

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA



**ESTUDIO DE UN MODELO MECÁNICO CUÁNTICO ANÁLOGO  
A LOS MODELOS TIPO CHERN-SIMONS**

Trabajo Especial de Grado presentado por  
Asdrubal Bravo  
ante la Facultad de Ciencias de la  
Ilustre Universidad Central de Venezuela  
como requisito parcial para optar al título  
de: **Licenciado en Física**  
Con la tutoría de: Prof. Pío Arias

Mayo-2015  
Caracas-Venezuela

*Escuela de Física*



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA



**ESTUDIO DE UN MODELO MECÁNICO CUÁNTICO ANÁLOGO  
A LOS MODELOS TIPO CHERN-SIMONS**

Trabajo Especial de Grado presentado por  
Asdrubal Bravo  
ante la Facultad de Ciencias de la  
Ilustre Universidad Central de Venezuela  
como requisito parcial para optar al título  
de: **Licenciado en Física**  
Con la tutoría de: Prof. Pío Arias

Mayo-2015  
Caracas-Venezuela



## Dedicatoria

Primero a **Dios** creador del Universo por todo el valor, fuerza, energía y motivación que necesitaba en los momentos difíciles de la vida.

A mis padres **Vivina** y **Asdrúbal** que siempre me han acompañado, la preocupación de ambos fue mi , las bendiciones que he recibido de ellos por fin dieron fruto.

A mi hermana **Ingrid** porque siempre ha estado allí en las buenas y en las malas.

A mis amigos que, con un chiste, su palabra de aliento, su compañía, han estado allí y siguieron pendiente del desarrollo de esta investigación. Mención aparte para **Francisco González, Damiano Pantaleo, José Alí Briceño, Miguel Ravelo** y **Rafael de Togores**, uds hermanos me apoyaron siempre y les dedico mi éxito.

Finalmente a los que creían que **NO** podía hacerlo pues creánlo **LO LOGRE!!!**



## Agradecimientos

A la **Universidad Central de Venezuela** por su aporte institucional, de ella aprendí lo importante que es trabajar en grupo empleando muchas veces la imaginación y mostrándome lo bueno de la vida.

A mi Tutor, **Dr. Pío Arias** por haber sido en todos estos años no sólo un gran maestro, sino como un padre para mí, gracias por brindarme su apoyo, amistad, ayuda, experiencia, paciencia y confianza.

Al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias, por su invaluable y generosa cordialidad, preocupación para que culminará esta investigación y a los profesores de la escuela del referido departamento por la enseñanza impartida durante mis años en el pregrado.



## RESUMEN

Estudiamos dos modelos mecánico cuánticos análogos a la teoría topológica masiva vectorial en  $D = 2+1$  dimensiones. A través del estudio de las variables del sistema establecimos una buena comparación entre ambos modelos. Los modelos estudiados correspondieron al Lagrangiano proveiente de la fuerza de Lorentz en los casos cuando la masa es distinto de cero y en el límite cuando la masa va a cero. Empleamos en dicho estudio el formalismo Lagrangiano y Hamiltoniano de la mecánica, además de los corchetes de Poisson y de Dirac. Resolvimos la ecuación de Schrödinger en ambos límites.



# Índice general

Lista de figuras	13
Lista de tablas	15
<b>1. Introducción</b>	<b>17</b>
<b>2. Formulación canónica de la mecánica</b>	<b>21</b>
2.1. Formulación Lagrangiana y Hamiltoniana para finitos grados de libertad . . .	21
2.1.1. Lagrangiano para un sistema mecánico . . . . .	21
2.2. Hamiltoniano para un sistema mecánico . . . . .	23
2.3. Corchetes de Poisson . . . . .	23
2.4. Formulación de la Mecánica. Sistemas regulares y sistemas singulares . . .	25
2.4.1. Sistemas regulares . . . . .	25
2.4.2. Sistemas singulares . . . . .	26
2.4.3. Sistemas con vínculos. Vínculos primarios y secundarios . . . . .	27
2.4.4. Vínculos de primera y segunda clase . . . . .	29
2.4.5. Condiciones de consistencia . . . . .	30
2.4.6. Corchetes de Dirac. . . . .	30
2.5. Formulación Lagrangiana y Hamiltoniana para infinitos grados de libertad	33
2.5.1. Formalismo Lagrangiano para infinitos grados de libertad . . . . .	33
2.5.2. Formalismo Hamiltoniano para infinitos grados de libertad . . . . .	34
<b>3. Teorías tipo Chern-Simons</b>	<b>43</b>
3.1. Introducción . . . . .	43
3.2. Teorías tipo Chern-Simons. Modelo $m \neq 0$ . . . . .	43
3.3. Teorías tipo Chern-Simons. Modelo $m \rightarrow 0$ . . . . .	50
<b>4. Ecuación de Schrödinger en los modelos tipo Chern-Simons</b>	<b>55</b>
4.1. Introducción . . . . .	55
4.2. La Ecuación de Schrödinger. Modelo $m \neq 0$ . . . . .	55
4.3. Solución de la Ecuación de Schrödinger. Modelo $m \rightarrow 0$ . . . . .	64
<b>5. Conclusiones</b>	<b>67</b>

---

<b>A. Transformada de Legendre</b>	<b>69</b>
A.1. Introducción . . . . .	69
A.2. Generalidades. Una variable . . . . .	69
A.2.1. Transformada de Legendre para funciones con una variable . . . . .	70
A.3. Transformada de Legendre para funciones con varias variables . . . . .	71
<b>B. Sistemas de Coordenadas y Separación de variables</b>	<b>73</b>
B.1. Introducción . . . . .	73
B.2. Sistema de Coordenadas Polares . . . . .	73
B.2.1. Ejemplo de aplicación. Hamiltoniano en coordenadas polares . . . . .	74
<b>C. Oscilador Armónico en Mecanica Cuántica</b>	<b>77</b>
C.1. Solución del problema mecánico-cuántico . . . . .	77
<b>D. Ecuación Hipergeométrica Confluente</b>	<b>81</b>
D.1. Introducción . . . . .	81
D.2. Hipergeométrica Confluente . . . . .	81
D.2.1. Ejemplo de Aplicación . . . . .	85
<b>E. Ecuación Diferencial de Laguerre</b>	<b>87</b>
E.1. Ecuación Generalizada de Laguerre . . . . .	87
<b>Bibliografía</b>	<b>92</b>

# Índice de figuras

A.1. Transformada de Legendre, tomada del libro de Arnold . . . . .	69
B.1. Sistema de Coordenadas Polares, tomado del libro Electrodinámica de Jackson . . . . .	74





# Índice de cuadros

4.1. Parámetros $m$ y $n$ de la ecuación de Kummer . . . . .	62
E.1. Propiedades de los polinomios de Laguerre . . . . .	89





# Capítulo 1

## Introducción

En el siglo XVII Isaac Newton formuló sus leyes de la mecánica. Por medio de ellas se describen y predicen el movimiento de los cuerpos visibles en el universo, incluyendo el de los planetas del sistema solar [1]. A pesar de este gran avance, a comienzos del siglo XX se descubrió que varias de las conclusiones teóricas deducidas de las leyes de Newton, no estaban de acuerdo con algunas formulaciones obtenidas en la teoría electromagnética y en fenómenos atómicos, fundamentados en hechos experimentales. Las discrepancias dieron lugar a la mecánica relativista de Einstein quién revolucionó los conceptos de espacio y tiempo, y de la mecánica cuántica.

Siguiendo la idea anterior, para la descripción de la dinámica de un sistema, partimos de la idea de cuerpo, o un conjunto de ellos los cuales representan un sistema de puntos materiales o de partículas puntuales. En este caso, el sistema puede variar en el transcurso del tiempo, y se dice que está cambiando su estado. La situación descrita se caracteriza por la prefijación simultánea de las posiciones (las coordenadas) y de las velocidades de todas sus partículas que conforman ese sistema [1, 2]. Por tanto, en un sistema clásico es importante la determinación de la posición y la velocidad como función del tiempo y del espacio.

Visto de esta perspectiva, el estudio de cualquier sistema físico comienza con la interacción de unas partículas con otras, las cuales se dan por medio del campo de fuerzas. Por tanto en lugar de decir que una partícula ejerce acción sobre otra, puede sustituirse por la idea que esta partícula crea un campo en torno suyo; de tal forma que otra partícula que se encuentre en él actuará cierta fuerza. Ahora bien, las fuerzas que en un instante dado actúan sobre una partícula no se determinan por su posición en dicho instante. En este caso, el cambio de posición de una de las partículas se refleja en las demás al cabo de cierto tiempo, esto significa que el campo cobra realidad física, ya no se puede hablar de interacciones directas entre partículas que se encuentran a cierta distancia entre sí. La interacción, en cada instante, se puede producir únicamente entre puntos contiguos del espacio (acción próxima). Por esta razón debemos hablar de la interacción entre una partícula y el campo y de la interacción entre éste y otra partícula [3].

---

Ubicados en este contexto, para el estudio dinámico de un sistema, recurriremos a la teoría clásica de campos, y por medio de ella al igual que en la mecánica clásica dispondremos de diferentes tipos de formulaciones: Lagrangiana y Hamiltoniana. Por medio de ellas es posible tratar la mecánica desde puntos de vista más generales y de forma equivalente. Si bien el estudio de estos procedimientos se reduce al de las leyes de Newton, en muchas ocasiones, se emplean por su facilidad en la formulación y esto ayuda a dar solución de muchos problemas tanto teóricos como prácticos en áreas, como mecánica cuántica, mecánica estadística, mecánica celeste y electrodinámica.

Con relación a lo antes expuesto, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange corresponden a un sistema de ecuaciones de segundo orden mediante en el cual es posible escribir las aceleraciones en función de las coordenadas y velocidades generalizadas siempre y cuando la matriz Hessiana en las velocidades es no singular. De igual manera, esta condición de no singularidad aparece a la hora de realizar el formalismo Hamiltoniano de manera unívoca cuando dicha matriz es no singular, en este caso decimos que el Lagrangiano es regular, de lo contrario decimos que es singular.

En la actualidad, la mayoría de las teorías de campo como las conocemos, están expresadas en términos de su formulación Lagrangiana, y como se sabe de la mecánica clásica elemental, para pasar de esta formulación a la Hamiltoniana se utiliza la transformada de Legendre, en donde es necesario conocer todos los momentos en términos de las coordenadas y las velocidades generalizadas. Sin embargo, en la mayoría de las teorías de campo que se conocen y que tienen interés físico, esto no es posible. A este tipo de teorías en las que no todos los momentos se expresan en términos de las coordenadas y velocidades generalizadas, se les conoce como teorías singulares.

Atendiendo a los elementos antes expuestos, para este tipo de sistemas existe el formalismo de Dirac el cual permite obtener de forma unívoca el Hamiltoniano y la dinámica del sistema que se estudia con la inclusión de los vínculos. En este tipo de teorías, a partir de la definición de los momentos generalizados, se obtienen relaciones que se llaman vínculos, los cuales aparecen cuando en el sistema no es posible despejar el momento generalizado del sistema en función de las coordenadas y de las velocidades; de ellos se hablarán repetidamente en lo sucesivo.

La presente investigación tiene como finalidad hacer un estudio de los sistemas regulares y singulares en sistemas análogos al descrito por la teoría topológica masiva con énfasis al modelo tipo Chern-Simons por el medio de la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana con la finalidad de encontrar las ecuaciones de movimiento ecuación de Schrödinger. Para lograr esto la investigación la organizamos de la siguiente manera: En el capítulo 2 describiremos la teoría clásica necesaria para el proceso de cuantización. Presentaremos una

---

revisión sobre los conceptos desarrollados en los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano de la mecánica tanto para sistemas regulares como para singulares por medio del estudio por separado en los problemas del oscilador armónico (sistemas de finitos grados) y de la acción autodual (para sistemas de infinitos grados de libertad). Esto incluye el uso de los corchetes de Poisson para describir los sistemas regulares y poder despejar las velocidades generalizadas como función del momento y los corchetes de Dirac, para los singulares, en donde despejar las velocidades en función del momento, no es posible. Por medio de ellos construimos el Hamiltoniano correspondiente y encontramos las ecuaciones de movimiento del sistema. Luego de resueltas estableceremos una relación de equivalencia entre las ecuaciones de movimiento obtenidas aplicando el formalismo Lagrangiano con las que obtuvimos del formalismo Hamiltoniano, en ambos ejemplos.

El capítulo 3 estudiaremos la Teoría tipo Chern-Simons en  $2 + 1$  dimensiones para el Lagrangiano de Lorentz no relativista de una partícula de masa  $m$  y de carga  $q$  bajo la acción de un campo magnético uniforme externo con la adición de un término potencial en los casos  $m \neq 0$  y otro  $m = 0$ . Compararemos el Lagrangiano proveniente de la teoría de Maxwell-Chern-Simons con su análogo mecánico cuántico. Dividiremos los sistemas obtenidos en regulares y singulares y aplicaremos los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano, desarrollados en el capítulo anterior con la finalidad de encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange como se hace en la mecánica clásica. Luego de encontrarlas y resolverlas, desarrollaremos el límite de masa nula para encontrar la equivalencia de las soluciones obtenidas en ambos modelos.

En el capítulo 4 resolvemos la ecuación Schrödinger para los modelos descritos en el capítulo anterior realizando sobre el Hamiltoniano una separación de variables en coordenadas polares. Buscamos las autofunciones asociadas y los autovalores y conseguimos la solución de la ecuación diferencial en función de los polinomios de Laguerre y comparamos estos resultados en los casos descritos en el límite de masa nula.

Finalmente en el capítulo 5 presentaremos las conclusiones de la investigación.

---



# Capítulo 2

## Formulación canónica de la mecánica

Este capítulo tiene como finalidad comenzar el estudio de los sistemas clásicos regulares y singulares para finitos e infinitos grados de libertad. Esto se logrará desarrollando el formalismo Lagrangiano y Hamiltoniano de la mecánica clásica para el estudio dinámico del sistema. Presentaremos el álgebra de los corchetes de Poisson y los de Dirac en busca de obtener las ecuaciones de movimiento del sistema. En este caso definiremos los vínculos (primarios y secundarios, además de los vínculos de primera y segunda clase) y todas las relaciones importantes para el estudio de sistemas con estas características. Seguidamente aplicaremos dichos resultados al estudio de dos ejemplos.

### 2.1. Formulación Lagrangiana y Hamiltoniana para finitos grados de libertad

#### 2.1.1. Lagrangiano para un sistema mecánico

Consideremos un sistema dinámico descrito por un conjunto de variables pertenecientes al espacio de fases  $(q^i, p_i)$ , en este caso el estado del sistema es caracterizado por los valores de estas variables, es decir, por un punto en el espacio de configuraciones. Ahora bien, el sistema puede cambiar con el tiempo y esto lo podemos caracterizar a través de  $q^i(t)$  y  $\dot{q}^i(t)$ , esto quiere decir, que la evolución del sistema es representada por una trayectoria en el espacio de configuraciones.

En este caso el formalismo Lagrangiano se construye en términos de coordenadas generalizadas  $q^i(t)$  y sus resultados y predicciones deben ser independientes del sistema coordinado usado. Esto significa que las ecuaciones de movimiento, a partir de las cuales se extrae toda la información relevante deben ser invariantes bajo transformaciones de coordenadas del espacio de configuración. Por lo tanto, bajo una transformación de coordenadas del espacio de configuración el nuevo Lagrangiano debe dar origen a la misma dinámica.

En la mecánica clásica un sistema con un número finito de grados de libertad se

---

describe por medio de una función  $L$  llamada **Lagrangiano del sistema** [1, 3, 4, 5, 6, 7]. Dicha cantidad depende de las coordenadas, las velocidades y del tiempo.

$$L = L(q^i, \dot{q}^i, t), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (2.1)$$

donde las  $q^i$  son coordenadas generalizadas, las  $\dot{q}^i$  son velocidades generalizadas, las cuales sirven para describir el sistema mecánico y  $s$  el número de variables dinámicas para describir el sistema.

Todo sistema mecánico tiene asociado un objeto llamado la **acción** [1, 3, 7, 8, 9]

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t) dt, \quad (2.2)$$

y la evolución en el espacio de configuraciones  $(q^i, \dot{q}^i)$  se da en trayectorias cuya variación dejan invariante la acción,  $\delta S = 0$ .

La variación de la acción cuando cuando se perturba una trayectoria es

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t) dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Como  $\delta \dot{q}^i = \frac{d}{dt} \delta q^i$ , realizamos una integración por partes en el segundo término de (2.3)

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt = 0. \quad (2.4)$$

Escogiendo que la perturbación se anule en  $t_1$  y  $t_2$ , si las variaciones  $\delta q^i$  son generales, entonces el factor en la integral se anula. Obtenemos así las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$L_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0, \quad (2.5)$$

las cuales corresponden a un sistema de ecuaciones de segundo orden. Esto se ve explícitamente si desarrollamos (2.5)

$$\begin{aligned} L_i &\equiv -\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \ddot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} \\ &= 0, \end{aligned}$$

reorganizándola

$$\ddot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial t \partial \dot{q}^i}. \quad (2.6)$$

Si el determinante de la matriz  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$  es distinto de cero, significa que la matriz posee inversa y podemos emplear este resultado para encontrar las aceleraciones generalizadas en función de las velocidades y las coordenadas.

## 2.2. Hamiltoniano para un sistema mecánico

El primer aspecto a considerar es reescribir las ecuaciones de Euler-Lagrange, de segundo orden, en una manera que involucre sólo derivadas de primer orden, en este caso emplearemos el formalismo Hamiltoniano.

Ubicados específicamente en la necesidad de reescribir las ecuaciones de Euler-Lagrange de una manera más sencilla, en el apéndice A se introduce el concepto de transformada de Legendre de una función. Partimos del Lagrangiano dado por (2.1), en este caso el Hamiltoniano se define como su transformada de Legendre tomando a las  $\dot{q}^i$  como variables activas.

En este sentido

$$H = (p_i \dot{q}^i - L) \Big|_{p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}}, \quad (2.7)$$

$H$  representa el Hamiltoniano del sistema y  $p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$  representa el momento generalizado asociado a la coordenada generalizada  $q^i$ , el cual también es conocido como momento conjugado. El punto de partida del formalismo Hamiltoniano es introducir el momento  $p^i$  canónicamente conjugado a la coordenada  $q^i$ . Apreciamos que la ecuación (2.7) no depende de las  $\dot{q}^i$ .

Por otro lado el Hamiltoniano del sistema es:

$$\begin{aligned} d(p_i \dot{q}^i - L) \Big|_{p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}} &= \left( dp_i \dot{q}^i + p_i d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \right) \\ &= \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

De aquí tenemos en cuenta las ecuaciones (2.5) con  $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i}$ , obtenemos las relaciones

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Que constituyen un sistema de ecuaciones de primer orden para las  $q^i$ 's y  $p^i$ 's.

## 2.3. Corchetes de Poisson

Definimos para  $F$  y  $G$ , funciones que dependen de  $q^i$  y  $p_i$

$$F \equiv F(q^i, p_i, t); \quad G \equiv G(q^i, p_i, t),$$

en este caso el corchete de Poisson entre ambas funciones es

$$\{F, G\} \equiv \left( \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \right), \quad (2.10)$$

donde los índices repetidos siguen la convención de Einstein para la suma.

