\vec{z}),$$

cuyos elementos de matriz corresponden a (4.58).
Como sabemos, los elementos de la matriz inversa deben cumplir con

$$\int d^3z (C_{ss'}(\vec{x},\vec{z}))(C_{s's''}(\vec{z},\vec{y}))^{-1} = \delta^s{}_{s''}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \tag{4.59}$$

lo que conlleva a que los únicos elementos de matriz no nulos sean

$$\begin{aligned} C_{13}(\vec{z},\vec{y})^{-1} &= \alpha\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), & (4.60)\\ C_{24}(\vec{z},\vec{y})^{-1} &= \beta_{bm}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), & (4.61)\\ C_{31}(\vec{z},\vec{y})^{-1} &= \gamma\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), & (4.62)\\ C_{42}(\vec{z},\vec{y})^{-1} &= \rho_{bm}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), & (4.63) \end{aligned}$$

con los escalares α, γ y las matrices β_{bm} y ρ_{bm} por determinar. Para encontrar el escalar α, sustituimos el elemento de matriz $C_{13}(\vec{z},\vec{y})^{-1}$ en la relación (4.59), de esta manera

$$\int d^3z (C_{31}(\vec{x},\vec{z}))(C_{13}(\vec{z},\vec{y}))^{-1} = \int d^3z(-2\nabla^4_{\vec{x}}\delta^3(\vec{x}-\vec{z}))(\alpha\delta^3(\vec{z}-\vec{y})) = \delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \tag{4.64}$$

donde, para que se cumpla la relación anterior, α debe satisfacer

$$\alpha = -\frac{1}{2}\nabla^{-4}_{\vec{z}}, \tag{4.65}$$

por lo que el elemento de matriz inverso $C_{13}(\vec{z},\vec{y})^{-1}$ será

$$C_{13}(\vec{z},\vec{y})^{-1} = -\frac{1}{2}\nabla^{-4}_{\vec{z}}\delta^3(\vec{z}-\vec{y}). \tag{4.66}$$

En vista de que la matriz inversa de Dirac es antisimétrica, nos permite calcular inmediatamente el escalar γ, obteniendo

$$\gamma = \frac{1}{2}\nabla^{-4}_{\vec{z}}, \tag{4.67}$$

y con esto el elemento de matriz inverso $C_{31}(\vec{z},\vec{y})^{-1}$

$$C_{31}(\vec{z},\vec{y})^{-1} = \frac{1}{2}\nabla^{-4}_{\vec{z}}\delta^3(\vec{z}-\vec{y}). \tag{4.68}$$

Para determinar la matriz β_{bm} sustituimos el elemento de matriz $C_{24}(\vec{z},\vec{y})^{-1}$ en la relación (4.59)

$$\begin{aligned}\int d^3z C_{42}(\vec{x},\vec{z})_{ab} C_{24}(\vec{z},\vec{y})^{-1}{}_{bm} &= \delta^a{}_m \delta^3(\vec{x}-\vec{y}),\\ \int d^3z[-\frac{1}{2}\delta^a{}_b\nabla^2_{\vec{z}} - \frac{1}{2}\partial^a_{\vec{z}}\partial^b_{\vec{x}}]\delta^3(\vec{x}-\vec{z})C_{24}(\vec{z},\vec{y})^{-1}{}_{bm} &= \delta^a{}_m\delta^3(\vec{x}-\vec{y}),\end{aligned} \tag{4.69}$$

y proponemos que el elemento de matriz inverso $C_{24}(\vec{z},\vec{y})^{-1}{}_{bm}$ tiene la siguiente forma

$$C_{24}(\vec{z},\vec{y})^{-1}{}_{bm} = (\Lambda^{\vec{z},\vec{y}}_{bm} + \Gamma^{\vec{z},\vec{y}}_{bm})\delta^3(\vec{z}-\vec{y}), \tag{4.70}$$

donde $\beta_{bm} = (\Lambda^{\vec{z},\vec{y}}_{bm} + \Gamma^{\vec{z},\vec{y}}_{bm})$. Al sustituir (4.70) en (4.69) y desarrollar, encontramos

$$\frac{1}{2}\int d^3z\{-\delta^a{}_b\nabla^2_{\vec{z}}\Lambda^{\vec{z},\vec{y}}_{bm} - \delta^a{}_b\nabla^2_{\vec{z}}\Gamma^{\vec{z},\vec{y}}_{bm} - \partial^a_{\vec{z}}\partial^b_{\vec{x}}\Lambda^{\vec{z},\vec{y}}_{bm} - \partial^a_{\vec{z}}\partial^b_{\vec{x}}\Gamma^{\vec{z},\vec{y}}_{bm}\}\delta^3(\vec{x}-\vec{z})\delta^3(\vec{z}-\vec{y}) = \delta^a{}_m\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \tag{4.71}$$

