

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE DOS CONFIGURACIONES DE
ANTENAS FRACTALES MULTIBANDA

Presentado Ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por el Br. García Ñ., Ximena S.
para optar al Título de
Ingeniero Electricista

Caracas, 2006

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

**DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE DOS CONFIGURACIONES DE
ANTENAS FRACTALES MULTIBANDA**

TUTOR ACADEMICO: Prof. Franklin Martínez

Presentado Ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por el Br. García Ñ., Ximena S.
para optar al Título de
Ingeniero Electricista

Caracas, 2006



CONSTANCIA DE APROBACIÓN

Caracas, 09 de agosto de 2006

Los abajo firmantes, miembros del Jurado designado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Eléctrica, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por la Bachiller García N. Ximena S., titulado:

***“DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE DOS CONFIGURACIONES DE
ANTENAS FRACTALES MULTIBANDA ”***

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el plan de estudios conducente al Título de Ingeniero Electricista en la mención de Comunicaciones, y sin que ello signifique que se hacen solidarios con las ideas expuestas por el autor, lo declaran APROBADO.

Prof. Zeldivar Bruzual
Jurado

Prof. Freddy Brito
Jurado

Prof. Franklin Martínez
Prof. Guía

DEDICATORIA

A Dios por el don de la vida y porque todo es posible gracias a él.

A mis padres por su paciencia y comprensión, por su entrega y sacrificio.

A mis hermanas Ela y Monica por su apoyo incondicional por el ejemplo que me han dado me ha inspirado más de una vez.

A Leonel por su cariño incondicional, y por mostrarme de nuevo el rumbo.

A todos ustedes, por siempre creer en mí y por su amor sin el cual nada hubiera sido posible.

RECONOCIMIENTOS Y AGRADECIMIENTOS

A los profesores Rafael Tomas Caldera, Cristian Álvarez, Freddy Brito, Zeldivar Bruzual y Rafael Rivero. Por su dedicación y ayuda desinteresada, por apoyarme, su contribución ha sido muy valiosa para la culminación de esta meta, a ustedes mi reconocimiento.

Al Prof. Franklin Martínez por darme la oportunidad de realizar este trabajo de Grado y por guiarme para llevarlo a término.

A mis amigos Osman Sánchez, Jhon Villegas, Gustavo Bosa, Miguel Pérez, Vicente Velásquez, José Miguel Becerra, Gerlis Caropresse, y Zuleima Barrios, por acompañarme en buenos y malos momentos, por enseñarme el valor de la amistad, les estaré eternamente agradecida por todo el apoyo que me brindaron.

A Lucas mi pequeño y noble amigo por ser mi compañía y por darme siempre alegría y ternura.

García Ñ., Ximena S.

**DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE DOS CONFIGURACIONES DE
ANTENAS FRACTALES MULTIBANDA**

Tutor Académico o Prof. Guía: Franklin Martínez. Tesis. Caracas. U.C.V. Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Eléctrica. Ingeniero Electricista. Opción: Comunicaciones. Institución: Escuela de Ingeniería Eléctrica U.C.V. 2006.

Palabras Claves: Geometría Fractal; Triángulo Sierpinski; Antena; Tecnología Microstrip, Antena Fractal Multibanda.

Resumen. El siguiente trabajo presenta el Diseño de dos Antenas Fractales Multibanda para operar en la banda S, usando para su implementación la Tecnología Microstrip. Para el diseño de la primera antena se eligió la forma fractal denominada Triángulo de Sierpinski, para la segunda antena se alteró la geometría antes mencionada la nueva forma obtenida se denominó Triángulo de Sierpinski modificado. Para este estudio se hicieron tres iteraciones de cada configuración y se analizó cada iteración como una antena individual. Se obtuvo la impedancia de entrada de cada antena, a partir de un análisis teórico. La primera iteración de cada configuración fue analizada empleando el Modelo de Cavidad Resonante, para las iteraciones sucesivas se dedujo un modelo equivalente utilizando síntesis de redes. A través de un paquete de simulación se analizaron los principales parámetros de las antenas fractales obtenidas.

Las Antenas Fractales se realizaron sobre láminas FR4, y se implementaron con técnica microstrip.

Los resultados obtenidos en las mediciones evidencian las características propias de este tipo de antenas además del comportamiento multibanda.