De donde se obtienen los corchetes fundamentales

$$\{q^i, q^j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i. \quad (2.11)$$

El corchete de Poisson satisface las siguientes propiedades

1. Antisimetría:

$$\{F, G\} = -\{G, F\}$$

2. Bilinealidad:

$$\{C_1 F_1 + C_2 F_2, G\} = C_1 \{F_1, G\} + C_2 \{F_2, G\}$$

3. Propiedad del producto:

$$\{F_1 F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} + \{F_1, G\} F_2$$

4. Existencia de elementos neutros:

$$\{F, C\} = 0$$

5. Identidad de Jacobi:

$$\{F, \{G, M\}\} + \{G, \{M, F\}\} + \{M, \{F, G\}\} = 0$$

Como consecuencias importantes tenemos que

$$\{q^i, F\} = \frac{\partial F}{\partial p_i}; \quad \{p_i, F\} = -\frac{\partial F}{\partial q^i}. \quad (2.12)$$

Para una función en  $F$  en el espacio de fases  $(p_i, q^i, t)$  resulta que

$$\frac{dF}{dt} = \left( \frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (2.13)$$

$$= \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Sustituyendo las ecuaciones de Hamilton en (2.14) obtenemos

$$\frac{dF}{dt} = \left( \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

La cantidad entre paréntesis comparando con (2.10) resulta ser

$$\{F, H\} = \left( \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right), \quad (2.15)$$

por tanto la ecuación (2.15) nos permite hallar la derivada temporal de  $F$  usando el corchete de Poisson entre  $H$  y  $F$  más la derivada parcial respecto al tiempo

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.16)$$

Si el objeto  $F$  no depende explícitamente del tiempo y

$$\{F, H\} = 0,$$

se tiene que  $F$  es constante de movimiento.

## 2.4. Formulación de la Mecánica. Sistemas regulares y sistemas singulares

### 2.4.1. Sistemas regulares

En forma general para el estudio de sistemas mecánicos, asumimos de entrada que en un sistema regular es posible despejar todas las velocidades  $\dot{q}^i$  como función del momento, las coordenadas y el tiempo.

Para aclarar la situación descrita con anterioridad, identificamos la acción del sistema.

$$S = \int dt L(q^i, \dot{q}^i, t),$$

ahora bien el momento canónico es

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (2.17)$$

y podemos obtener

$$\dot{q}^i = \dot{q}^i(q^i, p_i, t).$$

En este orden de ideas para despejar las  $\dot{q}^i$  es necesario según el teorema de la función implícita que  $\det(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}) \neq 0$ . Siguiendo el orden de la idea anterior, como ejemplo resolveremos el problema del oscilador armónico simple en una dimensión.

#### **Ejemplo. Oscilador armónico simple en una dimensión**

Estudiemos el problema del oscilador armónico simple en una dimensión. El tipo de potencial es  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ .

El Lagrangiano es

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2,$$

---

el cual depende de  $x$  y  $\dot{x}$ .

Aplicamos el formalismo Lagrangiano. De las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= 0 \\ -m\omega^2 x - m\ddot{x} &= 0 \\ \implies \ddot{x} &= -\omega^2 x.\end{aligned}$$

Pasamos ahora al formalismo Hamiltoniano. En este sentido el momento generalizado es.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}.$$

Podemos apreciar que  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^i} \neq 0$  por tanto el sistema es regular. De aquí obtenemos las velocidades en función del momento.

$$\dot{x} = \frac{p}{m}$$

Construimos el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2,$$

donde  $\omega$  representa la frecuencia clásica de un oscilador descrito por una constante de elongación  $k$ , que según la Ley de Hooke es de la forma  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . En este caso los corchetes de Poisson fundamentales son:

$$\{x, p\} = 1; \quad \{x, x\} = 0; \quad \{p, p\} = 0.$$

y verificando

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \{x, H\} \\ &= \frac{p}{m}\end{aligned}\tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \{p, H\} \\ &= -m\omega^2 x\end{aligned}\tag{2.19}$$

Así sustituyendo (2.18) en (2.19) obtenemos

$$\ddot{x} = -\omega^2 x,$$

que corresponden a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

### 2.4.2. Sistemas singulares

Planteamos la existencia de los sistemas llamados singulares, para los cuales la matriz Hessiana es singular, esto es,  $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = 0$ . Por esta razón en este tipo de sistemas aplicar

el formalismo Lagrangiano no permite despejar todas las aceleraciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange estableciéndose una serie de relaciones nuevas entre las coordenadas y las velocidades, las cuales llamaremos vínculos.

Con respecto al formalismo Hamiltoniano al calcular la transformada de Legendre podemos verificar que no tampoco es posible expresar las velocidades como función del momento lo cual lleva además a la aparición de funciones arbitrarias en la solución (vínculos). La aparición de estas funciones es frecuente en teorías de calibre.

En vista de lo anterior, debemos trabajar con una nueva herramienta para realizar el estudio de sistemas con vínculos. En este caso empleamos el método de Dirac, el cual permite de manera consistente pasar del formalismo Lagrangiano al Hamiltoniano recuperando información clave para el estudio de la dinámica del sistema.

### 2.4.3. Sistemas con vínculos. Vínculos primarios y secundarios

En la formulación variacional de la mecánica clásica admitimos que las ecuaciones de Euler-Lagrange se integran sin dificultad. Esto es posible, siempre que la matriz Hessiana cumpla con la condición  $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) \neq 0$ . En caso contrario, estaremos hablando de Lagrangianos de sistemas singulares.

Consideremos por ahora las relaciones

$$\Phi^m(q^i, \dot{q}^i) = 0 \quad \text{con } m = 1, 2, \dots; M < s. \quad (2.20)$$

Sin embargo para el formalismo Lagrangiano, si hablamos de la condición de singularidad, las relaciones provenientes de (2.20) son los vínculos del sistema. En concreto existen  $m = s - M$  aceleraciones no despejadas con  $s$  número de coordenadas generalizadas para la descripción del sistema y  $M$  las aceleraciones despejadas del sistema.

En el caso del formalismo Hamiltoniano consideremos el Lagrangiano

$$L = L(q^i, \dot{q}^i, t) \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (2.21)$$

donde no es posible despejar todas las velocidades como función del momento. Ahora bien

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i},$$

y en cual despejamos  $r$  velocidades

$$\dot{q}^I = \dot{q}^I(q^i, p_i, \dot{q}^\alpha), \quad I = [i_1, i_2, \dots; i_r]$$

siendo  $I$  una partición de  $r$  índices de las  $i$ 's y  $\alpha$  correspondiente a las velocidades que no pudieron despejarse. Como se afirmó arriba al sustituirse en la definición del momento obtenemos relaciones

---

$$\Phi^m(q^i, p_i) = 0, \quad (2.22)$$

con  $m = 1, 2, \dots, M$ . llamadas vínculos primarios (2.22) los cuales restringen la dinámica a un sub-espacio de dimensión  $(2s - M)$  del espacio de fases, el cual era de dimensión  $2s$  y son característica propia del Lagrangiano singular.

En particular definimos el Hamiltoniano canónico ( $H_C$ )

$$H_C = (\dot{q}^i p_i - L)|_{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}}, \quad (2.23)$$

depende sólo de los  $(q's, p's, t)$ . A fin de continuar con el análisis de  $H$ , le sumamos una combinación de los vínculos primarios

$$H = H_C + \lambda_m \phi^m, \quad (2.24)$$

y  $m$  corre por todos los vínculos. Para ser más específicos la cantidad  $H$  la conocemos como el **Hamiltoniano** y  $\lambda_m$  los multiplicadores de Lagrange asociados a cada vínculo.

De igual modo la **acción**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^i p_i - H_C - \lambda_m \phi^m), \quad (2.25)$$

contiene el Hamiltoniano e igualmente obtenemos las ecuaciones de movimiento partiendo del principio variacional

$$\begin{aligned} \ddot{q}^i &= \frac{\partial H_C}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_i}, \\ \dot{p}^i &= -\frac{\partial H_C}{\partial q^i} - \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q^i}, \\ \phi^m(q^i, p_i) &= 0. \end{aligned}$$

Así mismo las nuevas ecuaciones de Hamilton son equivalentes a las de Euler-Lagrange y lo más importante es que son compatibles con los vínculos.

Consecuencias importantes de lo anterior

- $\{\phi^m, \phi^{m'}\}$  no tiene rango cero, permite despejar algunos  $\lambda_m$ .
- La hipersuperficie  $\phi^m = 0$  no se intersecta con la hipersuperficie  $\{\phi^m, H\} = 0$ . Aparecen vínculos adicionales llamados **secundarios**.

En caso que suceda la segunda condición, se tendrán  $k$  vínculos nuevos de la forma  $\phi^{k'}(q^i, p_i) = 0$  con  $k' = [M+1, \dots, M+k]$ , los cuales también se les exige que se mantengan sobre la trayectoria del sistema.

$$\dot{\phi}^{k'} = \{\phi^{k'}, H\}|_{\Gamma_1} = 0. \quad (2.26)$$

Avanzando en nuestro razonamiento, aplicamos (2.26) y conduce a las situaciones descritas. En particular si aparecen nuevos vínculos los llamaremos **terciarios**, por lo que a estos también se les exigirá que se conserven en el tiempo. Repetiremos el proceso sucesivamente hasta que no aparezcan nuevos vínculos.

Como resultado de lo anterior aparecen un conjunto de vínculos

$$\phi^a = \{\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^A\}, \quad (2.27)$$

en donde incluimos los  $M$  primarios y los  $A - M$  restantes (secundarios, terciarios, entre otros.)

#### 2.4.4. Vínculos de primera y segunda clase

De la misma forma como ocurrió en los vínculos primarios y secundarios. existen dos tipos de vínculos, los cuales aparecen al estudiar sistemas con restricciones (ligaduras). Tenemos un vínculo de primera clase el cual genera transformaciones de calibre y otro llamado vínculo de segunda clase el cual usamos para construir el corchete de Dirac, que en teorías que presentan restricciones vendría a sustituir al corchete de Poisson cuando se desea encontrar la evolución dinámica del sistema.

A continuación consideremos la matriz obtenida de los corchetes de Poisson de los vínculos  $\{\phi^m, \phi^n\}$ .

$$0 \text{ rango}(\{\phi^m, \phi^n\})m \quad (2.28)$$

En efecto  $\{\phi^m, \phi^n\}$  es anti-simétrica y su rango es par,  $\text{rango}(\{\phi^m, \phi^n\}) = 2I = R$ . Seguidamente se eligen nuevos vínculos, los cuales son combinaciones lineales de los originales, de modo tal que podamos diagonalizar por bloques la matriz  $\{\phi^m, \phi^n\}$ .

Escribimos la matriz que contiene los vínculos de primera clase  $\phi^m$

$$\{\phi^m, \phi^n\} = \begin{pmatrix} \chi_{R \times R} & O_{R \times k} \\ O_{k \times R} & O_{k \times k} \end{pmatrix}.$$

De esta manera Hamiltoniano extendido es

$$H_E = H_C + \lambda_m \phi^m + \theta_n \chi^n \quad (2.29)$$

El cual contiene los vínculos primarios y secundarios  $\phi^m$  y los de primera y segunda clase  $\chi^n$  Recordemos que la derivada temporal de una función genérica  $F(\vec{q}, \vec{p})$  es

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i, \\ &= \frac{\partial F}{\partial q^i} \left( \frac{\partial H_C}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial p_i}, \\ &= \{F, H_C\} + \lambda_m \{F, \phi^m\}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

además este resultado en (2.29) la ecuación (2.30) toma la forma

$$\dot{F} = \{F, H_E\} \approx \{F, H_C\} + \lambda_m \{F, \phi^m\} + \theta_n \{F, \chi^n\}. \quad (2.31)$$

Las ecuaciones de Hamilton contienen funciones desconocidas  $\vec{\lambda}$ . Debemos tener presente que se está tratando con un sistema de vínculos, lo cual significa que no todas las coordenadas canónicas son independientes y por tanto las ecuaciones de Hamilton (2.29) y (2.30) tampoco lo son.

En realidad para calcular la evolución de las variables canónicas empleamos el Hamiltoniano extendido y lo proyectamos sobre la variedad de los vínculos.

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \{q^i, H_E\}|_{\Gamma_1}, \\ \dot{p}^i &= \{p^i, H_E\}|_{\Gamma_1}, \\ \phi^m &= 0, \end{aligned}$$

De igual modo la presencia de multiplicadores arbitrarios en las ecuaciones de movimiento, significa que las variables  $\vec{q}(t)$  y  $\vec{p}(t)$  no se pueden determinar en forma única a partir de los valores iniciales  $q^i(0)$  y  $p_i(0)$ . La información física acerca de un sistema es obtenida de las funciones  $A(\vec{q}, \vec{p})$ , definidas sobre la superficie de los vínculos y tales funciones son las cantidades observables del sistema. Se infiere que el estado físico de un observable es determinado por el conjunto completo de cantidades observables del sistema en ese instante.

### 2.4.5. Condiciones de consistencia

La evolución de las variables canónicas del espacio de fases contiene funciones arbitrarias y se pueden hacer explícitas por medio de las condiciones de consistencia [4]. En este caso exigimos que la dinámica del sistema tenga lugar sobre  $\Gamma_1$ . Sin embargo, es posible que la dinámica no permanezca en la superficie sino en los alrededores, y es probable que existan contribuciones de la vecindad. Por tanto se hace necesario que dichos vínculos permanezcan constantes por lo que las derivadas temporales deben ser débilmente cero.

$$\dot{\phi}^\mu \approx \{\phi^\mu, H_C\} + \lambda_\eta \{\phi^\mu, \phi^\eta\} \approx 0, \quad (2.32)$$

$$\dot{\chi}^\nu \approx \{\chi^\nu, H_C\} \approx 0. \quad (2.33)$$

A partir de (2.32) determinamos algunos de los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_\eta$ .

### 2.4.6. Corchetes de Dirac.

Admitamos lo siguiente

$$\phi^l \approx 0,$$

con  $l = 1, \dots, w < k$  representan los vínculos secundarios, los cuales se han obtenido usando las ecuaciones de movimiento.

Dirac postuló que para estudiar este tipo de relaciones se puede emplear un formalismo parecido al desarrollado para vínculos primarios [4]. Existe un Hamiltoniano canónico  $H_C$  y un conjunto de vínculos, primarios y secundarios, los cuales describen el sistema mecánico. Conveniente separar los vínculos en primera y segunda clase y aplicar nuevamente las condiciones de consistencia.

Como consecuencia de lo anterior es posible que aparezcan nuevos vínculos y el procedimiento se deba repetir hasta llegar a la situación en la que no aparezcan nuevos vínculos, y es aquí donde hemos satisfecho las condiciones de consistencia.

Postulamos el Hamiltoniano extendido. La evolución temporal viene dada por el Hamiltoniano que contiene todos los vínculos (primarios y secundarios, junto con los de primera y segunda clase).

$$H_E = H_C + \lambda_\mu \phi^\mu + \theta_\nu \chi^\nu.$$

Recordemos que la evolución temporal de la Función genérica  $F(\vec{q}, \vec{p})$

$$\dot{F} = \{F, H_E\} \approx \{F, H_C\} + \lambda_\mu \{F, \phi^\mu\} + \theta_\nu \{F, \chi^\nu\},$$

bajo las condiciones de consistencia dadas en primer lugar por (2.33) la cual se satisface automáticamente y no generan nuevos vínculos. En cambio para (2.32) eso no se puede verificar a simple vista, ante esta situación definimos

$$C_{AB} \equiv \{\psi_A, \psi_B\},$$

la cual representa la matriz obtenida de los corchetes de Poisson con vínculos de segunda clase y por definición es regular. Del cálculo elemental existe una matriz inversa  $C^{BC}$  la cual satisface

$$C_{AB} C^{BC} = \delta_A^C.$$

Tenemos

$$\lambda_\mu \approx -C_{\mu\eta} \{\phi^\eta, H_C\}$$

Notése que podemos despejar los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_\mu$  asociados a los vínculos primarios.

Consideremos nuevamente la evolución temporal

$$\dot{F} \approx \{F, G\} - \{F, \psi_A\} C^{AB} \{\psi_B, G\} + \theta_\mu \{F, \chi^\mu\}.$$

Definimos la siguiente relación

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \psi_A\} C^{AB} \{\psi_B, G\}. \quad (2.34)$$

La ecuación (2.34) representa el corchete de Dirac y como se ha expuesto anteriormente para sistemas con vínculos es mucho más útil que el corchete de Poisson.

Como resultado de lo anterior la evolución temporal de  $F$  es

$$\dot{F} \approx \{F, H_C\}^* + \theta_\nu \{F, \chi^\nu\} \quad (2.35)$$

En consecuencia logramos describir la dinámica del sistema singular empleando el formalismo Hamiltoniano con la ayuda de los corchetes de Dirac.

Para terminar los corchetes de Dirac tiene como propiedades

1. Antisimetría

$$\{F, G\}^* = -\{G, F\}^*.$$

2. Biinealidad:

$$\{a_1 F_1 + a_2 F_2, G\}^* = a_1 \{F_1, G\}^* + a_2 \{F_2, G\}^*.$$

3. Regla de Leibniz:

$$\{F_1 F_2, G\}^* = \{F_1, G\}^* F_2 + F_1 \{F_2, G\}^*.$$

4. Identidad de Jacobi:

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}^*\}^* + \{F_2, \{F_3, F_1\}^*\}^* + \{F_3, \{F_1, F_2\}^*\}^* = 0.$$

Para  $G$  de primera clase y  $F$  arbitrario

$$\{F, G\}^* = \{F, G\}.$$

En particular para el Hamiltoniano

$$\{F, H\}^* = \{F, H\}.$$

Lo anterior significa que es posible obtener las ecuaciones de movimiento del sistema empleando los corchetes de Poisson o los de Dirac. Por tanto el corchete de Dirac es el corchete de Poisson solamente para las variables relevantes del espacio de fase. La evolución temporal del funcional  $F$  de variables canónicas se obtiene mediante

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}^*.$$

## 2.5. Formulación Lagrangiana y Hamiltoniana para infinitos grados de libertad

### 2.5.1. Formalismo Lagrangiano para infinitos grados de libertad

Con respecto al caso de sistemas con infinitos grados de libertad el índice  $i$  de coordenadas representa un sistema continuo y toma valores en cada punto de la variedad espacial de dimensión  $D$ . Por otro lado el límite al continuo los estudiamos así

$$q^i(t) \rightarrow Q_a(t, \vec{x}), \quad \vec{x} \in R^D \quad (2.36)$$

En este caso las derivadas espaciales aparecen como diferencias en los valores de  $Q_a$  en puntos cercanos

$$Q_a(t, \vec{x} + \Delta\vec{x}) - Q_a(t, \vec{x}) \sim \Delta\vec{x} \cdot \vec{\nabla} Q_a \quad (2.37)$$

Asumimos que las coordenadas generalizadas pueden tener una etiqueta  $a$  discreta adicionalmente [6]. Ejemplos de esto

$$\begin{aligned} Q_a &\sim \phi(t, \vec{x}) && (\text{campo escalar}) \\ &\sim A_\mu(t, \vec{x}) && (\text{potencial vector}). \end{aligned}$$

La acción será

$$S = \int_{\Omega} dt L(Q_a, \partial_\mu Q_a, x^\mu), \quad (2.38)$$

donde  $\partial_\mu Q_a = (\dot{Q}_a, \vec{\nabla} Q_a)$  y  $x^\mu = (t, \vec{x})$ .