donde al fijar la matriz $\Lambda^{\vec{z},\vec{y}}_{bm}$ como

$$\Lambda^{\vec{z},\vec{y}}_{bm} = -2\delta^b{}_m\nabla^{-2}_{\vec{z}},$$

y la sustuimos en (4.71), llegamos a

$$-\frac{1}{2}\{\delta^a{}_b\nabla^2_{\vec{x}} + \partial^a_{\vec{x}}\partial^b_{\vec{x}}\}\Gamma^{\vec{x},\vec{y}}_{bm} = -\partial^a_{\vec{x}}\partial^m_{\vec{x}}\nabla^{-2}_{\vec{x}},$$

es decir

$$\Gamma^{\vec{x},\vec{y}}_{bm} = \partial^{\vec{x}}_m\partial^{\vec{y}}_b\nabla^{-4}_{\vec{x}}, \tag{4.72}$$

donde finalmente

$$C_{24}(\vec{x},\vec{z})^{-1}{}_{bm} = \{-2\delta^b{}_m\nabla^{-2}_{\vec{z}} + \partial^{\vec{z}}_m\partial^{\vec{y}}_b\nabla^{-4}_{\vec{z}}\}\delta^3(\vec{z}-\vec{y}). \tag{4.73}$$

La antisimetría de la matriz inversa de Dirac implica que

$$C_{42}(\vec{z},\vec{y})^{-1}{}_{bm} = \{2\delta^b{}_m\nabla^{-2}_{\vec{z}} - \partial^{\vec{z}}_m\partial^{\vec{y}}_b\nabla^{-4}_{\vec{z}}\}\delta^3(\vec{z}-\vec{y}). \tag{4.74}$$

Con (4.66), (4.68), (4.73) y (4.74), se construye la inversa de la matriz de Dirac

$$C_D{}^{-1}(\vec{x},\vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}\nabla^{-4}_{\vec{x}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \{-2\delta^b{}_m\nabla^{-2}_{\vec{x}} + \partial^{\vec{x}}_m\partial^{\vec{y}}_b\nabla^{-4}_{\vec{x}}\} \\ \frac{1}{2}\nabla^{-4}_{\vec{x}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \{2\delta^b{}_m\nabla^{-2}_{\vec{x}} - \partial^{\vec{x}}_m\partial^{\vec{y}}_b\nabla^{-4}_{\vec{x}}\} & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}).$$

Procedemos ahora a calcular los corchetes de Dirac entre los campos dinámicos h_{ab} y p^{ab}, esto es

$$\begin{aligned}\{h_{ab}(\vec{x'}), p^{a'b'}(\vec{y'})\}^* &= \{h_{ab}(\vec{x'}), p^{a'b'}(\vec{y'})\}\\ &- \int d^3x\int d^3y\{h_{ab}(\vec{x'}),\theta_s(\vec{x})\}C^{-1}_{ss'}(\vec{x},\vec{y})\{\theta_{s'}(\vec{y}), p^{a'b'}(\vec{y'})\},\end{aligned} \tag{4.75}$$

donde los únicos términos no nulos serán

$$\begin{aligned}\{h_{ab}(\vec{x'}),p^{a'b'}(\vec{y'})\}^* &= \{h_{ab}(\vec{x'}),p^{a'b'}(\vec{y'})\}\\ &- \int d^3x\int d^3y\{h_{ab}(\vec{x'}),\chi_{2b}(\vec{x})\}(C_{24})^{-1}_{bm}(\vec{x},\vec{y})\{\chi_{4b}(\vec{y}),p^{a'b'}(\vec{y'})\}\\ &- \int d^3x\int d^3y\{h_{ab}(\vec{x'}),\chi_3(\vec{x})\}(C_{31})^{-1}(\vec{x},\vec{y})\{\chi_1(\vec{y}),p^{a'b'}(\vec{y'})\}.\end{aligned} \tag{4.76}$$