El nuevo Lagrangiano con el cambio queda escrito así

$$L = \int d^D x \mathcal{L}(Q_a, \partial_\mu Q_a, X^\mu), \quad (2.39)$$

la suma en la parte espacial la expresamos como una integral, el símbolo representado por  $\mathcal{L}$  lo conocemos como **densidad lagrangiana**. Como  $S$  depende de  $Q_a(x)$  en toda la región de  $\Omega$ , decimos que es un funcional de  $Q_a$ , por tanto

$$S = S[Q_a] \quad (2.40)$$

A su vez los puntos estacionarios ( $\delta S = 0$ ) se obtienen

$$\begin{aligned} 0 &= \int dt \left[ \frac{\delta L}{\delta Q_a} Q_a + \frac{\delta L}{\delta \dot{Q}_a} \delta \dot{Q}_a \right] \\ &= \int dt d^D x \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu Q_a} \right) \delta Q_a + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu Q_a} \delta Q_a \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Repetimos los pasos realizados para el caso de finitos grados de libertad, para  $\delta Q_a$  arbitrarias tenemos que  $\delta S = 0$ , lo cual efectivamente implican las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu Q_a} = 0. \quad (2.42)$$

Podemos determinar el momento generalizado de la misma forma que en el caso finitos grados de libertad.

$$\Pi^a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_a}. \quad (2.43)$$

### 2.5.2. Formalismo Hamiltoniano para infinitos grados de libertad

Para sistemas regulares el formalismo Hamiltoniano viene dado por las relaciones

$$H = \int d^D x (\Pi^a \dot{Q}_a - \mathcal{L}) \equiv \int d^D x \mathcal{H}, \quad (2.44)$$

donde  $\mathcal{H}$  representa densidad Hamiltoniana.

Comprobamos que las ecuaciones de Hamilton se generalizan como

$$\dot{Q}_a^{(x)} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi^a(x)}; \quad \dot{\Pi}^a(x) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_a(x)}. \quad (2.45)$$

Los corchetes de Poisson entre dos variables  $A = [Q_a, \Pi^a]$  y  $B = [Q_b, \Pi^b]$  vienen dados por la relaciones

$$\{A, B\} = \int d^D x \left[ \frac{\delta A}{\delta Q_a(x)} \frac{\delta B}{\delta \Pi^a(x)} - \frac{\delta A}{\delta \Pi^a(x)} \frac{\delta B}{\delta Q_a(x)} \right].$$

Además las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{Q}_a(x) = \{Q_a(x), H\}, \quad \dot{\Pi}^a(x) = \{\Pi^a(x), H\}.$$

Los corchetes fundamentales serán en este caso

$$\{Q_a(x), Q_b(y)\} = 0; \quad \{\Pi^a(x), \Pi^b(x)\} = 0; \quad \{Q_a(x), \Pi^b(y)\} = \delta^D(\vec{x} - \vec{y});$$

Debemos recalcar que el formalismo Lagrangiano y Hamiltoniano para sistemas singulares se explicará por medio de un ejemplo con la acción autodual [10, 11].

**Ejemplo. La Acción Autodual**

El siguiente ejemplo trata del estudio de sistemas con infinitos grados de libertad pero ahora en sistemas singulares. En este caso discutimos el paso del formalismo Lagrangiano al formalismo Hamiltoniano con la ayuda de los corchetes de Dirac. Considereremos la acción autodual

$$S = -\frac{m}{2} \int d^3x (\epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda + m A_\mu A^\mu) \quad (2.46)$$

donde  $\epsilon^{\mu\nu\lambda}$  es el símbolo de Levi-Civita. Por otra parte empleamos la densidad Lagrangiana (2.39) para encontrar las ecuaciones de movimiento y compararlas con las obtenidas empleando el formalismo Hamiltoniano.

$$\mathcal{L} = -m\epsilon^{ij} \left( A_0 \partial_i A_j + \frac{1}{2} \dot{A}_i A_j \right) + \frac{m^2}{2} (A_0 A_0 - A_i A_i), \quad (2.47)$$

con  $i, j$  representando índices espaciales y se han hecho algunas integrales por partes teniendo en cuenta que los campos se anulan en el infinito.

El siguiente aspecto trata de aplicar el formalismo Lagrangiano a esta acción. En particular usamos la ecuación (2.42) y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} &= -\frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda - m^2 A^\mu, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu A_\mu} &= -\frac{m}{2} \epsilon^{\lambda\nu\mu} A_\lambda. \end{aligned}$$

Tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu A_\mu} = -\frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda - m^2 A^\mu - \partial_\nu \left( -\frac{m}{2} \epsilon^{\lambda\nu\mu} A_\lambda \right),$$

de donde obtenemos las ecuaciones de movimiento.

$$-\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda - m A^\mu = 0 \quad (2.48)$$

Se infiere que el Lagrangiano es singular, pues de

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\frac{m}{2} \epsilon^{\lambda 0 \mu} A_\lambda.$$

Se observa que  $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\nu \partial \dot{A}_\mu} = 0$ .

Prosigamos el análisis de este sistema con el formalismo Hamiltoniano. En primer partiendo de la descomposición 2 + 1 de la acción

$$S^{2+1} = \int d^3x \left[ -m\epsilon^{ij} \left( A_0 \partial_i A_j + \frac{1}{2} \dot{A}_i A_j \right) - \frac{m^2}{2} (-A_0 A_0 + A_i A_i) \right] + \text{terminos de borde.}$$

Recordemos que el momento viene dado por

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}.$$

De aquí obtenemos

$$\Pi^0 = 0; \quad \Pi^i = -\frac{m}{2}\epsilon^{ij}A_j, \quad (2.49)$$

observamos que no es posible depejar las velocidades del sistema en función del momento. Dicho lo anterior definimos los vínculos primarios  $\phi$  y  $\phi_i$  como

$$\phi^0 = \Pi^0; \quad \phi^i = \Pi^i + \frac{m}{2}\epsilon^{ij}A_j, \quad (2.50)$$

a continuación construimos el Hamiltoniano canónico

$$H_C = \int d^2x \left[ m\epsilon^{ij}A_0\partial_i A_j - \frac{m^2}{2}(A_0A_0 - A_iA_i) \right]. \quad (2.51)$$

El Hamiltoniano es entonces

$$H = H_C + \int d^2x \lambda_\mu \phi^\mu, \quad (2.52)$$

el cual contiene los vínculos primarios encontrados hasta ahora.

En relación con los vínculos, postulamos los corchetes fundamentales

$$\{A_\mu(x), \Pi^\nu(y)\}|_{x^\nu=y^\nu} = \delta_\mu^\nu \delta^2(\vec{x} - \vec{y}); \quad \{A_\mu(x), A_\nu(y)\}|_{x^\nu=y^\nu} = 0; \quad \{\Pi^\mu(x), \Pi^\nu(y)\}|_{x^\nu=y^\nu} = 0 \quad (2.53)$$

A su vez la relación de consistencia sobre el primer vínculo primario (débilmente cero) es

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \{\phi, H\} \\ &= \int d^2y \{ -m\epsilon^{ij}\partial_i^y A_j \delta^2(x-y) + m^2 A_0^y \delta^2(x-y) \} \\ &= -m\epsilon^{ij}\partial_i A_j + m^2 A_0 \approx 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

acorde con la teoría desarrollada obtenemos un término que no es cero, dicho lo anterior identificamos un nuevo vínculo (secundario).

$$\dot{\phi} = -m\epsilon^{ij}\partial_i A_j + m^2 A_0 \approx 0, \quad (2.55)$$

si escogemos  $\chi = \frac{\phi^0}{m}$  escribimos lo siguiente

$$\chi = -\epsilon^{ij}\partial_i A_j + mA_0. \quad (2.56)$$

Del mismo modo inspeccionamos la consistencia en el segundo vínculo primario

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}^i &= \{\phi^i, H\} \\
 &= \int d^2y \left\{ \Pi^i + \frac{m}{2} \epsilon^{ij} A_j, \frac{m^2}{2} A_k A_k + mA_0 \epsilon^{kl} \partial_k A_l + \lambda_k \left( \Pi^k + \frac{m}{2} \epsilon^{kl} A_l \right) \right\} \\
 &= -m^2 A_i + \lambda_j \frac{m}{2} \epsilon^{ij} - \lambda_j \frac{m}{2} \epsilon^{ji} - m \epsilon^{ji} \partial_j A_0 \\
 &\approx 0,
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

la preservación del vínculo primario  $\phi^i$  representa una condición para determinar los multiplicadores de Lagrange ( $\lambda_i$ ) de tal manera que

$$\lambda_i = \partial_i A_0 - m \epsilon_{ij} A_j. \tag{2.58}$$

Resta aplicar las condiciones de consistencia sobre  $\chi$

$$\begin{aligned}
 \dot{\chi} &= \{\chi, H\} \\
 &= \int d^2y \{mA_0 - \epsilon^{ij} \partial_i A_j, \lambda \Pi^0 + \lambda_p \Pi^p\} \\
 \implies \lambda &= \frac{1}{m} \epsilon^{ij} \partial_i \lambda_j
 \end{aligned}$$

Tomamos en cuenta (2.58) y la antisimetría de  $\epsilon^{ij}$

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{1}{m} \epsilon^{ij} \partial_i (\partial_j A_0 - m \epsilon_{jk} A_k) \\
 &= \partial_i A_i.
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

La preservación del segundo vínculo nos permite despejar el multiplicador  $\lambda$ . Dado que no aparecen nuevos vínculos el proceso termina aquí.

En resumen, hemos obtenido dos vínculos primarios,

$$\phi = \Pi^0; \quad \phi^i = \Pi^i + \frac{m}{2} \epsilon^{ij} A_j,$$

un vínculo secundario

$$\chi = \epsilon^{ij} \partial_i A_j - mA_0 \tag{2.60}$$

y se despejaron los multiplicadores de Lagrange

$$\lambda = \partial_i A_i; \quad \lambda_i = \partial_i A_0 - m \epsilon^{ij} A_j$$

La teoría presenta solamente restricciones de segunda clase. Construimos la matriz  $\Psi_A$ , la cual tiene como entradas

$$\Psi_A \equiv (\phi, \chi, \phi^i). \tag{2.61}$$

Desarrollamos los corchetes de Poisson para estas cantidades

$$\begin{aligned} \{\phi, \phi\} &= 0; & \{\phi, \phi^k\} &= 0; & \{\phi, \chi\} &= -m\delta^2(x-y) \\ \{\phi^i, \chi\} &= \epsilon^{ij}\partial_j\delta^2(x-y); & \{\phi^i, \phi^k\} &= m\epsilon^{ik}\delta^2(x-y). \end{aligned} \quad (2.62)$$

La matriz  $C_{AB}(x, y) = \{\Psi_A(x), \Psi_B(y)\}|_{x^0=y^0}$  es de la forma

$$\mathbf{C}_{AB}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -m & 0 \\ m & 0 & \epsilon^{kl}\partial_l \\ 0 & \epsilon^{ik}\partial_j & m\epsilon^{ik} \end{pmatrix} \delta^2(x-y)$$

Señalamos a  $C^{BC}(y, z)$  como la matriz inversa de  $C_{AB}(x, y)$

$$\mathbf{C}^{BC}(y, z) = \begin{pmatrix} A & D & G_l \\ B & E & H_l \\ C_k & F_k & I_{kl} \end{pmatrix}$$

Desarrollando encontramos la matriz inversa es

$$\mathbf{C}^{BC}(y, z) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2}\partial_k \\ -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ \frac{1}{m^2}\partial_i & 0 & \frac{-1}{m}\epsilon_{ik} \end{pmatrix} \delta^2(y-z)$$

Ahora aplicamos los corchetes de Dirac a todas las variables del sistema

$$\begin{aligned} \{A_0(x), A_0(y)\}^*|_{x^0=y^0} &= \{A_0(x), A_0(y)\} - \int d^2z d^2w \{A_0(x), \Psi(z)^l\} C_{lk}(z, w) \{\Psi^k(w), A_0(y)\} \\ &= - \int d^2z d^2w \{A_0(x), \phi^0(z)\} C_{00}(z, w) \{\phi^0(w), A_0(y)\} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \{A_i(x), A_j(y)\}^*|_{x^0=y^0} &= \{A_i(x), A_j(y)\} - \int d^2z d^2w \{A_i(x), \Psi^l(z)\} C_{lk}(z, w) \{\Psi^k(w), A_j(y)\} \\ &= - \int d^2z d^2w \{A_i(x), \phi^0(z)\} C_{00}(z, w) \{\phi^0(w), A_j(y)\} \\ &= -\frac{1}{m}\epsilon_{ij}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \{A_0(x), A_i(y)\}^*|_{x^0=y^0} &= \{A_0(x), A_i(y)\} - \int d^2z d^2w \{A_0(x), \Psi^l(z)\} C_{lk}(z, w) \{\Psi^k(w), A_i(y)\} \\ &= \frac{1}{m^2}\partial_k\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \{A_0(x), \Pi^0(y)\}^*|_{x^0=y^0} &= \{A_0(x), \Pi^0(y)\} - \int d^2z d^2w \{A_0(x), \Psi^l(z)\} C_{lk}(z, w) \{\Psi^k(w), \Pi^0(y)\} \\ &= \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) - \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\{A_0(x), \Pi^i(y)\}^*|_{x^0=y^0} = \{A_0(x), \Pi^i(y)\} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} & - \int d^2z d^2w \{A_0(x), \Psi^l(z)\} C_{lk}(z, w) \{\Psi^k(w), \Pi^i(y)\} \\ & = - \int d^2z d^2w \{A_0(x), \phi^0(z)\} C_{0B}(z, w) \{\chi^B(w), \Pi^i(y)\} \\ & - \int d^2z d^2w \{A_0(x), \phi^0(z)\} C_{0k}(z, w) \{\phi^k(w), \Pi^i(y)\} \\ & = -\frac{1}{2m} \epsilon^{ij} \partial_j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \{A_i(x), \Pi^i(y)\}^*|_{x^0=y^0} & = \{A_i(x), \Pi^j(y)\} - \int d^2z d^2w \{A_i(x), \Psi^l(z)\} C_{lk}(z, w) \{\Psi^k(w), \Pi^j(y)\} \\ & = \frac{1}{2} \delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \{\Pi^0(x), \Pi^0(y)\}^*|_{x^0=y^0} & = \{\Pi^0(x), \Pi^0(y)\} - \int d^2z d^2w \{\Pi^0(x), \Psi^l(z)\} C_{lk}(z, w) \{\Psi^k(w), \Pi^0(y)\} \\ & = - \int d^2z d^2w \{\Pi^0(x), \chi^B(z)\} C_{BB}(z, w) \{\chi^B(w), \Pi^0(y)\} \\ & = 0, \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \{\Pi^0(x), \Pi^i(y)\}^*|_{x^0=y^0} & = \{\Pi^0(x), \Pi^i(y)\} - \int d^2z d^2w \{\Pi^0(x), \Psi^l(z)\} C_{lk}(z, w) \{\Psi^k(w), \Pi^i(y)\} \\ & = \int d^2z d^2w \{\Pi^0(x), \chi^B(z)\} C_{BB}(z, w) \{\chi^B(w), \Pi^i(y)\} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \{\Pi^i(x), \Pi^j(y)\}^*|_{x^0=y^0} & = \{\Pi^i(x), \Pi^j(y)\} - \int d^2z d^2w \{\Pi^i(x), \Psi^l(z)\} C_{lk}(z, w) \{\Psi^k(w), \Pi^j(y)\} \\ & = -\frac{m}{4} \epsilon^{ij} \delta^2(\vec{w} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (2.72)$$

Comprobamos que los corchetes de las variables canónicas con los vínculos dan cero, como es de esperar.

$$\begin{aligned} \{A_i(x), \phi^j(y)\}^* & = \{A_i(x), \Pi^j(y)\}^* + \frac{m}{2} \epsilon^{jk} \{A_i(x), A_k(y)\}^*, \\ & = \frac{1}{2} \delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{1}{2} \delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ & = 0, \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \{\Pi^i(x), \phi^j(y)\}^* & = \{\Pi^i(x), \Pi^j(y)\}^* + \frac{m}{2} \epsilon^{jk} \{\Pi^i(x), A_k(y)\}^* \\ & = -\frac{m}{4} \epsilon^{ij} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) + \frac{m}{4} \epsilon^{ij} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ & = 0. \end{aligned} \quad (2.74)$$

De las ecuaciones podemos verificar que el corchete de Dirac de las variables canónicas  $A_\mu$  y  $\Pi^\mu$  con los vínculos  $\phi^m$  son cero y pueden sustituirse en todas partes.

Los resultados obtenidos son consistentes con los vínculos de la teoría. En efecto

$$\{F(x), \Psi_A(y)\}|_{x^\nu=y^\nu} = 0$$

para cualquier función de las variables del espacio de fases. Podemos entonces sustituir los vínculos sin ningún problema de consistencia.

El siguiente paso es encontrar la acción y Hamiltoniana extendidas, las cuales dan la evolución dinámica del sistema. La acción extendida es por definición,

$$S_E = \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{A}_\mu \Pi^\mu - \mathcal{H}_E)$$

donde  $\mathcal{H}_E$  es el Hamiltoniano extendido el cual contiene todos los vínculos, primarios y secundarios, de primera clase y de segunda clase. El Hamiltoniano extendido viene dado por

$$H_E = \int d^2x (H_C + \lambda_m \phi^m + \rho \chi).$$

Se tiene

$$\begin{aligned} S_E = \int d^3x & [\dot{A}_0 \Pi^0 + \dot{A}_i \Pi^i - \left( mA_0 \epsilon^{ij} \partial_i A_j - \frac{m^2}{2} (A_0 A_0 - A_i A_i) \right) - \lambda \Pi^0 \\ & - \lambda_i \left( \Pi^i + \frac{m}{2} \epsilon^{ij} A_j \right) - \rho (mA_0 - \epsilon^{ij} \partial_i A_j)]. \end{aligned}$$

Realizamos una variación sobre la acción anterior y la igualamos a cero

$$\begin{aligned} \delta S_E = \int_{t_1}^{t_2} dt & [\Pi^0 \delta \dot{A}_0 + \dot{A}_0 \delta \Pi^0 + \Pi^i \delta \dot{A}_i + \dot{A}_i \delta \Pi^i - \left( m \delta (A_0 \epsilon^{ij} \partial_i A_j) - \frac{m^2}{2} \delta (A_0 A_0 - A_i A_i) \right) \\ & - \lambda \delta \Pi^0 - \Pi^0 \delta \lambda - \left( \Pi^i + \frac{m}{2} \epsilon^{ij} A_j \right) \delta \lambda_i - \lambda_i \delta \left( \Pi^i + \frac{m}{2} \epsilon^{ij} A_j \right) \\ & - (mA_0 - \epsilon^{ij} \partial_i A_j) \delta \rho - \rho \delta (mA_0 - \epsilon^{ij} \partial_i A_j)] = 0, \end{aligned}$$

desarrollando las variaciones, agrupando términos semejantes y haciendo cero en la frontera los términos de divergencia, encontramos las siguientes ecuaciones de movimiento,

$$\frac{\delta S_E}{\delta A_0} : -\dot{\Pi}^0 - m \epsilon^{ij} \partial_i A_j + m^2 A_0 - m \rho = 0, \quad (2.75)$$

$$\frac{\delta S_E}{\delta \Pi^0} : \dot{A}_0 - \lambda = 0, \quad (2.76)$$

$$\frac{\delta S_E}{\delta A_i} : -\dot{\Pi}^i - m \epsilon^{ij} \partial_j A_0 - m^2 A_i + \frac{m}{2} \epsilon^{ij} \lambda_j + \epsilon^{ij} \partial_j \rho = 0, \quad (2.77)$$

$$\frac{\delta S_E}{\delta \Pi^i} : \dot{A}_i - \lambda_i = 0, \quad (2.78)$$

$$\frac{\delta S_E}{\delta \lambda} : \Pi^0 = 0, \quad (2.79)$$

$$\frac{\delta S_E}{\delta \lambda_i} : \Pi^i + \frac{m}{2} \epsilon^{ij} A_j = 0, \quad (2.80)$$

$$\frac{\delta S_E}{\delta \rho} : \epsilon^{ij} \partial_i A_j - mA_0 = 0. \quad (2.81)$$

A partir de estas relaciones podemos despejar las momentas y sustituir los vínculos obteniendo ( $\Pi^0 = 0$ ,  $\Pi^i = -\frac{m}{2}\epsilon^{ij}A_j$ ). Por tanto

$$\begin{aligned} S_E &= \int d^3x \left[ -\frac{m}{2}\epsilon^{ij}\dot{A}_i A_j - mA_0\epsilon^{ij}\partial_i A_j + \frac{m}{2}(A_0A_0 - A_iA_i) \right] \\ &= \int d^3x \left[ -\frac{m}{2}(\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda + mA_\mu A^\mu) \right], \end{aligned}$$

que corresponde a la acción original.



# Capítulo 3

## Teorías tipo Chern-Simons

### 3.1. Introducción

En el capítulo anterior trabajamos con el formalismo Lagrangiano y Hamiltoniano para el estudio dinámico de sistemas con finitos e infinitos grados de libertad y pudimos describir los sistemas regulares y singulares empleando los corchetes de Poisson y los de Dirac. En ambos casos obtuvimos las ecuaciones de movimiento y las resolvimos tanto para el oscilador armónico como para la acción autodual.

En el siguiente capítulo fundamentalmente estudiaremos los modelos tipo Chern-Simons por medio de un modelo mecánico cuántico análogo a esa teoría. Para lograr esto utilizaremos el Lagrangiano no relativista de una partícula cargada que se mueve en presencia de un campo de fuerza externo con la adición de un término potencial.

En este orden de ideas, el modelo descrito con anterioridad se estudiará para los valores límite de la masa de la partícula los cuales son  $m \neq 0$  y para  $m = 0$  [12, 13, 14]. El resultado obtenido en ambos casos se comparará con el obtenido en el modelo de la teoría topológica masiva, el cual incluye el término de Chern-Simons. Aplicaremos los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano para ambos casos. Reconoceremos en ambos modelos cuando el sistema es regular o singular y emplearemos la teoría de los corchetes expuestas en el capítulo para describir la dinámica del sistema.

### 3.2. Teorías tipo Chern-Simons. Modelo $m \neq 0$

A continuación los modelos estudiados se describen por el Lagrangiano no relativista de una partícula de carga  $q$  de masa  $m$  en presencia de un campo de fuerza (magnético  $B$ ), cuyas ecuaciones de movimiento corresponderán a las de la fuerza de Lorentz. En este caso

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{e}{c} \dot{q} \cdot A(q) - eV(q). \quad (3.1)$$

---

Con la finalidad de simplificar el análisis del problema tenemos que el movimiento de la partícula es en dos dimensiones  $i = 1, 2$ , y simétrico bajo rotaciones. Luego abordaremos los casos más sencillos que corresponderán al problema en dos dimensiones con un potencial de la forma  $A^i(q) = \epsilon^{ij} q^j A(q)$  y  $V(\vec{q}) = V(q)$ . Para simplificar más consideraremos un campo magnético constante,  $A^i(q) = -\frac{B}{2} < 0$  y un potencial cuadrático  $V(q) = \frac{k}{2} q^2 > 0$ .

El Lagrangiano será

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^i \dot{q}^i + \frac{e}{2c} \epsilon^{ij} q^i \dot{q}^j - \frac{k}{2} q^i q^i, \quad (3.2)$$

tomando  $e = c = \hbar = 1$  reescribimos la ecuación anterior como

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{q}}^2 + \frac{B}{2} \vec{q} \times \dot{\vec{q}} - \frac{k}{2} \vec{q}^2. \quad (3.3)$$

Este Lagrangiano puede compararse con el caso de la teoría topológica masiva. En este caso la densidad Lagrangiana es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\mu}{2} A_\mu \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda \\ &= -F_{0i} F_{0i} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \mu \epsilon^{0ij} A_0 \partial_i A_j - \frac{\mu}{2} \epsilon^{ij} A_i \dot{A}_j + \text{terminos de borde}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dicha densidad cambia como una divergencia si hacemos la transformación de calibre  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ . En este paso ponemos escoger el calibre  $A_0 = 0$ , quedando.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \dot{A}_i \dot{A}_i - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{\mu}{2} \epsilon^{ij} \dot{A}_i A_j + t.b. \\ &= \frac{1}{2} \dot{A}_i \dot{A}_i - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i A_j \epsilon_{kl} \partial_k A_l + \frac{\mu}{2} \epsilon^{ij} \dot{A}_i A_j \\ &\equiv \frac{1}{2} \dot{\vec{A}}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 - \frac{\mu}{2} (\dot{\vec{A}} \times \vec{A}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde hemos introducido la notación  $\vec{A} \times \vec{B} \equiv \epsilon^{ij} A^i B^j$ . Notemos que el término cinético y el potencial (3.3) son análogos a los del término de Maxwell y la parte con la velocidad es análogo al término de Chern-Simons. Ahora bien, si reescalamos en  $A \rightarrow \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} A$  y hacemos  $\mu \rightarrow \infty$ , el término de Maxwell desaparece y sobrevive el de teoría reducida de Chern-Simons.

Retomamos nuevamente el Lagrangiano proporcionado por la ecuación (3.2). El primer paso sería verificar si el sistema descrito es regular o no. Para esto aplicamos  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \neq 0$ . Es fácil comprobar que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = \delta_{ij} m \neq 0,$$

el sistema es regular.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q^i} &= \frac{B}{2} \epsilon^{ij} \dot{q}^j - k q^i \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} &= m \dot{q}^i - \frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^j. \end{aligned}$$

A continuación las ecuaciones de Euler-Lagrange quedan escritas

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = -m\ddot{q}^i + B\epsilon^{ij}\dot{q}^j - kq^i = 0.$$

De este modo tenemos

$$\ddot{q}^i = \frac{B}{m}\epsilon^{ij}\dot{q}^j - \frac{k}{m}q^i \quad (3.6)$$

Por otra parte si hacemos uso del formalismo Hamiltoniano el momento conjugado es.

$$p_i = m\dot{q}^i - \frac{B}{2}\epsilon^{ij}q^j.$$

En efecto el sistema es regular. De esta manera despejamos todas las velocidades

$$\dot{q}^i = \frac{1}{m} \left( \dot{p}^i + \frac{B}{2}\epsilon^{ij}q^j \right),$$

y el Hamiltoniano será

$$\begin{aligned} H &= (p^i \dot{q}^i - L)|_{p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}} \\ &= \frac{p^i}{m} \left( p^i + \frac{B}{2}\epsilon^{ij}q^j \right) - \frac{1}{2m} \left( p^i + \frac{B}{2}\epsilon^{ij}q^j \right) \left( p^i + \frac{B}{2}\epsilon^{ik}q^k \right) \\ &\quad - \frac{B}{2m}\epsilon^{ij}q^i \left( p^j + \frac{B}{2}\epsilon^{jk}q^k \right) + \frac{k}{2}q^i q^i \\ &= \frac{1}{2m} \left( p^i + \frac{B}{2}\epsilon^{ij}q^j \right) \left( p^i + \frac{B}{2}\epsilon^{ik}q^k \right) + \frac{k}{2}q^i q^i. \end{aligned} \quad (3.7)$$

En este sentido los corchetes de Poisson fundamentales son:

$$\{q^i, q^j\} = 0, \{p^i, p^j\} = 0, \{q^i, p^j\} = \delta^{ij}.$$

Así que las ecuaciones de movimiento conforme a la teoría se escriben como

$$\begin{aligned} \dot{p}^i &= \{p^i, H\} \\ &= \frac{B}{2m}\epsilon^{ij} \left( p^j + \frac{B}{2}\epsilon^{jk}q^k \right) - kq^i \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \{q^i, H\} \\ &= \frac{1}{m} \left( p^i + \frac{B}{2}\epsilon^{ij}q^j \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

De (3.8) y (3.9)

$$\begin{aligned} \ddot{q}^i &= \frac{1}{m} \left( \dot{p}^i + \frac{B}{2}\epsilon^{ij}\dot{q}^j \right) \\ &= \frac{1}{m} \left( \frac{B}{2m}\epsilon^{ij} \left( p^j + \frac{B}{2}\epsilon^{jk}q^k \right) - kq^i + \frac{B}{2}\epsilon^{ij}\dot{q}^j \right) \\ &= \frac{B}{m}\epsilon^{ij}\dot{q}^j - \frac{k}{m}q^i. \end{aligned} \quad (3.10)$$

En consecuencia si  $\mu \rightarrow \infty$  en (3.5) corresponderá a la teoría de Chern Simons pura que en el espacio reducido es  $\frac{\mu}{2}\dot{\vec{A}} \times \vec{A}$ . Conforme a los pasos desarrollados, resolvimos las ecuaciones de Euler-Lagrange. Por consiguiente definimos las variables  $z(t)$  y  $p(t)$  como las nuevas coordenadas generalizadas y momento generalizado

$$z(t) = q^1 + iq^2, \quad (3.11)$$

$$p(t) = p^1 + ip^2. \quad (3.12)$$

En concreto realizamos las derivadas respecto al tiempo

$$\dot{z}(t) = \dot{q}^1 + i\dot{q}^2, \quad (3.13)$$

$$\dot{p}(t) = \dot{p}^1 + i\dot{p}^2. \quad (3.14)$$

De (3.9)

$$\begin{aligned} \dot{q}^1 &= \frac{1}{m} \left( p^1 + \frac{B}{2} q^2 \right) \\ \dot{q}^2 &= \frac{1}{m} \left( p^2 - \frac{B}{2} q^1 \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como resultado de esto escribimos

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \frac{1}{m} \left( p^1 + \frac{B}{2} q^2 \right) + \frac{i}{m} \left( p^2 - \frac{B}{2} q^1 \right) \\ &= \frac{1}{m} p(t) - \frac{iB}{2m} z(t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

De donde se infiere que

$$\begin{aligned} \dot{p}^1 &= \frac{B}{2m} \left( p^2 - \frac{B}{2} q^1 \right) - kq^1, \\ \dot{p}^2 &= -\frac{B}{2m} \left( p^1 + \frac{B}{2} q^2 \right) - kq^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -\frac{B}{2m} \left( -p^2 + \frac{B}{2} q^1 \right) - kq^1 + i\frac{B}{2m} \left( p^1 - \frac{B}{2} q^2 \right) - ikq^2, \\ &= -\left( k + \frac{B^2}{4m} \right) z(t) - \frac{iB}{2m} p(t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

A continuación definimos

$$\omega(t) = \frac{1}{m^2} p(t),$$

por lo que  $z(t)$  y  $\omega(t)$  tienen las mismas unidades y reescribimos (3.16) y (3.18)

$$\dot{z}(t) = m\omega(t) - \frac{iB}{2m} z(t) \quad (3.19)$$

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{1}{m} \left( \frac{k}{m} + \frac{B^2}{4m^2} \right) z(t) - \frac{iB}{2m} \omega(t) \quad (3.20)$$

Sea  $Z$  la matriz con dependencia en  $z(t)$  y  $\omega(t)$

$$Z = \begin{pmatrix} z(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$$

Por consiguiente derivamos la matriz respecto del tiempo

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{pmatrix}$$

Luego  $\dot{Z}$

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} -\frac{iB}{2m} & m \\ -\frac{1}{m} \left( \frac{k}{m} + \frac{B^2}{4m^2} \right) & -\frac{iB}{2m} \end{pmatrix} Z$$

Teniendo en cuenta lo anterior definimos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{iB}{2m} & m \\ -\frac{1}{m} \left( \frac{k}{m} + \frac{B^2}{4m^2} \right) & -\frac{iB}{2m} \end{pmatrix}$$

Si

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

es un autovalor de  $A$  con autovalor  $\lambda$ , sucede que  $A^n \alpha = \lambda^n \alpha$  y

$$\begin{aligned} e^{At} \alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n \alpha \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda^n t^n \alpha \\ &= e^{\lambda t} \alpha. \end{aligned}$$

De esta manera debemos encontrar los autovalores de  $A$ . Para esto consideremos el determinante  $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{iB}{2m} - \lambda & m \\ -\frac{1}{m} \left( \frac{k}{m} + \frac{B^2}{4m^2} \right) & -\frac{iB}{2m} - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

o bien

$$\begin{aligned} \left( \frac{iB}{2m} + \lambda \right)^2 + \left( \frac{k}{m} + \frac{B^2}{4m^2} \right) &= 0, \\ \Rightarrow \frac{iB}{2m} + \lambda &= \pm i \sqrt{\left( \frac{k}{m} + \frac{B^2}{4m^2} \right)}. \end{aligned}$$

De donde

$$\lambda = -i \left( \frac{B}{2m} \mp \Omega \right) \quad (3.21)$$

con

$$\Omega = \sqrt{\left( \frac{k}{m} + \frac{B^2}{4m^2} \right)} \quad (3.22)$$

Si consideramos  $Z(t) = \alpha e^{\lambda t}$ , resulta que  $\dot{Z} = \lambda \alpha e^{\lambda t} = AZ$ . Así las soluciones son de la forma  $Z = \alpha e^{\lambda t}$  donde  $\alpha$  y  $\lambda$  son los autovectores correspondientes al autovalor  $\lambda$ .

$$Z = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Derivamos

$$\dot{Z} = \lambda e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= \lambda \alpha_1 e^{\lambda t} \\ &= \left( -\frac{iB}{2m} \alpha_1 + m \alpha_2 \right) e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(t) &= \lambda \alpha_2 e^{\lambda t} \\ &= \left( -\frac{\Omega}{m} \alpha_1 - \frac{iB}{2m} \alpha_2 \right) e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Tenemos entonces

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\frac{iB}{2m} - \lambda & m \\ -\frac{\Omega}{m} & -\frac{iB}{2m} - \lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollando la matriz anterior obtuvimos un sistema de ecuaciones para  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$

$$\begin{aligned} \left( -\frac{iB}{2m} + \frac{iB}{2m} \mp i\Omega \right) \alpha_1 + m \alpha_2 &= 0, \\ -\frac{\Omega}{m} \alpha_1 + \left( -\frac{iB}{2m} + \frac{iB}{2m} \mp i\Omega \right) \alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

En este caso obtenemos

$$\begin{aligned} \mp i\Omega \alpha_1^\pm + m \alpha_2^\pm &= 0, \\ -\frac{i\Omega^2}{m} \alpha_1^\pm \mp i\Omega \alpha_2^\pm &= 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Comprobamos

$$\alpha_2^\pm = \pm \frac{im}{\Omega} \alpha_1^\pm \quad (3.26)$$

Por tanto

$$\alpha^\pm = \alpha_1^\pm \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \frac{i\Omega}{m} \end{pmatrix}$$

Es de subrayar que el resultado obtenido permite escribir el valor de la constante de integración  $\alpha_1$  para la coordenada  $z(t)$

$$z = C^+ \alpha^+ e^{i\lambda^+ t} + C^- \alpha^- e^{-i\lambda^- t}$$

La solución para  $z(t)$  y  $\omega(t)$  es

$$z(t) = e^{-i\frac{B}{2m}t} (C^+ \alpha_1^+ e^{i\Omega t} + C^- \alpha_1^- e^{-i\Omega t}) \quad (3.27)$$

$$\omega(t) = e^{-i\frac{B}{2m}t} \left( \frac{i\Omega}{m} \right) (C^+ \alpha_1^+ e^{i\Omega t} - C^- \alpha_1^- e^{-i\Omega t}), \quad (3.28)$$

En efecto  $C^\pm \alpha^\pm = \eta^\pm$  por lo cual las ecuaciones (3.27) y (3.28) toman la forma

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-i\frac{B}{2m}t} (\eta^+ e^{i\Omega t} + \eta^- e^{-i\Omega t}), \\ \omega(t) &= e^{-i\frac{B}{2m}t} \left( \frac{i\Omega}{m} \right) (\eta^+ e^{i\Omega t} - \eta^- e^{-i\Omega t}). \end{aligned}$$

En particular para  $t = 0$

$$\begin{aligned} z(0) &= \eta^+ + \eta^-, \\ \omega(0) &= \frac{i\Omega}{m} (\eta^+ - \eta^-). \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} z(0) - \frac{im}{\Omega} \omega(0) &= 2\eta^+, \\ z(0) + \frac{im}{\Omega} \omega(0) &= -2\eta^-. \end{aligned} \quad (3.29)$$

De donde resulta

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-i\frac{Bt}{2m}} \left[ \frac{1}{2} \left( z(0) - \frac{p(0)}{m\Omega} \right) e^{i\Omega t} + \frac{1}{2} \left( z(0) + \frac{p(0)}{m\Omega} \right) e^{-i\Omega t} \right], \\ &= e^{-i\frac{Bt}{2m}} \left( z(0) \cos \Omega t + \frac{p(0)}{m\Omega} \sin \Omega t \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

De igual modo para  $p(t)$

$$\begin{aligned} p(t) &= im\Omega e^{-i\frac{Bt}{2m}} \left[ \frac{1}{2} \left( z(0) - \frac{ip(0)}{m\Omega} \right) e^{i\Omega t} - \frac{1}{2} \left( z(0) + \frac{ip(0)}{m\Omega} \right) e^{-i\Omega t} \right], \\ &= e^{-i\frac{Bt}{2m}} (p(0) \cos \Omega t - m\Omega z(0) \sin \Omega t). \end{aligned} \quad (3.31)$$

### 3.3. Teorías tipo Chern-Simons. Modelo $m \rightarrow 0$

A continuación trabajamos con el modelo correspondiente al límite  $m \rightarrow 0$ . Recordamos que en este modelo no es posible despejar todas las velocidades en función del momento, por tanto, estamos en la presencia de un sistema singular.

En este sentido partimos del Lagrangiano dado en (3.2) y evaluando condición descrita obtenemos

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{B}{2} \vec{q} \times \dot{\vec{q}} - \frac{1}{2} k \vec{q}^2 \\ &= -\frac{B}{2} \epsilon^{ij} \dot{q}^i q^j - \frac{k}{2} q^i q^i, \end{aligned} \quad (3.32)$$

Verificamos que es singular ya que  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = 0$ .

En este momento usamos la expresión para el momento canónico

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = -\frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^j, \quad (3.33)$$

en efecto encontramos un vínculo primario

$$\phi^i = p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^j. \quad (3.34)$$

Seguidamente el Hamiltoniano canónico se escribe como

$$\begin{aligned} H_0 &= \left( p^i \dot{q}^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ij} \dot{q}^i q^j + \frac{k}{2} q^i q^i \right) \Big|_{p^i = -\frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^j} \\ H_0 &= \frac{k}{2} q^i q^i. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Luego de incluir el vínculo primario se transforma en el Hamiltoniano

$$H = \frac{k}{2} q^i q^i + \lambda^i \phi_i, \quad (3.36)$$

el cual sirve para describir la evolución temporal de las variables del espacio de fases. En este sentido  $\dot{F} = \{F, H_E\}$  con  $F$  función arbitraria de las variables del espacio de fases.

Con referencia al álgebra de Poisson canónica entre las  $q^i$  y  $p_i$  tenemos

$$\{q^i, p_j\} = \delta_j^i, \quad \{q^i, q^j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0$$

Puesto que debemos exigir que los vínculos se conserven, será útil calcular

$$\begin{aligned} \{\phi^i, \phi^j\} &= \left\{ p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{il} q^l, p^j + \frac{B}{2} \epsilon^{jk} q^k \right\} \\ &= \epsilon^{ij} B \end{aligned} \quad (3.37)$$

A todo esto

$$\begin{aligned}\dot{\phi}^i &= \{\phi^i, H\} \\ 0 &= -kq^i + \lambda^k \epsilon^{ik} B,\end{aligned}$$

de donde

$$\lambda_i = -\frac{k}{B} \epsilon_{ij} q_j, \quad (3.38)$$

Pues bien la relación anterior permite encontrar el multiplicador de Lagrange asociado al vínculo primario. En vista que no aparecen nuevos vínculos el proceso termina acá.