Desarrollando el segundo término de (4.76) encontramos

$$\begin{aligned}&= \int d^3x\int d^3y\left(-2\partial^{\vec{x}}_{m'}\{h_{ab}(\vec{x'}),p^{m'b}(\vec{x})\}\delta^b{}_m\nabla^{-2}_{\vec{x}}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\partial^r_{\vec{y}}\{h_{rm}(\vec{y}),p^{a'b'}(\vec{y'}\}\right)\\ &+ \int d^3x\int d^3y\left(\partial^{\vec{x}}_{m'}\{h_{ab}(\vec{x'}),p^{m'b}(\vec{x})\}\partial^m_{\vec{x}}\partial^b_{\vec{x}}\nabla^{-4}_{\vec{x}}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\partial^r_{\vec{y}}\{h_{rm}(\vec{y}),p^{a'b'}(\vec{y'})\right).\end{aligned} \tag{4.77}$$

El tercer término de (4.76) será

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\int d^3x\int d^3y\left(\partial^a_{\vec{x}}\partial^b_{\vec{x}}\partial^{a'}_{\vec{y}}\partial^{b'}_{\vec{y}}\nabla^{-4}\delta^3(\vec{x'}-\vec{x})\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta^3(\vec{y}-\vec{y'})\right)\\ &- \frac{1}{4}\int d^3x\int d^3y\left(\eta_{ab}\nabla^{-2}_{\vec{x}}\partial^{a'}_{\vec{y}}\partial^{b'}_{\vec{y}}\delta^3(\vec{x'}-\vec{x})\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta^3(\vec{y}-\vec{y'})\right)\\ &+ \frac{1}{2}\int d^3x\int d^3y\left(\eta_{ab}\eta^{a'b'}\right).\end{aligned} \tag{4.78}$$

Finalmente al resolver (4.77) y (4.78), e introducir el resultado en (4.75), llegamos a

$$\begin{aligned}\{h_{ab}(\vec{x}),p^{a'b'}(\vec{y})\}^* &= \frac{1}{2}\{\eta^{aa'}\eta_{bb'}+\eta^{ab'}\eta_{a'b}-\eta^{ab}\eta_{a'b'}-\partial^a_{\vec{x}}\partial^{a'}_{\vec{x}}\eta^{bb'}\nabla^{-2}_{\vec{x}}-\partial^a_{\vec{x}}\partial^{b'}_{\vec{x}}\eta^{a'b}\nabla^{-2}_{\vec{x}}\\ &- \partial^b_{\vec{x}}\partial^{a'}_{\vec{x}}\eta^{ab'}\nabla^{-2}_{\vec{x}}-\partial^b_{\vec{x}}\partial^{b'}_{\vec{x}}\eta^{a'a}\nabla^{-2}_{\vec{x}}+\partial^a_{\vec{x}}\partial^{b'}_{\vec{x}}\partial^b_{\vec{x}}\partial^{a'}_{\vec{x}}\nabla^{-4}_{\vec{x}}\\ &+ \partial^a_{\vec{x}}\partial^b_{\vec{x}}\eta^{a'b'}\nabla^{-2}_{\vec{x}}+\partial^{a'}_{\vec{x}}\partial^{b'}_{\vec{x}}\eta_{ab}\nabla^{-2}_{\vec{x}}\}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}),\end{aligned} \tag{4.79}$$

donde además se puede probar que

$$\begin{aligned}\{h_{ab}(\vec{x}),h^{a'b'}(\vec{y})\}^* &= 0,\\ \{p_{ab}(\vec{x}),p^{a'b'}(\vec{y})\}^* &= 0.\end{aligned} \tag{4.80}$$

Las ecuaciones (4.79) y (4.80), constituyen los corchetes de Dirac para Gravedad Linealizada en la formulación de Fierz-Pauli. Es importante hacer notar que si se hubieran considerado h_{00} y h_{0b} como campos dinámicos de la teoría, la matriz de Dirac (así como su inversa) hubiese sido de dimensión 8×8, aunque, como se estudió en la sección 3.2, los corchetes de Dirac resultantes serían equivalentes, ya que justamente la introducción de las ligaduras de fijación de calibre reduce el espacio de fases a uno donde solo se consideran los verdaderos grados de libertad, que para Gravedad Linealizada, resultan ser la parte trasversa y sin traza de los campos h_{ab} y p^{ab}.