Además la ecuación (3.37) indica que los vínculos obtenidos son de segunda clase y usamos los corchetes de Dirac. Empecemos por considerar la matriz  $C^{ij} \equiv \{\phi^i, \phi^j\}$ . En este caso la matriz inversa es  $C_{ik} = \epsilon_{ik} C$ , con  $C$  a conseguir. Desarrollamos la expresión siguiente

$$\begin{aligned}C_{ij} C^{jk} &= \delta_i^k, \\ &= \epsilon^{ij} \delta^k BC, \\ &= -\delta_i^k BC,\end{aligned}$$

de aquí

$$C = -\frac{1}{B}. \quad (3.39)$$

Significa que la matriz inversa es  $C_{ik} = -\frac{1}{B} \epsilon_{ik}$ . Calculamos los corchetes de Dirac:

$$\begin{aligned}\{q^i, q^j\}^* &= \{q^i, q^j\} - \{q^i, \phi_j\} C^{jl} \{\phi_l, q^j\}, \\ &= -\delta_j^i \left(-\frac{1}{B} \epsilon^{jl}\right) (\delta_l^j), \\ &= -\frac{1}{B} \epsilon^{ij},\end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}\{q^i, p_j\}^* &= \{q^i, p_j\} - \delta_k^i C^{kl} \{\phi_l, p_j\}, \\ &= \delta_j^i - \frac{1}{B} \epsilon^{il} \frac{B}{2} \epsilon^{lk} \delta_j^k, \\ &= \frac{1}{2} \delta_j^i\end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}\{p^i, p^j\}^* &= -\{p^i, \phi_k\} \left(-\frac{1}{B} \epsilon^{kl}\right) \{\phi_l, p^j\}, \\ &= -\epsilon^{km} \frac{B}{2} (-\delta_m^i) \left(-\frac{1}{B} \epsilon^{kl}\right) \frac{B}{2} \epsilon^{ln} \delta_n^j, \\ &= -\frac{B}{4} \epsilon^{ij}.\end{aligned} \quad (3.42)$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned}\{q^i, \phi_j\}^* &= \{q^i, p_j\}^* + \frac{B}{2}\{q^i, q^k\}^*, \\ &= 0.\end{aligned}\tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}\{p_i, \phi_j\}^* &= \{p^i, p^j\}^* + \frac{B}{2}\epsilon^{jk}\{p_i, q^k\}^*, \\ &= 0.\end{aligned}\tag{3.44}$$

Efectivamente se pueden sustituir antes o después de calcular los corchetes de Dirac.

En síntesis tenemos para la teoría reducida ( $m \rightarrow 0$ ) lo siguiente

$$\{q^i, q^j\}^* = -\frac{i}{B}\epsilon^{ij} \quad \{q^i, p_j\}^* = \frac{1}{2}\delta_j^i \quad \{p^i, p^j\}^* = -\frac{B}{4}\epsilon^{ij}$$

A su vez la evolución temporal de la variable  $q^i$  la obtenemos de los corchetes de Poisson

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &= \{q^i, H_C\} \\ &= -\frac{k}{B}\epsilon^{ij}q^j.\end{aligned}\tag{3.45}$$

Recordamos que definimos  $z(t)$  como

$$z(t) = q^1 + iq^2.$$

A continuación pasamos a resolver la expresión

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= -\frac{k}{B}(q^2 - iq^1), \\ &= i\frac{k}{B}(q^1 + iq^2), \\ &= i\frac{k}{B}z(t).\end{aligned}$$

En particular  $z(t)$  al integrar es

$$z(t) = z(0)e^{i\frac{k}{B}t}.\tag{3.46}$$

De igual manera para  $p(t)$  encontramos

$$\begin{aligned}p(t) &= p^1 + ip^2, \\ &= \frac{B}{2}(-q^2 + iq^1), \\ &= i\frac{B}{2}z(0)e^{i\frac{k}{B}t}, \\ &= p(0)e^{i\frac{k}{B}t}.\end{aligned}\tag{3.47}$$

Llegamos al punto en el que debemos verificar si es posible relacionar el modelo  $m \neq 0$  con el dado por  $m \rightarrow 0$ . En concreto haremos uso de (3.30) y (3.31)

$$\begin{aligned}z(t) &= e^{-i\frac{B}{2m}t} \left( z(0)\cos\Omega t + \frac{1}{m\Omega}p(0)\sen\Omega t \right), \\ p(t) &= e^{-i\frac{B}{2m}t} (p(0)\cos\Omega t - m\Omega z(0)\sen\Omega t)\end{aligned}$$

Así que para  $m = 0$  los vínculos obtenidos fueron

$$p^1 = -\frac{B}{2}q^2; \quad p^2 = \frac{B}{2}q^1. \quad (3.48)$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} \Omega &= \left( \frac{B^2}{4m^2} + \frac{k}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{B}{2m} \left( 1 + \frac{4mk}{B^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Para el límite  $m \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \Omega &\approx \frac{B}{2m} \left( 1 + \frac{2mk}{B^2} - \frac{m^2k^2}{2B^4} + \dots \right), \\ &\approx \frac{B}{2} + \frac{mk}{B} - \frac{m^2k^2}{2B^4} + \dots \end{aligned}$$

Tenemos que para  $m \rightarrow 0$ ,  $\Omega \approx \frac{B}{2m} + \frac{k}{B} - \frac{m^2k^2}{2B^4} + \dots$

Por otro lado debemos recordar que para  $m \rightarrow 0$  el valor de  $z(t)$  y  $p(t)$  son

$$\begin{aligned} z(t) &= z(0)e^{\frac{ikt}{B}}, \\ p(t) &= p(0)e^{\frac{ikt}{B}}. \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} m\Omega &\approx m \left( \frac{B}{2m} + \frac{k}{B} - \frac{m^2k^2}{2B^4} + \dots \right) \\ &\approx \frac{B}{2} + \frac{mk}{B} \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} \frac{1}{m\Omega} &\approx \frac{2}{B} \left( 1 + \frac{4mk}{B^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \\ &\approx \frac{2}{B} - \frac{4mk}{B^3}. \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \Omega &\approx \frac{B}{2} + \frac{k}{B} \\ m\Omega &\approx \frac{B}{2} \\ \frac{1}{m\Omega} &\approx \frac{2}{B} \end{aligned}$$

Así que para  $m \rightarrow 0$  tenemos que  $p(0) = \frac{iB}{2}z(0)$

Como resultado de esto escribimos (3.30) y (3.31) bajo el límite de masa nula.

$$\begin{aligned}
z(t) &\longrightarrow e^{-\frac{iBt}{2m}} \left( z(0) \left( \frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2} \right) + \frac{iB}{2} z(0) \frac{2}{B} \left( \frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i} \right) \right) \\
&= \frac{z(0)}{2} \left( e^{-\frac{iBt}{2m}} \left( \frac{e^{i(\frac{B}{2} + \frac{k}{B})t} + e^{-i(\frac{B}{2} + \frac{k}{B})t}}{2} \right) + e^{-\frac{iBt}{2m}} \left( \frac{e^{i(\frac{B}{2} + \frac{k}{B})t} - e^{-i(\frac{B}{2} + \frac{k}{B})t}}{2} \right) \right) \\
&= z(0) e^{i\frac{kt}{B}} \tag{3.49}
\end{aligned}$$

y para  $m \rightarrow 0$ , tenemos que  $z(0) = \frac{-2i}{B} p(0)$

$$\begin{aligned}
p(t) &= e^{-\frac{iBt}{2m}} \left( p(0) \left( \frac{e^{i(\frac{B}{2} + \frac{k}{B})t} + e^{-i(\frac{B}{2} + \frac{k}{B})t}}{2} \right) - \frac{B}{2} \left( \frac{-2ip(0)}{B} \right) \left( \frac{e^{i(\frac{B}{2} + \frac{k}{B})t} - e^{-i(\frac{B}{2} + \frac{k}{B})t}}{2} \right) \right) \\
&= p(0) e^{i\frac{kt}{B}} \tag{3.50}
\end{aligned}$$

De acuerdo con el límite  $m \rightarrow 0$ , encontramos así la conexión para ambos modelos. Esto quiere decir que las soluciones encontradas en (3.30) y (3.31) son también válidas para el otro modelo sólo en el límite de  $m = 0$ , (3.49) y (3.50).

# Capítulo 4

## Ecuación de Schrödinger en los modelos tipo Chern-Simons

### 4.1. Introducción

El propósito del capítulo es el estudio de la ecuación de onda para un sistema físico determinado por el Hamiltoniano de una partícula de masa  $m$  y potencial de la forma  $U(r)$  con la finalidad de encontrar la evolución dinámica del sistema a través del tiempo. En este sentido encontramos las autofunciones  $\Psi$  y los autovalores de la energía  $E$  correspondientes a los modelos  $m \neq 0$  y  $m = 0$ . En particular tenemos el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} \left( p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^j \right) \left( p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ik} q^k \right) + \frac{k}{2} q^i q^i.$$

De manera puntual y con fines prácticos, escribimos el Hamiltoniano en coordenadas polares y por medio de un cambio de variables en coordenadas polares separamos la solución en su parte radial y angular. Seguidamente evaluamos la parte radial para valores finitos e infinitos y encontramos la solución radial. De igual forma encontramos la solución para la parte angular. Finalmente construimos la autofunción  $\Psi$  empleando los Polinomios de Laguerre tanto para el modelo del sistema regular  $m \neq 0$  y el otro dado para  $m = 0$  correspondiente al sistema singular.

### 4.2. La Ecuación de Schrödinger. Modelo $m \neq 0$

El Teorema de Noether permite obtener de manera sistemática cantidades conservadas [4]. Siguiendo esta idea, consideramos transformaciones infinitesimales de coordenadas las cuales dejan inalteradas las ecuaciones de Euler-Lagrange.

En consecuencia el Lagrangiano invariante es

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow t + \Delta t, \\ q^i &\longrightarrow q^i + \Delta q^i. \end{aligned}$$

---

Además

$$\Delta q^i = \delta q^i + \dot{q}^i \Delta t.$$

Para rotaciones

$$\Delta t = 0; \quad \delta q^i = -\epsilon^{ij} q^j.$$

El teorema de Noether indica

$$G(t) = L\Delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i, \quad (4.1)$$

Recordemos que el Lagrangiano para el caso de  $m \neq 0$  es

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^i \dot{q}^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^i \dot{q}^j - \frac{k}{2} q^i q^i.$$

Debemos subrayar que las ecuaciones searán las mismas bajo transformaciones infinitesimales cuando para el Lagrangiano se verifique

$$\delta L = -m\epsilon^{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - k\epsilon^{ij} q^i q^j + \frac{B}{2} q^i \dot{q}^j + \frac{B}{2} q^i \dot{q}^j,$$

con lo que  $\delta L = 0$ . Así

$$G(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \epsilon^{ij} q^j = -\epsilon^{ij} p^i q^j = M$$

Consideramos ahora el paso a la cuantización

$$\{q^i, p^j\} = i[q^i, p^j]. \quad (4.2)$$

En este momento desarrollamos la ecuación anterior

$$\begin{aligned} q^i p^j - p^j q^i &= i\delta_j^i, \\ p^j q^i &= q^i p^j - i\delta^{ij}. \end{aligned}$$

Está claro que el momento angular  $M$  toma la forma

$$\begin{aligned} M &= -\epsilon^{ij} p^i q^j, \\ &= -\epsilon^{ij} (q^j p^i - i\delta^{ij}), \\ &= -\epsilon^{ij} q^j p^i = \epsilon^{ij} q^i p^j \end{aligned} \quad (4.3)$$

En este sentido con la ayuda de (4.2) postulamos las reglas de conmutación

$$[q^i, p^j] = i\delta^{ij}; \quad [q^i, q^j] = 0; \quad [p^i, p^j] = 0. \quad (4.4)$$

De igual modo buscamos los conmutadores del momento angular con las otras cantidades teniendo presente las reglas de conmutación

$$\begin{aligned}
\left[ M, p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^j \right] &= \left[ \epsilon^{kl} q^k p^l, p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^j \right], \\
&= \epsilon^{kl} \left[ q^k p^l, p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^j \right], \\
&= \epsilon^{kl} \left\{ [q^k, p^i] p^l + \frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^k [p^l, q^j] \right\}, \\
&= i \epsilon^{kl} \delta^{ki} p^l - i \frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^k \delta^{lj} \epsilon^{kl} \\
&= i \epsilon^{il} p^l - i \frac{B}{2} q^i. \\
\left[ M, \frac{k}{2} q^i q^i \right] &= \frac{k}{2} \epsilon^{kl} [q^k p^l, q^i q^i], \\
&= \frac{k}{2} \epsilon^{kl} q^k [p^l, q^i q^i], \\
&= \frac{k}{2} \{ q^i [p^l, q^i] + [p^l, q^i] q^i \}, \\
&= \frac{k}{2} (-2i \epsilon^{kl} q^k q^l) = 0.
\end{aligned}$$

Ahora bien el conmutador de  $M$  con  $H$  es

$$\begin{aligned}
[M, H] &= \frac{1}{2m} \left( p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^j \right) \left[ M, p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ik} q^k \right] + \frac{1}{2m} \left[ M, p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^j \right] \left( p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ik} q^k \right) \\
&\quad + \left[ M, \frac{k}{2} q^i q^i \right], \\
&= \frac{1}{2m} \left( p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^j \right) \left( i \epsilon^{il} p^l - i \frac{B}{2} q^i \right) + \frac{1}{2m} \left( i \epsilon^{il} p^l - i \frac{B}{2} q^i \right) \left( p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^j \right) + 0, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Después el Hamiltoniano se expresa

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2m} \left( p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ij} q^j \right) \left( p^i + \frac{B}{2} \epsilon^{ik} q^k \right) + \frac{k}{2} q^i q^i \\
&= \frac{1}{2m} p^i p^i + \frac{B}{4m} \epsilon^{ij} q^j p^i + \frac{B}{4m} \epsilon^{ik} p^i q^k + \frac{B^2}{8m} q^i q^i + \frac{k}{2} q^i q^i, \\
&= \frac{1}{2m} p^i p^i + \frac{B}{2m} M + \frac{m}{2} \left( \frac{B^2}{4m^2} + \frac{k}{m} \right) q^i q^i, \\
&= \frac{1}{2m} p^i p^i + \frac{B}{2m} M + \frac{m}{2} \Omega^2 q^i q^i.
\end{aligned}$$

$$\text{con } \Omega^2 = \left( \frac{B^2}{4m^2} + \frac{k}{m} \right).$$

De igual modo definimos

$$\begin{aligned} M|N, n \rangle &= n|N, n \rangle, \\ H|N, n \rangle &= E(N, n)|N, n \rangle. \end{aligned}$$

Ahora podemos decir que las coordenadas y momenta son operadores que obedecen ciertas reglas de conmutación.

$$p^i = -i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

Además tenemos

$$p^i p^i \implies -\Delta, \quad q^i q^i \implies |q|^2.$$

Con  $\Delta$  el laplaciano en ciertas coordenadas y  $q^i$  el término asociado a la velocidad al cuadrado, parte del potencial cuadrático. El siguiente punto es resolver el problema mecánico cuántico. La ecuación de Schrödinger en coordenadas polares es

$$\left( -\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{m\Omega^2}{2} r^2 \right) \Psi(r, \theta) = \left( E + \frac{B}{2m} n \right) \Psi(r, \theta) \quad (4.5)$$

Como  $V(\vec{r}) = \frac{m\Omega^2}{2} \vec{q}^2$  es par las soluciones tienen paridad definida. Buscamos soluciones de la forma  $\Psi(r, \theta) = e^{i\alpha\theta} R(r)$ . Ahora bien en la coordenada  $R$  se obtuvo lo siguiente

$$-\frac{1}{2m} R'' - \frac{1}{2mr} R' + \frac{\alpha^2}{2mr^2} R + \frac{m}{2} \Omega^2 r^2 R = \left( E + \frac{nB}{2m} \right) R,$$

o bien

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left( nB + 2mE - \frac{m^2 \alpha^2}{r^2} - \Omega^2 r^2 \right) R = 0$$

Introducimos la variable  $\omega = m\Omega r^2$  y entonces

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dr} &= \frac{d\omega}{\partial r} \frac{\partial R}{\partial \omega} = 2m\Omega r \frac{dR}{d\omega}, \\ \frac{d^2 R}{dr^2} &= 2m\Omega \frac{dR}{d\omega} + 4m\Omega r^2 \frac{d^2 R}{d\omega^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} &= 2m\Omega \frac{dR}{d\omega}, \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} 4m\Omega \omega \frac{d^2 R}{d\omega^2} + 4m\Omega \frac{dR}{d\omega} + \left( nB + 2mE - \frac{m\Omega \alpha^2}{\omega} - m\Omega \omega \right) R &= 0 \\ \omega \frac{d^2 R}{d\omega^2} + \frac{dR}{d\omega} + \left( \frac{nB + 2mE}{4m\Omega} - \frac{\alpha^2}{4\omega} - \frac{\omega}{4} \right) R &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

De esta manera estudiamos el comportamiento de la solución de la ecuación diferencial para valores de  $\omega$  pequeños y grandes. Evaluamos (4.6) en los límites  $\omega \rightarrow \infty$  y  $\omega \rightarrow 0$ .

Para el límite de  $\omega \rightarrow \infty$  suponemos

$$R = \omega^b e^{a\omega} \left(1 + \frac{c}{\omega} + \dots\right)$$

En este caso la paridad deberá aparecer en  $\omega^b$  ya que en  $e^{a\omega}$  y la serie son pares. Buscamos las derivadas respecto a  $\omega$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\omega} &= \omega^b e^{a\omega} \left(a + \frac{ac+b}{\omega} + \dots\right) \\ \frac{d^2R}{d\omega^2} &= \omega^b e^{a\omega} \left(a^2 + \frac{2ab+a^2c}{\omega} + \frac{2abc-ac-b}{\omega^2} + \dots\right). \end{aligned}$$

Agrupamos el lado izquierdo de la ecuación diferencial

$$\omega \frac{d^2R}{d\omega^2} + \frac{dR}{d\omega} = \omega^b e^{a\omega} \left(a^2\omega + (a + 2ab + a^2c) + \frac{2abc}{\omega} + \dots\right)$$

Para la parte derecha

$$\left(\Lambda - \frac{\alpha^2}{4\omega} - \frac{\omega}{4}\right) \omega^b e^{a\omega} \left(1 + \frac{c}{\omega} + \dots\right) = \omega^b e^{a\omega} \left(-\frac{\omega}{4} + \left(\Lambda - \frac{c}{4}\right) + \frac{c\Lambda - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{d}{4}}{\omega} + \dots\right),$$

con  $\Lambda = \left(\frac{nB+2mE}{4m\Omega}\right)$ . De aquí apreciamos:

$$\begin{aligned} \omega : & \quad a^2 - \frac{1}{4} = 0, \\ \omega^0 : & \quad a + 2ab + a^2b + \Lambda - \frac{c}{4} = 0, \\ \omega^{-1} : & \quad 2abc + c\Lambda - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{d}{4} = 0. \end{aligned}$$

Para  $\omega \rightarrow \infty$  por inspección

$$a^2 - \frac{1}{4} = 0 \implies a = \pm \frac{1}{2}.$$

También

$$\begin{aligned} a(1+2b) &= -\Lambda \\ 1+2b &= \mp 2\Lambda \\ \implies b &= -\frac{1}{2} \mp \frac{\Lambda}{2} \end{aligned}$$

Por tanto cuando  $\omega \rightarrow \infty$

$$R(\omega) = e^{a\omega} \omega^b \left(1 + \frac{c}{\omega} + \dots\right) \tag{4.7}$$

con:

$$a = \pm \frac{1}{2}; \quad b = -\frac{1}{2} \mp \frac{\Lambda}{2}$$

Para  $\omega \rightarrow 0$  ponemos  $R(\omega) = \omega^\sigma(1 + a\omega + \dots)$ . En este caso

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\omega} &= \sigma\omega^{\sigma-1}(1 + a\omega + \dots) + \omega^\sigma(a + \dots) \\ \frac{d^2R}{d\omega^2} &= \sigma(\sigma-1)\omega^{\sigma-2}(1 + a\omega + \dots) + 2\sigma\omega^{\sigma-1}(a + \dots) + \omega^\sigma(b + \dots) \end{aligned}$$

Luego:

$$\omega \frac{d^2R}{d\omega^2} + \frac{dR}{d\omega} = \sigma^2\omega^{\sigma-1}(1 + a\omega + \dots) + (2\sigma + 1)\omega^\sigma(a + \dots) + \omega^{\sigma+1}(b + \dots)$$

y además para el otro lado de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \left( \Lambda - \frac{\alpha^2}{4\omega} - \frac{\omega}{4} \right) \omega^\sigma(1 + a\omega + \dots) &= -\frac{\alpha^2}{4}\omega^{\sigma-1}(1 + a\omega + \dots) + \Lambda\omega^\sigma(1 + a\omega + \dots) \\ &\quad - \frac{1}{4}\omega^{\sigma+1}(1 + a\omega + \dots). \end{aligned}$$

Tomamos el coeficiente de  $\omega$  con menor orden

$$\sigma^2 - \frac{\alpha^2}{4} = 0, \quad \implies \sigma = \pm \frac{\alpha}{2},$$

esto conduce a

$$R(\omega) = \omega^{\frac{|\alpha|}{2}}(1 + D'\omega + \dots)$$

La solución es para

$$\begin{aligned} \omega \gg 1 &\implies R(\omega) = e^{-\frac{\omega}{2}}\omega^{\frac{\Lambda}{2}-\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{c}{\omega} + \dots \right), \\ \omega \ll 1 &\implies R(\omega) = \omega^{\frac{|\alpha|}{2}}(1 + D'\omega + \dots). \end{aligned}$$

La solución que obtuvimos

$$R(\omega) = e^{-\frac{\omega}{2}}\omega^{\frac{|\alpha|}{2}}Q(\omega), \quad (4.8)$$

Y la paridad de la misma aparece en  $\omega^{\frac{\alpha}{2}}$  pues  $e^{-\frac{\omega}{2}}$  y la serie son pares. Es fácil comprobar que además cumple con los argumentos hechos desde un principio

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0 &\implies Q(\omega) \text{ finita,} \\ \omega \rightarrow \infty &\implies Q(\omega) \approx \omega^{\frac{1}{2}(-1+\frac{1}{\Omega}(E+\frac{Bn}{2m}))}. \end{aligned}$$

Debemos buscar  $Q(\omega)$ . Admitamos la solución por medio de series

$$Q(\omega) = \sum_{l=0}^n a_l \omega^l \implies Q(\omega)' = \sum_{l=1}^n l a_l \omega^{l-1} \implies Q(\omega)'' = \sum_{l=2}^n l(l-1) a_l \omega^{l-2}.$$

dichas relaciones las sustituimos en la ecuación diferencial

$$\sum_{l=0}^{\infty} [l(l+1)a_{l+1} + (l+1)(1+|\alpha|)a_{l+1} - l a_l + \frac{1}{2\Omega} \left( E + \frac{Bn}{2m} - \Omega(1+|\alpha|) \right) a_l] \omega^l = 0$$

de esta manera apreciamos la regla de recurrencia

$$(l+1)(l+1+|\alpha|)a_{l+1} - \frac{1}{2\Omega} \left[ E + \frac{Bn}{2m} - \Omega(2l+|\alpha|+1) \right] a_l = 0.$$

A continuación tomamos el caso  $l = 0$

$$(1+|\alpha|)a_1 + \left[ \frac{1}{2\Omega} \left( E + \frac{Bn}{2m} \right) - \frac{1}{2}(|\alpha|+1) \right] a_0 = 0.$$

Lo cual significa

$$a_1 = - \frac{\left[ \frac{1}{2\Omega} \left( E + \frac{Bn}{2m} \right) - \frac{1}{2}(|\alpha|+1) \right]}{1+|\alpha|} a_0.$$

De igual manera tomamos  $l = 1$

$$2(2+|\alpha|)a_2 + \frac{1}{2\Omega} \left[ E + \frac{Bn}{2m} - \Omega(2+|\alpha|+1) \right] a_1 = 0,$$

obtenemos

$$a_2 = \left[ \frac{\frac{1}{2\Omega}[-\lambda_n + \Omega(2+|\alpha|+1)]}{2(2+|\alpha|)} \frac{[-\frac{1}{2\Omega}\lambda_n + \frac{1}{2}(|\alpha|+1)]}{1+|\alpha|} \right] a_0,$$

donde  $\lambda_n = (E + \frac{Bn}{2m})$ .

En definitiva

$$a_l = \frac{[l-1 + \frac{1+|\alpha|}{2} - \frac{\lambda_n}{2\Omega}][l-2 + \frac{1+|\alpha|}{2} - \frac{\lambda_n}{2\Omega}] \dots [\frac{1+|\alpha|}{2} - \frac{\lambda_n}{2\Omega}]}{l!((l-1)+1+|\alpha|)((l-2)+1+|\alpha|) \dots (1+|\alpha|)} a_0.$$

Consideremos la función hipergeométrica confluyente  $M(a, b, z)$  [15, 16] con la forma

$$M(a, b, z) = 1 + \frac{az}{b} + \frac{(a)_2 z^2}{2!(b)_2} + \frac{(a)_3 z^3}{3!(b)_3} + \dots \frac{(a)_l z^l}{l!(b)_l}.$$

$M(a, b, z)$  representa una solución independiente de la ecuación

$$z \frac{d^2 M}{dz^2} + (b-z) \frac{dM}{dz} - aM = 0, \quad (4.9)$$

la cual tiene una singularidad regular en  $z = 0$  y otra irregular en  $z \rightarrow \infty$ . Además

$$(a)_l = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1), \quad (a)_0 = 1.$$

Señalamos que el valor de  $a_l$  es

$$a_l = \frac{\left[\frac{1+|\alpha|}{2} - \frac{\lambda_n}{2\Omega}\right]_l}{(1+|\alpha|)_l l!} a_0.$$

La solución radial  $Q(\omega)$  queda

$$Q(\omega) = a_0 M\left(\frac{1+|\alpha|}{2}, 1+|\alpha|, \omega\right).$$

De igual manera una solución complementaria para (4.9) la representa la ecuación de Kummer [15, 16]

$$U(a, b, c) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi b)} \left[ \frac{M(a, b, z)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)} - z^{1-b} \frac{M(1+a-b, 2-b, z)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right].$$

Sustituyendo las expresiones para  $a, b$  y  $z$  provenientes de la ecuación diferencial (4.9) (ver apéndice D), parte de la solución obtenida es:

$$U\left(\frac{1+|\alpha|}{2}, 1+|\alpha|, \omega\right) = \frac{\pi}{\text{sen}(1+|\alpha|)\pi} \left[ \frac{M\left(\frac{1+|\alpha|}{2}, 1+|\alpha|, \omega\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{|\alpha|}{2}\right)\Gamma(1+|\alpha|)} \right] - \frac{\pi}{\text{sen}(1+|\alpha|)\pi} \left[ \omega^{-|\alpha|} \frac{M\left(1 - \frac{|\alpha|}{2}, 1-|\alpha|, \omega\right)}{\Gamma\left(\frac{1+|\alpha|}{2}\right)\Gamma(1-|\alpha|)} \right] \quad (4.10)$$

La solución para la ecuación de Schrödinger en coordenadas polares depende de los valores de  $(a, b, c)$ .

Lo anterior lo podemos pareciar en el siguiente cuadro

$M(a, b, c)$	Parámetros $m, n$ enteros y positivos	
Serie convergente para todo $a, b$ y $c$	$a \neq -m$	$b \neq -n$
Polinomio de grado $m$ en $z$	$a = -m$	$b \neq -n$
Polo simple en $b = -n$	$a \neq -m$	$b = -n$
	$a = -m$	$b = -n$
	$m > n$	
Indefinida	$a = -m$	$b = -n$
	$m \leq n$	

Cuadro 4.1: Parámetros  $m$  y  $n$  de la ecuación de Kummer

Para el caso de

$$\begin{aligned} \frac{1+|\alpha|}{2} - \frac{\lambda_n}{2\Omega} &= -m, \\ \frac{1+|\alpha|}{2} + m &= \frac{\lambda_n}{2\Omega}. \end{aligned}$$

con  $m = 0, 1, 2, \dots$ . La serie se corta luego de  $a_m$ . Si además

$$1 + |\alpha| \geq 0. \quad (n \neq -m),$$

la serie es infinita. Sin embargo, la misma converge sí

$$\frac{a_l \omega^l}{a_{l-1} \omega^{l-1}} = \omega \left( \frac{1}{l} - \frac{\Omega(1+|\alpha|) + \lambda_n}{l} \right).$$

Luego

$$\frac{a_l \omega^l}{a_{l-1} \omega^{l-1}} = \frac{\omega}{l} \left( 1 - \left( \frac{\Omega(1+|\alpha|) + \lambda_n}{2\Omega} \right) \right) \text{ que } \rightarrow 0 \text{ cuando } l \rightarrow \infty.$$

Sin embargo la condición asintótica cuando  $\omega \rightarrow \infty$  no se satisface. Aquí

$$E(N, n) + \frac{Bn}{2m} = \Omega(2N + |\alpha| + 1) \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Así

$$E(N, n) = \Omega(2N + |\alpha| + 1) - \frac{Bn}{2m} \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

La solución la conectamos con los polinomios asociados de Laguerre [15, 16]

$$M(-N, \alpha + 1, x) = \frac{N!}{(\alpha + 1)_N} L_N^\alpha(x).$$

Reescribimos  $Q(\omega)$  en función de los polinomios de Laguerre

$$Q(\omega) = a_0 M(-N, \alpha + 1, x) = a_0 \frac{N!}{(\alpha + 1)_N} L_N^\alpha(x).$$

pero tenemos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(1+|\alpha|)_N}{N!}, \\ &= \frac{(1+|\alpha|)(1+|\alpha|+1)\dots(1+|\alpha|+N-1)}{N!}, \end{aligned}$$

recordamos las propiedades de la función  $\Gamma$

$$\begin{aligned} N! &= \Gamma(N + 1), \\ \Gamma(z + 1) &= z\Gamma(z) = z(z - 1)\Gamma(z - 1), \\ (s + 1)(s + 2)\dots(s + p) &= \frac{\Gamma(s + p + 1)}{\Gamma(s + 1)}, \end{aligned}$$

escribimos nuevamente  $a_0$

$$a_0 = \frac{\Gamma(1+|\alpha| + N)}{\Gamma(1+|\alpha|)\Gamma(N + 1)}.$$

Escribimos  $Q(\omega)$  de la siguiente forma

$$Q(\omega) = L_N^{|\alpha|}(\omega).$$

Tenemos que la solución es

$$\Psi(\omega, \theta) = Ae^{\pm i\alpha\theta} e^{-\frac{\omega}{2}} \omega^{-\frac{|\alpha|}{2}} L_N^{|\alpha|}(\omega),$$

con  $L_N^{|\alpha|}$  solución de la ecuación diferencial

$$\omega L_N^{(|\alpha|)''}(\omega) + (|\alpha| + 1 - \omega) L_N^{(|\alpha|)' }(\omega) + N L_N^{|\alpha|}(\omega) = 0, \quad (4.12)$$

recordemos que

$$\alpha = n; \quad l = N.$$

La solución completa para la ecuación de Schrödinger en términos de los polinomios asociados de Laguerre (Apéndice D) es

$$\langle q|N, n\rangle = \sqrt{\frac{N!}{\pi(N+|n|)!}} (m\Omega)^{\frac{1+|n|}{2}} r^{|n|} e^{in\theta} e^{-\frac{m\Omega r^2}{2}} L_N^n\left(\frac{m\Omega r^2}{2}\right). \quad (4.13)$$

### 4.3. Solución de la Ecuación de Schrödinger. Modelo $m \rightarrow 0$

El panorama general hasta este momento es el siguiente hemos encontrado la autofunción (4.13) y los niveles de energía asociados a la ecuación de Schrödinger para el modelo  $m \neq 0$ . Los compararemos con el proveniente del límite  $m \rightarrow 0$ .

Siguiendo la idea anterior debemos encontrar la relación

$$\begin{aligned} m\Omega &= m \left( \frac{B}{2m} + \frac{k}{B} \right) \\ &= \frac{B}{2} + \frac{km}{B}. \end{aligned}$$

En este caso, sustituyendo en (4.13) la autofunción para el límite  $m \rightarrow 0$  se reduce a

$$\langle q|N, n\rangle = \sqrt{\frac{N!}{\pi(N+|n|)!}} \left(\frac{B}{2}\right)^{\frac{1+|n|}{2}} r^{|n|} e^{in\theta} e^{-\frac{Br^2}{4}} L_N^n\left(\frac{Br^2}{4}\right),$$

si empleamos los polinomios de Hermite (Apéndice C) la solución es

$$u_n(x) = \left( \sqrt{\frac{K}{\pi B}} \frac{1}{2^n n!} \right)^{\frac{1}{2}} H_n \left( \sqrt{\frac{k}{B}} x \right) e^{-\frac{k}{2B} x^2}, \quad (4.14)$$

la cual podemos comparar con la obtenida por medio de los polinomios de Laguerre. Ahora bien los niveles de energía para el modelo vienen dados por la ecuación (4.11)

$$E(N, n) = \frac{B}{2m} (2N + |n| - n + 1) + \frac{k}{B} (2N + |n| + 1)$$

La solución diverge cuando  $m \rightarrow 0$ . Los niveles de energía son finitos sólo para  $N = 0$  y  $n > 0$

$$\begin{aligned} E(0, n) &= \frac{B}{2m} (2(0) + n - n + 1) + \frac{k}{B} (2(0) + n + 1), \\ &= \frac{B}{2m} + \frac{k}{B} (n + 1). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Para el límite  $m \rightarrow 0$  todos los estados con  $N > 0$ , así como aquellos con  $N = 0$  y  $n < 0$  están separados por un espacio infinito y desacoplados de los provenientes de  $N = 0$ ,  $n \geq 0$ . Estos estados sobrevivientes son aquellos cuyo momento angular se encuentra alineado con el campo magnético externo, y están en correspondencia con cada uno de los estados de la teoría reducida. Ellos llevan niveles de energía finitos, proporcionados por una resta que se realiza sobre el Hamiltoniano. La parte infinita es, evidentemente,  $\frac{B}{2m}$ ; mientras que la parte finita es  $\frac{k}{2B}$  en la parte reducida el valor correspondiente a los niveles de energía viene dada por

$$E_0(n) = \frac{k}{B} \left( n + \frac{1}{2} \right); \quad n = 0, 1, \dots, etc. \quad (4.16)$$

En cuanto al espectro del momento angular apreciamos una similar discrepancia en cuanto a la presencia de números semienteros. Para la teoría completa  $m \neq 0$  el espectro del momento angular comprende todos los números enteros positivos y en el caso de la teoría reducida  $m = 0$  sólo admite número semi-enteros positivos en su espectro. Esta es una diferencia muy importante en la acción de simetría de rotación para ambos modelos.

La solución en el límite  $m \rightarrow 0$  con  $N = 0$  y  $n \geq 0$

$$\langle q | 0, n \rangle_{m \rightarrow 0} = \left( \frac{B}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{B}{2} \right)^{\frac{|n|}{2}} \frac{r^{|n|}}{\sqrt{n!}} e^{i|n|\theta} e^{-\frac{Br^2}{4}}.$$



# Capítulo 5

## Conclusiones

En esta investigación usamos como referencia el modelo de la teoría topológica masiva [11, 12] y se extendió su estudio al comportamiento de las teorías tipo Chern-Simons empleando un modelo mecánico cuántico análogo a éste, al cual aplicamos por separado los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano.

Enfatizamos la importancia del estudio del formalismo Lagrangiano y del formalismo Hamiltoniano en diferentes teorías y su aplicación en algunas de las ramas de la física a través de ejemplos referidos a la mecánica clásica (oscilador armónico), teoría de campos (acción autodual) y teorías más complejas (topológica masiva con Chern-Simons).

En cuanto al estudio del modelo de la teoría topológica masiva nos fijamos en el problema del Lagrangiano de Lorentz para una partícula de carga  $q$  y de masa  $m$  bajo la acción de un campo magnético externo y con un potencial escalar de forma cuadrática. Obtuvimos a partir de la acción del sistema, el Lagrangiano para el caso  $m \neq 0$  y seguidamente pudimos despejar las velocidades en función del momento y de las coordenadas. Aplicamos los corchetes de Poisson y encontramos las ecuaciones de movimiento del sistema, las cuales pudimos resolver a continuación, por tanto este sistema es regular. Luego de esto aplicamos el formalismo Hamiltoniano a este mismo caso, aquí construimos el Hamiltoniano y trabajando nuevamente los corchetes de Poisson pudimos encontrar las ecuaciones de movimiento y las resolvimos. Acto seguido comparamos los resultados obtenidos entre ambos formalismos desarrollados, esto quiere decir, que por medio de los corchetes de Poisson pudimos pasar del formalismo Lagrangiano al Hamiltoniano sin perder información del estado del sistema durante el proceso.

Sin embargo, una situación diferente fue para el modelo  $m = 0$ . Obtuvimos un sistema singular, ya que no pudimos despejar todas las velocidades del sistema como función del momento generalizado. Aquí definimos el álgebra de los vínculos, los cuales en un principio eran primarios. A partir de éstos, se construyó la matriz  $C_{AB}$  teniendo como base vínculos de segunda clase. Luego de esto se empleó el formalismo de Dirac para encontrar

---

los vínculos y las ecuaciones de dinámicas de Euler-Lagrange aplicando el formalismo Hamiltoniano. Al final pudimos comprobar que las ecuaciones obtenidas empleando el formalismo Lagrangiano y el formalismo Hamiltoniano son equivalentes ya que usamos como herramienta el álgebra de los corchetes de Dirac. En ambas situaciones encontramos las ecuaciones de movimiento y vinculamos los resultados con la teoría desarrollada. Luego de esto, comparamos la solución de la posición y del momento correspondientes para ambos modelos y pudimos verificar que en el límite de  $m = 0$  ambas soluciones coinciden, lo cual no siempre ocurre.

Finalmente una vez planteada la ecuación de Schrödinger procedimos a resolverla por medio de una serie de cambios. La solución que obtuvimos permitió encontrar los niveles de energía del sistema y la solución general del sistema para el caso  $m \neq 0$ . Verificamos que las soluciones de la ecuación de Schrödinger en ambos casos son iguales solamente en el límite de  $m = 0$ .

---

# Apéndice A

## Transformada de Legendre

### A.1. Introducción

En este apéndice reproducimos lo presentado en el libro de Métodos Matemáticos para la Mecánica Clásica de Arnold [17] citado en los apuntes del Curso de Introducción a la Teoría Clásica de Campos [6].