Por otro lado, como los corchetes de Dirac entre las ligaduras de segunda clase y cualquier función perteneciente al espacio de fases es cero, podemos fijar el conjunto de ligaduras como igualdades fuertes

$$\begin{aligned}
\partial^a\partial_b h_{ab} - \partial^a\partial_a h &= 0, \\
\partial_a p^{ab} &= 0, \\
\partial_a\partial_b p^{ab} - \partial^a\partial_a p &= 0, \\
\partial^a h_{ab} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.81}$$

por lo que el Hamiltoniano para Gravedad Linealizada es

$$H = \int d^3x \left\{ p^{ab}p_{ab} - p^2 - \mathcal{I} \right\}. \tag{4.82}$$

La teoría queda descrita por el Hamiltoniano (4.82) y por el álgebra dada por los corchetes de Dirac entre las variables h_{ab} y p^{ab}.

Ya establecidos los corchetes de Dirac, las reglas de cuantización para Gravedad Linealizada con ligaduras de segunda clase son

- Los campos dinámicos h_{ab} y p^{ab} pasan a ser operadores que toman valores en algún espacio de Hilbert.
- los corchetes de Dirac pasan a ser conmutadores, es decir

$$\begin{aligned}
h_{ab} &\rightarrow \hat{h}_{ab}, \\
p^{ab} &\rightarrow \hat{p}^{ab} = -i\hbar\frac{\delta}{\delta h_{ab}}, \\
\{h_{ab}, p^{a'b'}\}^* &\rightarrow -i\hbar[\hat{h}_{ab}, \hat{p}^{a'b'}].
\end{aligned} \tag{4.83}$$

- La evolución de los estados físicos vendrá dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \int d^3x \left\{ \hat{p}^{ab}\hat{p}_{ab} - \hat{p}^2 - \hat{\mathcal{I}} \right\} |\Psi\rangle. \tag{4.84}$$

Se debe señalar que la realización en concreto de los kets físicos no es parte de este trabajo, sin embargo, como se sabe, existe una representación en el espacio de Fock que conduce a los estados cuánticos de Gravitones libres[18, 19]. Hasta aquí hemos completado el programa propuesto que era la Formulación Hamiltoniana de la teoría de Fierz-Pauli con ligaduras de segunda clase y las reglas de cuantización a la Dirac.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En este trabajo se estudiaron diversos aspectos del método de Dirac para tratar con teorías donde el Lagrangiano es singular, así como las reglas de cuantización que permiten pasar de un modelo clásico a uno cuántico, cuando en el sistema hay presentes ligaduras de primera y segunda clase. El programa de Dirac surge como una generalización de la formulación Canónica para Lagrangianos no singulares, en donde todas las variables del espacio de fases son independientes. En el caso contrario, para hallar las ecuaciones de movimiento de Hamilton, es necesario aplicar el principio de mínima acción sobre un funcional que considere las ligaduras del sistema.

Primeramente, a manera de ejemplo, se hizo uso del método de Dirac para la Electrodinámica Clásica sin fuentes en $D = (3 + 1)$ dimensiones, hallando el Hamiltoniano total, las ecuaciones de movimiento y un conjunto de ligaduras de primera clase. Se fijó el calibre de Coulomb en donde se exige que la parte espacial del cuadripotencial A_μ debe ser trasverso, esto con la finalidad de obtener cuatro ligaduras de segunda clase para luego proceder al cálculo de los corchetes de Dirac entre los campos A_a y E^a. Se propuso una vía alternativa en donde, considerando al potencial A_0 como multiplicador de Lagrange, se llegaban a los mismos corchetes de Dirac que el caso anterior. Esta consideración fue hecha ya que al realizar la descomposición en espacio y tiempo de la acción de Maxwell, no aparecen derivadas temporales que involucraran a dicho campo. Esta formulación alternativa resultó de mucha utilidad ya que el orden de la inversa de la matriz de Dirac es menor, lo que implica que el cálculo de los corchetes de Dirac sea más sencillo de realizar.

Lo próximo fue proceder con el estudio de la formulación Canónica en Gravedad Linealizada. Para ello se partió de la acción de Einstein-Hilbert y se realizó una descomposición del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ en la métrica plana de Minkowsky $\eta_{\mu\nu}$ mas una perturbación $h_{\mu\nu}$, encontrando la acción[17]

$$S[h_{\mu\nu}] = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\{\partial_\nu h^{\mu\nu}\partial_\mu h^\lambda{}_\lambda - \partial_\rho h^\mu{}_\nu \partial_\mu h^{\nu\rho}\} + \frac{1}{4}\{\partial^\mu h_{\nu\rho}\partial_\mu h^{\nu\rho} - \partial^\alpha h^\rho{}_\rho \partial_\alpha h^\mu{}_\mu\} + \mathcal{O}(h^3) \right),$$