### A.2. Generalidades. Una variable

Consideremos una curva  $y = f(x)$  con la condición que  $y'' > 0$ . En cada punto de la curva se puede asignar la Transformada de Legendre de  $f$  como

$$L(f) \equiv g(p), \quad (\text{A.1})$$

la cual representa una función  $g$  de la variable nueva  $p$ , esta se construye como se muestra en la figura (A.1). Partiendo del gráfico de  $f(x)$ , consideramos la recta  $y = px$  y sea  $x = x(p)$  el punto de la curva más alejado a la recta. Entonces

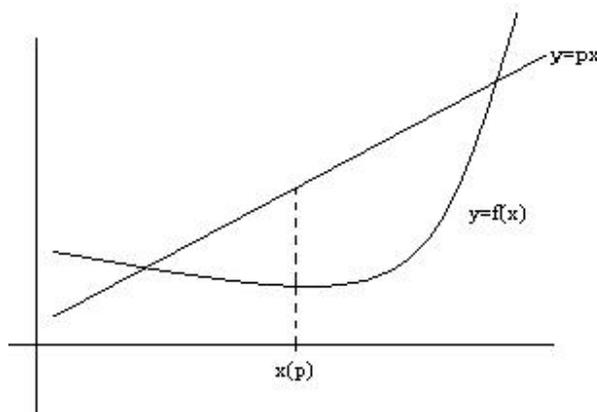


Figura A.1: Transformada de Legendre, tomada del libro de Arnold

---

$$g(p) = F(p, x(p)), \quad (\text{A.2})$$

con

$$F(p, x) \equiv xp - f(x) \quad (\text{A.3})$$

El punto  $x(p)$  se define por la condición  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  i.e.  $p = f'(x)$ . Cuando  $f$  es convexa este punto es único.

La transformada de Legendre de  $f(x)$  es por tanto una función de  $p$ , y no de  $x$ . Esta transformada es útil cuando se desea a partir de una función dada, otra cuya variable independiente sea la derivada de la primera.

### A.2.1. Transformada de Legendre para funciones con una variable

Presentamos una serie de funciones con una variable y buscaremos la Transformada de Legendre asociada a la nueva función  $g$ .

1. Tomemos la función:  $y(x) = f(x) = mx^2$ , con  $m$  una constante positiva. Entonces

$$\begin{aligned} y(x) &= mx^2 \\ \implies f'(x) &= 2xm \\ \implies f''(x) &= 2m > 0. \end{aligned}$$

Empleamos la relación (A.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}[px - mx^2] \\ 0 &= p - 2mx \\ \implies x(p) &= \frac{p}{2m}. \end{aligned}$$

La transformada correspondiente de esta función es

$$\begin{aligned} g(p) &= F(p, x(p)) \\ &= x(p)p - f(p) \\ &= \frac{p^2}{2m} \end{aligned}$$

2.  $f(x) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha$ . Tenemos

$$\begin{aligned} F(x, p) &= xp - f(x) \\ &= xp - \frac{1}{\alpha}x^\alpha \\ \implies x(p) &= p^{\frac{1}{\alpha-1}}, \end{aligned}$$

la Transformada de Legendre asociada a esta función es

$$\begin{aligned} g(p) &= F(x(p), p) \\ &= x(p)p - f(p) \\ pp^{\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha}p^{\frac{1}{\alpha-1}} &= p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

utilizamos la siguiente relación

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= 1 \quad \text{con } \alpha > 0 \text{ y } \beta > 0 \\ \frac{1}{\beta} &= 1 - \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha - 1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Obtenemos

$$g(p) = \frac{1}{\beta}p^\beta$$

### A.3. Transformada de Legendre para funciones con varias variables

Sea  $f(\vec{x})$  una función variable vectorial convexa de  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Esto significa que la forma cuadrática  $\langle \frac{-\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2} d\vec{x}, d\vec{x} \rangle$  es definida positiva. Llamamos  $F(\vec{p}, \vec{x}) = \langle \vec{p}, \vec{x} \rangle - f(\vec{x})$

$$\begin{aligned} Lf(\vec{x}) &\equiv g(\vec{p}) \\ &= \max F(\vec{p}, \vec{x}), \end{aligned} \tag{A.4}$$

esta condición implica que  $\vec{p} = \frac{\partial F}{\partial \vec{x}}$ .

Podemos hacer también una Transformación de Legendre respecto a un conjunto de variables: sea  $f = f(\vec{x}, \vec{w}, t)$  la transformada de Legendre respecto a las  $\vec{x}$  es

$$Lf = g(\vec{p}, \vec{w}, t) \equiv \langle \vec{p}, \vec{x}(p) \rangle - f(\vec{p}, \vec{w}, t) \tag{A.5}$$

con  $\vec{x}(p)$  obtenida a partir de:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \vec{p} \tag{A.6}$$

Considerando la variación de  $g$  respecto a la nueva variable activa  $\vec{p}$

$$\begin{aligned} \delta g &= \left\langle \frac{\partial g}{\partial \vec{p}}, \delta \vec{p} \right\rangle \\ &= \langle \vec{x}, \delta \vec{p} \rangle + \langle \delta \vec{x}, \vec{p} \rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}, \delta \vec{x} \right\rangle \\ &= \langle \vec{x}, \delta \vec{p} \rangle + \left\langle \vec{p} - \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}, \delta \vec{x} \right\rangle \end{aligned}$$


---

y usando (A.6) se obtiene

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{p}} = \vec{x} \quad (\text{A.7})$$

esta ecuación es similar a (A.6) y afirma que si se realiza una Transformación de Legendre respecto a  $p$  reobtenemos  $f$ . A las variables respecto a las cuales se hace la transformación se les llama variables activas y a las otras se les llama pasivas. En este caso las  $\vec{x}$ ...

Miremos ahora que  $H(p_i, \dot{q}^i, t)$  es la transformada de Legendre de  $L(\dot{q}^i, q^i, t)$ . La comparación es trivial,  $f$  es  $L$  y se toma como variables activas a  $\dot{q}^i$ .

La función

$$F(p_i, \dot{q}^i, q^i, t) \equiv p_i \dot{q}^i - L(\dot{q}^i, q^i, t),$$

es maximizada cuando

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (\text{A.8})$$

Así

$$H(p_i, \dot{q}^i, t) = [\dot{q}^i p_i - L(\dot{q}^i, q^i, t)]|_{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}},$$

de donde:

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

# Apéndice B

## Sistemas de Coordenadas y Separación de variables

### B.1. Introducción

Es sabido que la **Helmholtz Homogénea** (o de Laplace) se puede separar en once sistemas de coordenadas ortogonales [15, 18]. Aquí nos ocuparemos solamente del sistema de coordenadas polares.

### B.2. Sistema de Coordenadas Polares

Para describir un vector con precisión se deben conocer longitudes, direcciones, ángulos, proyecciones o componentes específicas. Usamos normalmente para esto un Sistema de Coordenadas Ortogonales. Ahora bien, un Sistema de Coordenadas (S.C.) se define como aquella función que asigna unívocamente en cada punto de una región del espacio una terna de números reales. A este número de coordenadas reales se les llama coordenadas del punto. En este caso no se trabajará con una terna de números reales, sino con dos, descritos por las variables  $(\rho, \phi)$ .

La situación general en dos dimensiones se indica en la figura B.1. Estamos interesados en la conducta funcional de los campos, cerca del origen y en puntos alejados en tanto sea esto posible.

La geometría sugiere el emplear un sistema de coordenadas diferente al cartesiano, que describa el movimiento angular y radial (polar). La ecuación de Laplace en dos dimensiones utilizando coordenadas polares  $(\rho, \phi)$  toma la forma [19]:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (\text{B.1})$$

---

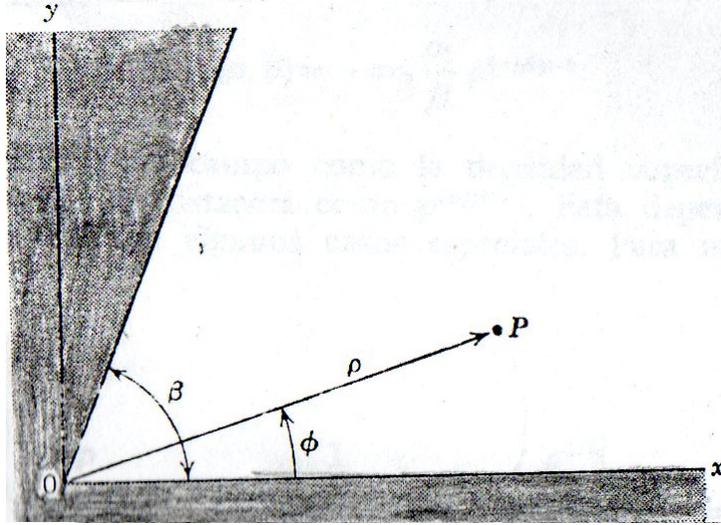


Figura B.1: Sistema de Coordenadas Polares, tomado del libro Electrodinámica de Jackson

Para usar el método de separación de variables, sustituimos:

$$\begin{aligned}\Psi(\rho, \phi) &= R(\rho)\Psi(\phi) \\ &= R\Psi,\end{aligned}$$

en la ecuación anterior y después de multiplicar este resultado por  $\frac{\rho^2}{\Phi}$ , obtenemos :

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Como uno de los términos depende de  $\rho$  y el otro de  $\phi$  por separado, entonces cada uno de ellos debe ser una constante:

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) &= \nu^2 \\ \frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} &= -\nu^2.\end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Las soluciones de estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned}R(\rho) &= a\rho^\nu + b\rho^{-\nu} \\ \Psi(\phi) &= A\cos(\nu\phi) + B\sin(\nu\phi)\end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

### B.2.1. Ejemplo de aplicación. Hamiltoniano en coordenadas polares

El Hamiltoniano de un sistema bajo la acción de la Fuerza de Lorentz fue estudiado en el capítulo 4 y se escribe como

$$H(p_i, q^i) = \frac{1}{2m} p_i p_i - \frac{B}{2m} M + \left( \frac{B^2}{8m} + \frac{k}{2} \right) q^i q^i \quad (\text{B.5})$$

Retomando las definiciones

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= \frac{B^2}{4m^2} + \frac{k}{m} \\ E(N, n) | N, n \rangle &= H | N, n \rangle \\ E(N, n) + \frac{B}{2m}n &= \Omega(2N + |n| + 1) \\ q &= \rho\end{aligned}$$

El Hamiltoniano toma la siguiente forma

$$\Omega(2N + |n| + 1)\Psi = \left( \frac{1}{2m}\nabla + \frac{m}{2}\Omega^2 q^i q^i \right) \Psi$$

Donde el operador  $\nabla$  está escrito en coordenadas polares

$$\nabla = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Proponemos una solución para este problema de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\begin{aligned}\Psi(\rho, \phi) &= R(\rho)M(\phi) \\ &\equiv RM\end{aligned}\tag{B.6}$$

La ecuación toma la forma

$$\frac{M}{2m\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{R}{2m\rho^2} \frac{\partial^2 M}{\partial \phi^2} + \frac{m}{2}\Omega^2 \rho^2 RM = \Omega RM\tag{B.7}$$

Dividimos después la ecuación entre  $\Psi \equiv RM$  y agrupamos los términos

$$2m\rho^2 \left[ \frac{1}{2Rm} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{2mR\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{m}{2} (\Omega\rho^2 - 1) \Omega \right] = -\frac{1}{M} \frac{\partial^2 M}{\partial \phi^2} = \lambda\tag{B.8}$$

La solución de la parte angular tiene es

$$M(\phi) = Ae^{i\lambda\phi}.\tag{B.9}$$

Para la parte radial

$$\frac{1}{R(\rho)} \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{R(\rho)\rho} \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} - 2m\Omega \left( 1 - \frac{m}{2}\Omega\rho^2 \right) = \frac{\lambda^2}{\rho^2}$$

En este caso

$$\frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + \left[ -2m\Omega \left( 1 - \frac{m}{2}\Omega\rho^2 \right) - \frac{\lambda^2}{\rho^2} \right] R(\rho) = 0$$

Proponemos otro cambio para la parte radial

$$\rho' = m\Omega\rho^2; \quad R = R(\rho)$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial \rho} &= \frac{\partial R}{\partial \rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial \rho} \\
&= 2m\Omega\rho \frac{\partial R}{\partial \rho'} = 2 \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho'} \\
\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho'} \right) \\
&= 2m\rho\Omega \left[ \frac{2}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho'} + 2 \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho'^2} - 2 \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho'} \frac{\partial R}{\partial \rho'} \right]
\end{aligned}$$

Las expresiones anteriores se sustituyen:

$$\begin{aligned}
\rho' \frac{\partial^2 R}{\partial \rho'^2} + \left[ 1 - \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho'} \right] \frac{\partial R}{\partial \rho'} + \frac{\rho'}{2m\rho^2\Omega} \frac{\partial R}{\partial \rho'} + \frac{m\Omega}{4m\Omega} \left[ \rho' - 2 - \frac{\lambda}{\rho'} \right] R &= 0 \\
\rho' \frac{\partial^2 R}{\partial \rho'^2} + \left[ 1 - \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho'} + \frac{1}{2} \right] \frac{\partial R}{\partial \rho'} + \frac{1}{4} \left[ \rho' - 2 - \frac{\lambda}{\rho'} \right] R &= 0
\end{aligned}$$

Pero:

$$\frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho'} = \frac{m\Omega\rho^2}{\rho} \frac{1}{2m\Omega\rho} = \frac{1}{2}$$

Por tanto

$$\rho' \frac{\partial^2 R}{\partial \rho'^2} + \frac{\partial R}{\partial \rho'} + \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\rho' - \frac{1}{4} \frac{\lambda}{\rho'} \right] R = 0 \quad (\text{B.10})$$

Pero evaluando la ecuación anterior en los límites  $\rho \rightarrow 0$  y después en  $\rho \rightarrow \infty$

Para  $\rho \rightarrow 0$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho'^2} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial R}{\partial \rho'} - \frac{1}{4} \frac{\nu^2}{\rho'^2} R = 0 \quad (\text{B.11})$$

Cuya solución es:

$$R(\rho') = \rho'^{\frac{\nu}{2}} \quad (\text{B.12})$$

Para  $\rho \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho'^2} - \frac{1}{4} R = 0 \quad (\text{B.13})$$

De donde se obtiene que:

$$R(\rho') = e^{\frac{\rho'}{2}} \quad (\text{B.14})$$

La solución de la parte radial de este problema es:

$$R_n(\rho) = A(m\Omega\rho^2)^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{m\Omega\rho^2}{2}} L_N^n(m\Omega\rho^2) \quad (\text{B.15})$$

$L_N^n(m\Omega\rho^2)$  el polinomio de Laguerre asociado y  $\rho' = m\Omega\rho^2$

# Apéndice C

## Oscilador Armónico en Mecánica Cuántica

### C.1. Solución del problema mecánico-cuántico

Partimos del Hamiltoniano en 1+1

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}X^2. \quad (\text{C.1})$$

Postulamos la relaciones

$$[X, P] = i\hbar, \quad [X, X] = 0, \quad [P, P] = 0 \quad (\text{C.2})$$

Como  $H$  es una cantidad conservada que no depende del tiempo, es fácil comprobar que es la energía del sistema.

$$\begin{aligned} H|\varphi\rangle &= E|\varphi\rangle \\ \left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}X^2\right)\varphi &= E\varphi. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Donde  $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}X^2$ . La ecuación (C.3) es la de Schrödinger. En este caso los autovalores son mayores al mínimo de  $V(x)$ . Tenemos los observables adimensionados

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X, \quad \hat{P} = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}P, \quad \hat{H} = \frac{1}{\hbar\omega}H$$

Se puede comprobar

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i$$

El Hamiltoniano queda como sigue

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2) \quad (\text{C.4})$$

---

Postulamos los conmutadores de creación ( $a$ ) y aniquilación ( $a^+$ ) como sigue

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}) \quad (\text{C.5})$$

En este caso tenemos lo siguiente:

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ + a), \quad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ - a) \quad (\text{C.6})$$

El Hamiltoniano toma la forma

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right), \\ &= N + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Con  $N = a^+ a$  y el conmutador  $[a, a^+] = 1$  Usamos el método polinomial. Si cambiamos

$$\hat{X} = \beta X; \quad \hat{P} = \frac{1}{\beta \hbar} P, \quad (\text{C.8})$$

donde  $\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ .

Ahora bien  $\hat{X}|\zeta_{\hat{X}}\rangle = \hat{X}|\zeta_{\hat{X}}\rangle$ . Con

$$\langle \zeta_{\hat{X}'}, \zeta_{\hat{X}} \rangle = \delta(\hat{X} - \hat{X}') \quad (\text{C.9})$$

En este caso tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\hat{X} |\zeta_{\hat{X}}\rangle \langle \zeta_{\hat{X}}| = 1$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} X|\zeta_{\hat{X}}\rangle &= \frac{1}{\beta} \hat{X}|\zeta_X\rangle \\ &= \frac{\hat{X}}{\beta} |\zeta_{\hat{X}}\rangle \end{aligned}$$

Donde  $|\zeta_{\hat{X}}\rangle$  es el autoestado de  $X$  con autovalor  $\frac{\hat{X}}{\beta}$

Así si  $\hat{X} = \beta X$  con  $|X\rangle$  y  $|\zeta_{\hat{X}}\rangle$  proporcionales

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dX |X\rangle \langle X| &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{X}}{\beta} |X = \frac{\hat{X}}{\beta}\rangle \langle X = \frac{\hat{X}}{\beta}| &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto  $|X \rangle = |\frac{\hat{X}}{\beta} \rangle = \sqrt{\beta}|\varphi \rangle$  Si

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\hat{X}) &= \langle \zeta_{\hat{X}} | \varphi \rangle, \\ &= \frac{1}{\beta} \langle X = \frac{\hat{X}}{\beta} | \varphi \rangle. \\ &= \frac{1}{\beta} \varphi \left( X = \frac{\hat{X}}{\beta} \right)\end{aligned}\tag{C.10}$$

Continuamos otra vez con la ecuación de Schrödinger unidimensional

$$\frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{d\hat{X}^2} + \hat{X}^2 \right) \hat{\varphi} = \epsilon \hat{\varphi}$$

De aquí obtenemos

$$\left( \frac{d^2}{d\hat{X}^2} - (\hat{X}^2 - 2\epsilon) \right) \hat{\varphi} = 0\tag{C.11}$$

La solución propuesta para esta ecuación diferencial es  $G(\hat{X}) = e^{\pm \frac{\hat{X}^2}{2}}$  que satisface

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\hat{X}^2} G(\hat{X}) &= \frac{d}{d\hat{X}} (e^{\pm \frac{\hat{X}^2}{2}} \hat{X}) \\ &= e^{\pm \frac{\hat{X}^2}{2}} \hat{X}^2 \pm e^{\pm \frac{\hat{X}^2}{2}} \\ &= (\hat{X}^2 + 1) e^{\pm \frac{\hat{X}^2}{2}}.\end{aligned}\tag{C.12}$$

Así  $\left( \frac{d^2}{d\hat{X}^2} - (\hat{X}^2 + 1) \right) G_{\pm} = 0$ . Si evaluamos la solución obtenida para el límite  $\hat{X}^2 \rightarrow \infty$ , obtenemos  $X^2 + 1 \sim \hat{X}^2 \sim X^2 - 2\epsilon$ .

En este caso G es acotada. Tomamos lo siguiente

$$\hat{\varphi}(\hat{X}) = e^{-\frac{\hat{X}^2}{2}} h(\hat{X})\tag{C.13}$$

Como  $e^{-\frac{\hat{X}^2}{2}}$  es par y  $\varphi h(\hat{X})$  deben tener paridad definida. Esto significa que  $h(\hat{X})$  se tomará como sigue

$$h(\hat{X}) = \hat{X}^p (a_0 + a_2 \hat{X}^2 + \dots a_{2m} \hat{X}^{2m} + \dots)\tag{C.14}$$

con  $a_0 \neq 0$ . Finalmente la paridad de  $h(\hat{X})$  la tiene  $\hat{X}^p$



# Apéndice D

## Ecuación Hipergeométrica Confluente

### D.1. Introducción

Consideramos la ecuación diferencial homogénea de segundo orden ordinaria

$$u''(z) + P(z)u'(z) + Q(z)u(z) = 0, \quad (\text{D.1})$$

el estudio de ella es de gran importancia en física como el electromagnetismo, mecánica cuántica, mecánica clásica, termodinámica, entre otras. Sus soluciones son tan importantes que algunas de ellas se les llama **funciones especiales**. Para la resolución de esta ecuación tenemos presente lo siguiente:

- Si las funciones  $P(z)$  y  $Q(z)$  permanecen finitas (analíticas) en  $z = a$ , entonces este punto es un **punto ordinario** de la ecuación diferencial.
- Cuando  $P(z)$  y  $Q(z)$  divergen (no analíticas) a medida que  $z \rightarrow a$ , entonces este punto es un **punto singular** de la ecuación diferencial. En este caso se divide en dos clases de puntos; **singular regular o no esencial**, cuando  $P(z)$  y  $Q(z)$  divergen a medida que  $z \rightarrow a$ , pero  $(z - a)P(z)$  y  $(z - a)^2Q(z)$  permanecen finitas en  $z = a$  y **singular irregular o esencial** en caso contrario.