que describe la evolución de un campo simétrico no masivo de espin 2 y que es conocida como la acción de Fierz-Pauli para Gravedad Linealizada. Partiendo de la misma se encontro el Hamiltoniano total para la teoría

$$H = \int d^3x \left\{ \mathcal{H}_0 - 2\nu_b \partial_a p^{ab} - \frac{1}{2}\nu(\partial^a\partial_a h - \partial^a\partial^b h_{ab}) \right\},$$

y las ecuaciones de movimiento para los campos dinámicos h_{ab} y p^{ab} así como dos ligaduras (escalares y vectoriales) de primera clase. Para pasar del conjunto de primera clase obtenido a uno de segunda clase y eliminar grados de libertad espurios, realizamos la descomposición Helmholtz, llegando a que un calibre apropiado es que la traza de la parte trasversa del momentum conjugado debe ser cero, es decir $p^{tras} = 0$. Con el conjunto de segunda clase, se construyeron los corchetes de Dirac para Gravedad Linealizada. La teoría cuántica se obtiene al aplicar las reglas de cuantización sobre los campos dinámicos de la teoría, donde los estados físicos vendran dados como funcionales de onda que conducen a los estados cuánticos para Gravitones libres[18, 19].

Los verdaderos grados de libertad físicos para gravedad linealizada resultan en las dos polarizaciones del Gravitón. Estas aparecen cuando de las nueve componentes del campo h_{ab} tres desaparacen en virtud de que el mismo es simétrico en sus índices, y otras 4 desaparecen debido a que la traza de la parte trasversa del campo es cero, quedando 2 grados de libertad físicos en Gravedad Linealizada. Como una posible extensión de este trabajo debe mencionarse el estudio de representaciones cuánticas geométricas, al estilo de la representación de ciclos, que sean consistentes con la invariancia de calibre. Una propuesta en este sentido se encuentra en [20], en la que se consideran funcionales dependientes de ciertas combinaciones de ciclos (“madejas”), en términos de los cuales el álgebra cuántica admite una representación satisfactoria.

BIBLIOGRAFÍA

[1] M.Henneaux, C.Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey. (1992).

[2] S.Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press. (1996).

[3] C.Misner, K.Thorne y J.A. Wheeler. *Gravitation*. W.H.Freeman and Company. San Francisco.(1972).

[4] P.A.M. Dirac. *General Theory of Relativity. John Wiley and Sons.*(1975).

[5] B.Schutz. *A First Course in General Relativity*. Second Edition. Cambridge University Press.(2009).

[6] D. W. Chiou, Int. J. Mod. Phys. D, Vol. 24, No. 1 (2015) 1530005 [arXiv:1412.4362 [gr-qc]].

[7] P.Dirac.*Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York.(1964).

[8] H.Goldstein, C. Poole Jr. J. Safko *Classical Mechanics*. Third edition. Pearson New International Edition.(2001).

[9] L.D.Landau, E.M.Lifshitz. *The Classical Theory of Fields. Course of Theoretical Physics. Vol II*. Institute of Physical Problems, USRR Academy of Sciences.(1967).

[10] W.Greiner., J.Reinhardt. *Field Quantization. Springer-Verlog.Berlín.*(1996).

[11] A.Das. *Lectures on Quantum Field Theory*. World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.(2008).

[12] J.D.Jackson. *Classical Electrodynamics. Third Edition.* John Wiley and Sons, inc.(1975).

[13] R. D'Inverno. *Introducing Einstein Relativity*. Clarendon Press. Oxford.(1992).

[14] S.Carroll. *Spacetime and Geometry: an introduction to General Relativity*. Addison-Wesley.(2003).

[15] S.Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* John Wiley and Sons, New York. (1972).

[16] J. A. Nieto, Mod. Phys. Lett. A **20**, 135 (2005) [hep-th/0311083].

[17] M. Henneaux and C. Teitelboim, Phys. Rev. D **71**, 024018 (2005) [gr-qc/0408101].

[18] A. Ashtekar, C. Rovelli and L. Smolin, Phys. Rev. D **44**, 1740 (1991) [hep-th/9202054].

[19] M. Varadarajan, Phys. Rev. D **66**, 024017 (2002) [gr-qc/0204067].

[20] E. Contreras. *Dualidad y Representaciones Geométricas en Teorías de Calibre Abelianas y Gravedad Linealizada.* Trabajo Doctoral, Universidad Central de Venezuela. (2014)