### D.2. Hipergeométrica Confluente

Estudiamos ahora la ecuación diferencial ordinaria en el punto  $z_0 = 0$  [15, 20]

$$z\psi''(z) + (c - z)\psi'(z) - a\psi(z) = 0, \quad (\text{D.2})$$

la cual aparece en muchos casos importantes en física. Tiene un punto **singular regular** en  $z = 0$  y otro **singular irregular** en  $z = \infty$ . Sus raíces son 0 y  $(1 - c)$ .

---

Buscamos una solución de la forma (caso  $c \neq 0$ )

$$\psi(z) = (z - z_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (\text{D.3})$$

Ahora bien si  $r = 0$  y  $z_0 = 0$ , la ecuación (C.2), reducimos la cantidad términos y obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1+c)c_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)c_n z^n = 0, \quad (\text{D.4})$$

la cual mediante un cambio de variables, podemos reescribirla así

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+c)c_{n+1} - (n+a)c_n] z^n = 0, \quad (\text{D.5})$$

obtenemos la relación de recurrencia:

$$c_{n+1} = \frac{(n+a)}{(n+1)(n+c)} c_n; \quad c \neq 0, -1, -2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{D.6})$$

Escojamos  $c_0 = 1$ , y llamamos a la solución  $M(a, c, z)$ , la cual también se le conoce como:  $F(a, c, z)$ ,  $F(a | c | z)$ ,  $\phi(a, c, z)$ ,  ${}_1F_1(a, c, z)$ ; la misma es:

$$M(a, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}; \quad (\text{D.7})$$

con  $|z| < \infty$   $c \neq 0, -1, -2, \dots$ . La solución  $M(a, c, z)$  se le denomina función **Hipergeométrica confluente**. Dicha función es analítica en todo el plano complejo finito ya que si  $a = 0, -1, -2, \dots$ ,  $M(a, c, z)$  es un polinomio.

En el caso en que  $a \neq 0, -1, -2, \dots$ , entonces  $|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ ,  $\forall z$  y por tanto converge en todo el plano complejo finito.

Para el otro caso,  $(1-c)$  no sea un entero, la solución buscada será de la forma  $z^{1-c}g_1(z)$ , lo cual sustituimos en la expresión (C.1)

$$z g_1''(z) + [(2-c) - z] g_1'(z) - (a-c+1) g_1(z) = 0, \quad (\text{D.8})$$

que tiene como solución  $M(a-c+1, 2-c, z)$ . Finalmente la solución de (F.1) es

$$\psi(z) = c_1 M(a, c, z) + c_2 z^{1-c} M(a-c+1, 2-c, z) \quad (\text{D.9})$$

Podemos también encontrar la solución de la ecuación diferencial (C.1) por el método de transformadas integrales. En este caso intentaremos la solución con el núcleo de Laplace. Esto es, buscar una solución de la forma:

$$\varphi(z) = \int_{t_1}^{t_2} e^{zt} v(t) dt, \quad (\text{D.10})$$

donde debemos determinar  $v(t)$  y el camino de extremos  $t_1$  y  $t_2$ .

Definimos el **operador diferencial formal**  $\mathcal{L}$  o  $\mathcal{L}_z$  como:

$$\mathcal{L}_z \equiv p_0(z) \frac{d^2}{dz^2} + p_1(z) \frac{d}{dz} + p_2(z), \quad (\text{D.11})$$

donde  $p_0, p_1, p_2$  representan funciones dependientes de  $z$ . Además definimos el **operador adjunto formal de  $\mathcal{L}_z$  estrella** asociado a  $\mathcal{L}_z$ ; denotado por  $\mathcal{L}_z^*$  como:

$$\mathcal{L}_z^* \psi(z) = \frac{d^2}{dz^2} [p_0(z) \psi(z)] - \frac{d}{dz} [p_1(z) \psi(z)] + [p_2(z) \psi(z)], \quad (\text{D.12})$$

Empleando (C.10) a partir de (C.1), obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_z e^{zt} &= [zt^2 + (c - z)t - a] e^{zt} \\ &= \left[ (t^2 - t) \frac{\partial}{\partial t} + ct - a \right] e^{zt}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Resulta

$$\mathcal{M}_t = (t^2 - t) \frac{d}{dt} + (ct - a), \quad (\text{D.14})$$

donde  $\mathcal{M}_t$  es un operador de la forma  $\mathcal{M}_t = \alpha(t) \frac{d^2}{dt^2} + \beta(t) \frac{d}{dt} + \gamma(t)$ . El operador adjunto asociado es

$$\mathcal{M}_t^* v(t) = -\frac{d}{dt} [(t^2 - t)v(t)] + [ct - a]v(t) = 0, \quad (\text{D.15})$$

tomamos  $g(t) \equiv (t^2 - t)v(t)$  la ecuación anterior toma la forma

$$\frac{d}{dt} g(t) = \frac{ct - a}{t^2 - t} g(t), \quad (\text{D.16})$$

integrando resulta en

$$\begin{aligned} \text{Ln} \left( \frac{g(t)}{A} \right) &= \text{Ln}(t - 1)^c + \text{Ln}(t)^a + \text{Ln}(t - 1)^{-a} \\ g(t) &= At^a (t - 1)^{c-a} \end{aligned}$$

obtenemos

$$v(t) = At^{a-1} (1 - t)^{c-a-1}, \quad (\text{D.17})$$

$A \in \mathbb{C}$  es una constante arbitraria. Si  $Rc > Ra > 0$ , entonces la función se anulara en  $t_1 = 0$  y  $t_2 = 1$ . Si Escogemos el camino que se extienda desde  $t_1 = 0$  y  $t_2 = 1$  a lo largo del eje real positivo, tendremos que la solución de la Hipergeométrica confluente vendrá dada por:

$$\varphi(z) = A \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1 - t)^{c-a-1} dt, \quad (\text{D.18})$$

la cual es uniformemente convergente  $z \in C$  [15].

Ahora lo que toca es relacionar (C.17) con (C.6). Para eso debemos recordar que  $e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!}$ , tendremos:

$$\varphi(z) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!} \int_{t_1}^{t_2} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt, \quad (\text{D.19})$$

Multiplicando el numerador y el denominador convenientemente y teniendo presente las propiedades de la función beta:

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (t-1)^{b-1} dt$$

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

junto con

$$\Gamma(n+1) = n!$$

La ecuación (C.18) toma la forma

$$\varphi(z) = \left[ A \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(a)}{\Gamma(c)} \right] \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(n+1)} z^n, \quad (\text{D.20})$$

tendremos que  $\varphi(z) = M(a, c, z)$ . Entonces:

$$M(a, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} \Gamma(a) \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt, \quad (\text{D.21})$$

donde  $A = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)}$ .

Ahora si escogemos el camino desde  $t_1 = -\infty$  y hasta  $t_2 = 0$ , obtendríamos otra solución para la ecuación de la Hipergeométrica confluente:

$$\varphi(z) = A \int_{-\infty}^0 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt, \quad (\text{D.22})$$

si se hace el cambio  $t \rightarrow -t$  en (C.21) y escogemos  $A = \frac{-\Gamma(1-a+1)}{\Gamma(a)}$  obtenemos otra solución de la forma:

$$U(a, c, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt \quad Ra > 0, Rz > 0, c \in C \quad (\text{D.23})$$

El estudio de esta ecuación comienza así. Realizamos el cambio  $1-t = u$  en (C.17) y obtenemos

$$\int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt = e^z \int_0^1 e^{-zu} u^{c-a-1} (1-u)^{a-1} du, \quad (\text{D.24})$$

de donde se sigue que  $M(a, c, z) = e^z M(c-a, c, -z)$ , válida para  $Rc > Ra > 0$ . Sin embargo, por continuación analítica, es una relación válida  $\forall a$  y  $\forall c$  con  $c \neq 0, -1, -2, \dots, etc.$  Por medio de esto, se ha obtenido la llamada **transformación de Kummer** [15, 16]

### D.2.1. Ejemplo de Aplicación

Consideramos el potencial de un oscilador armónico en tres dimensiones, esto es:

$$U(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2; \quad \omega \in R_+. \quad (\text{D.25})$$

Definimos las relaciones

$$\begin{aligned} \alpha^2 &\equiv \frac{m\omega}{\hbar} \\ \lambda &\equiv \frac{2E}{\hbar\omega} \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

La ecuación radial de la Ec. de Schrödinger la escribimos

$$\frac{d^2 R_l(r)}{dr^2} + \frac{dR_l(r)}{dr} + \left[ \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l(r) = 0; \quad \hbar, m \in R_+, \quad (\text{D.27})$$

efectuamos el cambio

$$R_l(r) \equiv \frac{u_l(r)}{r}, \quad (\text{D.28})$$

la cualmos transforma en la ecuación radial reducida

$$\frac{d^2 u_l(r)}{dr^2} + \left[ \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = 0. \quad (\text{D.29})$$

Empleamos las relaciones (C.9) y (C.10) en la ecuación anterior obtenemos:

$$u_l''(r) + \left[ \lambda\alpha^2 - \alpha^4 r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = 0. \quad (\text{D.30})$$

Para la ecuación anterior proponemos el cambio

$$u_l(r) = r^{l+1} e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}} y_l(r), \quad (\text{D.31})$$

y obtenemos:

$$y_l''(r) + 2 \left[ \frac{l+1}{r} - \alpha^2 r \right] y_l'(r) + \left[ \lambda\alpha^2 - 2\alpha^2 \left( l + \frac{3}{2} \right) \right] y_l(r) = 0. \quad (\text{D.32})$$

Finalmente efectuamos los siguientes cambios

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \alpha^2 r^2 \\ w_l(\rho) &\equiv y_l(r), \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

obtendremos la EDO:

$$\rho w_l''(\rho) + \left[ \left( l + \frac{3}{2} \right) - \rho \right] w_l'(\rho) - \left[ \frac{1}{2} \left( l + \frac{3}{2} \right) - \frac{\lambda}{4} \right] w_l(\rho) = 0. \quad (\text{D.34})$$

La solución para la ecuación (C.18) con  $l$  número natural, pero no así  $(l + \frac{3}{2})$  es usando (C.8)

$$w_l(\rho) = c'_1 M\left(\frac{1}{2}\left(l + \frac{3}{2}\right) - \frac{\lambda}{4}, l + \frac{3}{2}, \rho\right) + c'_2 \rho^{-l-\frac{1}{2}} M\left(\frac{1}{2}\left(-l + \frac{1}{2}\right) - \frac{\lambda}{4}, -l + \frac{1}{2}, \rho\right)$$

La solución general considerando (C.12), (C.15), (C.17) y (C.19) será por tanto:

$$R_l(r) = c_1 e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}} (\alpha r)^l M\left(\frac{1}{2}\left(l + \frac{3}{2}\right) - \frac{\lambda}{4}, l + \frac{3}{2}, \alpha^2 r^2\right) + c_2 e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}} (\alpha r)^{-l-1} M\left(\frac{1}{2}\left(-l + \frac{1}{2}\right) - \frac{\lambda}{4}, -l + \frac{1}{2}, \alpha^2 r^2\right); \quad l \in N$$

(D.35)

# Apéndice E

## Ecuación Diferencial de Laguerre

### E.1. Ecuación Generalizada de Laguerre

Consideramos ahora

$$z\phi''(z) + (\alpha + 1 - z)\phi'(z) + \beta\phi(z) = 0, \quad (\text{E.1})$$

con  $\beta \in \mathbb{C}; \alpha \in \mathbb{R}$  y  $\alpha > -1; z \in \mathbb{C}$ .

La ecuación anterior corresponde a un caso particular de la Hipergeométrica Confluyente si realizamos los cambios  $c = \alpha + 1$  y  $a = \beta$ , y es de suma importancia en mecánica cuántica para el estudio de los átomos hidrogenoides [15] con una solución  $M(-\beta, \alpha + 1, z)$ . Ella multiplicada por un coeficiente, se denomina **función generalizada de Laguerre** y viene dada por:

$$L_{\beta}^{\alpha}(z) = \frac{\Gamma(\alpha + 1 - \beta)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}M(-\beta, \alpha + 1, z), \quad (\text{E.2})$$

con  $\alpha > -1; \beta, z \in \mathbb{C}$ .

Para  $\beta = n = 0, 1, 2, \dots$ , obtenemos de la relación anterior polinomios de grado  $n$ , llamados **polinomios generalizados de Laguerre**

$$L_n^{\alpha}(z) = \frac{\Gamma(\alpha + 1 - n)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(n + 1)}M(n, \alpha + 1, z), \quad (\text{E.3})$$

donde  $M(n, \alpha + 1, z)$  es la **función Hipergeométrica confluyente**.

Desarrollamos  $L_n^{\alpha}(z)$  en potencias de  $z$ , se obtiene

$$\begin{aligned} L_n^{\alpha}(z) &= \frac{\Gamma(\alpha + 1 + n)}{\Gamma(\alpha + 1)n!} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(-n)} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(r - n)}{\Gamma(\alpha + 1 + r)} \frac{z^r}{r!} \\ &= \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(\alpha + 1 + n)\Gamma(r - n)z^r}{\Gamma(\alpha + 1 + r)\Gamma(-n)n!r!}, \end{aligned}$$

---

pero:  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(r-n+\epsilon)}{\Gamma(-n+\epsilon)n!} = \frac{(-1)^r}{(n-r)!}$ , entonces tendremos:

$$L_n^\alpha(z) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{\Gamma(\alpha+1+r)(n-r)!r!} z^r; \quad \alpha > -1; z \in C; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{E.4})$$

si  $\alpha \equiv k = 0, 1, 2$ , entonces  $\Gamma(k+1+n) = (k+n)!$ ;  $\Gamma(k+1+r) = (k+r)!$ , se obtiene:

$$L_n^k(z) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{(k+n)!}{(n-r)!(k+r)!r!} z^r; \quad z \in C; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{E.5})$$

además tenemos:

$$L_n^k(z) = \frac{(n+k)!}{n!k!} M(-n, k+1, z), \quad z \in C; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{E.6})$$

Para el caso especial,  $\alpha = 0$ ; se denomina **función de Laguerre**; esto es:

$$L_\beta(z) \equiv L_\beta^0(z) = M(-\beta, 1, z); \quad \beta, z \in C, \quad (\text{E.7})$$

donde,  $L_\beta(z)$  es la solución de otra ecuación importante en física, la **ecuación diferencial de Laguerre** y está dada por:

$$x\phi''(x) + (1-x)\phi'(x) + 2n\phi(x) = 0, \quad (\text{E.8})$$

con  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , la misma se obtiene a partir de la ecuación generalizada imponiendo las condiciones  $\alpha = 0$  y  $\beta = 2n$ . Ahora bien si  $\beta = n = 0, 1, 2, \dots$ , los polinomios  $L_n$  se denominan **polinomios de Laguerre** y vienen dados por la expresión

$$\begin{aligned} L_n(z) &= M(-n, 1, z) \\ &= \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{n!z^r}{(r!)^2(n-r)!}; \quad \beta, z \in C; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Partiendo de (D.6) si  $n = 0$ , tenemos

$$L_0^\alpha(z) = 1; \quad z \in C; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{E.10})$$

Probamos lo siguiente, sea  $L_n(z) = M(-n, 1, z)$ , tomemos la derivación correspondiente y entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dz^k} L_{n+k}(z) &= \frac{d^k}{dz^k} M(-n-k, 1, z) \\ &= \frac{\Gamma(-n)\Gamma(1)}{\Gamma(-n-k)\Gamma(k+1)} M(-n-k, 1, z), \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

pero

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-n+\epsilon)}{\Gamma(-n-k+\epsilon)} = (-1)^k \frac{(n+k)!}{n!}$$

comparamos este resultado con (D.7) y sustituyendo en (D.12) obtenemos

$$L_n^k(z) = (-1)^k \frac{d^k}{dz^k} L_{n+k}(z), \quad z \in C; \quad n, k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{E.12})$$

o también

$$L_n^\alpha(z) = e^z \frac{z^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^{n+\alpha}), \quad z \in C; \quad \alpha > -1 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{E.13})$$

con  $k = \alpha$ . La ecuación (D.14) se conoce como la **fórmula de Rodrigues**.

Algunas propiedades de los polinomios de Laguerre:

$$L_{n+1}(z) = (2n + 1 - z)L_n(z) - n^2 L_{n-1}(z)$$

$$L'_n(z) - nL'_{n-1}(z) + nL_{n-1}(z) = 0$$

$$\frac{d}{dz} L_n^\alpha(z) - \frac{d}{dz} L_{n-1}^\alpha(z) + L_{n-1}^\alpha(z) = 0$$

Cuadro E.1: **Propiedades de los polinomios de Laguerre**



# Bibliografía

- [1] S. Murray. *Teoría y Problemas de Mecánica Teórica*. Mc Graw Hill, Mexico, primera edición, 1976.
  - [2] I.E.Irodov. *Leyes Fundamentales de la Mecánica*. Editorial Mir, Moscú, primera reimpresión edición, 1989.
  - [3] L. Landau y E. Lifshitz. *Curso Abreviado de Física Teórica ,Mecánica y Electrodinámica*.
  - [4] V.Tapia. *La estructura canónica de la relatividad general*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2008.
  - [5] P. Arias. *Apuntes del Curso de Relatividad Especial*. Sin Publicar, Caracas, 2011.
  - [6] P. Arias. *Apuntes de Introducción a la Teoría Clásica de Campos*. Sin Publicar, Caracas, 2012.
  - [7] Dare Wells. *Lagrangian Dynamics*. Mc Graw Hill, New York, primera edición, 1967.
  - [8] J. Marion. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Thomson-Brooks/Cole, New York, fifth edition, 2003.
  - [9] I. Rubalcava. Análisis hamiltoniano de teorías tipo bf. Master's thesis, 1998.
  - [10] P. Arias y R. Gaitan. *Introducción a la Teoría Clásica de Campos*. Sin Publicar, Caracas, 2010.
  - [11] Pío Arias.
  - [12] G. Dunne. Aspects of chern-simmons theory. *Arxiv*, 1:1–76, 1998.
  - [13] R. Jackiw y G. Dunne. Topological chern-simons, quantum mechanics. *Physical Review D*, 1:1–12, 1989.
  - [14] M. Von Steinkirch. Maxwell-chern-simons theory. *State University of New York*, 1:1–3, 2010.
-

- [15] P. Torres. *Curso en Métodos de la Física Teórica*. Facultad de Ciencias, Caracas, primera edition, 2004.
  - [16] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, ninth dover printing, tenth gpo printing edition, 1964.
  - [17] V. Arnold. *Mathematical Methods Of Classical Mechanics*. Springer, New York, second edition, 1989.
  - [18] A.N. Tijonov y A.A. Samarsky. *Ecuaciones de la Física Matemática*. Editorial Mir, Moscú, segunda edition, 1980.
  - [19] Jackson. *Electrodinámica Clásica*.
  - [20] G. Arfken. *Mathematical Methods For Physicists*. Academic Press, Inc, New York, third edition, 1985.
-