ÍNDICE GENERAL

	Pág.
CONSTANCIA DE APROBACIÓN	
DEDICATORIA	IV
RECONOCIMIENTOS Y AGRADECIMIENTOS	V
RESUMEN	VI
LISTA DE TABLAS	XI
LISTA DE FIGURAS, GRAFICOS E ILUSTRACIONES	XIII
INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO I	
1.1 TEORIA FRACTAL	3
1.1.1 Geometría Fractal	3
1.1.2 Características de la geometría fractal	4
1.1.3 Construcción de las Geometrías Fractales	8
1.1.4 Formas Fractales usadas en Aplicaciones de Antenas	9
1.2 TECNOLOGIA MICROSTRIP	11
1.2.1 Antenas Planares	11
1.2.2 Métodos de análisis de una antena Microstrip	13
1.2.2.1 Métodos Aproximados	14
1.2.2.2 Métodos “Full Wave”	16
1.2.3 Técnicas de alimentación de una línea microstrip	16
1.2.3.1 Alimentación usando una línea microstrip	17
1.2.3.2 Alimentación coaxial	18
1.2.3.3 Alimentación usando una abertura acoplada	19
1.2.3.4 Alimentación usando acoplamiento por proximidad	
1.3 ANTENAS FRACTALES MICROSTRIP	21
CAPITULO II	
2.1 DISEÑO DE LA ANTENA FRACTAL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI	25

2.2	CONSIDERACIONES DE DISEÑO	25
2.3	ELECCIÓN DE LA FORMA FRACTAL PARA LA ANTENA	26
2.4	TÉCNICA DE ALIMENTACIÓN	27
2.5	ANÁLISIS TEÓRICO DE LA ANTENA FRACTAL	33
2.5.1	Análisis de la primera iteración. Modelo de Cavidad.	33
2.5.2	Análisis de la segunda iteración. Modelo equivalente mediante síntesis de redes.	46
2.5.2.1	Caracterización de los triángulos que conforman el triangulo de Sierpinski en redes de tres puertos.	47
2.5.2.2	Modelo equivalente, obtención de impedancia de entrada de la antena triángulo de Sierpinski iteración 2.	51
2.5.3	Análisis de la tercera iteración. Modelo equivalente mediante síntesis de redes.	57
2.6	IMPLEMENTACIÓN	59
CAPITULO III		
3.1	DISEÑO DE LA ANTENA FRACTAL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI MODIFICADA	60
3.2	CONSIDERACIONES DE DISEÑO	60
3.3	FORMA FRACTAL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI MODIFICADA	60
3.4	TÉCNICA DE ALIMENTACIÓN	61
3.5	ANÁLISIS TEORICO DE LA ANTENA FRACTAL	61
3.5.1	Análisis de la primera iteración. Modelo de Cavidad.	61
3.5.2	Análisis de la segunda iteración. Modelo equivalente mediante síntesis de redes	67
3.5.2.1	Caracterización de los segmentos de circunferencia que conforman el Triángulo de Sierpinski Modificado, en redes de tres puertos	67
CAPITULO IV		
4.1	AJUSTE DEL MODELO TEÓRICO MEDIANTE LA SIMULACIÓN	

DE LAS ANTENAS FRACTALES TRIÁNGULO DE SIERPINSKI Y TRIÁNGULO DE SIERPINSKI MODIFICADO	74
4.2 ANALISIS DE LA ANTENA TRIÁNGULO DE SIERPINSKI	75
4.2.1 Elección de la ubicación del punto de alimentación.	75
4.2.2 Análisis de la Antena Triángulo de Sierpinski: Iteración 1	77
4.2.2.1 Elección del punto de alimentación	77
4.2.2.2 Ajuste de la constante dieléctrica del modelo teórico	78
4.2.3 Análisis de la antena Triángulo de Sierpinski: Iteración 2.	80
4.2.3.1 Elección del punto de alimentación	80
4.2.3.2 Ajuste de la constante dieléctrica del modelo teórico	82
4.2.4 Análisis de la Antena Triángulo de Sierpinski: Iteración 3	84
4.2.4.1 Elección del punto de alimentación	84
4.2.4.2 Ajuste de la constante dieléctrica del modelo teórico	86
4.3 ANALISIS DE LA ANTENA TRIÁNGULO DE SIERPINSKI MODIFICADO	87
4.3.1 Elección de la ubicación del punto de alimentación.	87
4.3.2 Análisis de la Antena Triángulo de Sierpinski Modificado: Iteración 1	88
4.3.2.1 Elección del punto de alimentación	88
4.3.2.2 Ajuste de la constante dieléctrica del modelo teórico	89
4.3.3 Análisis de la Antena Triángulo de Sierpinski Modificado: Iteración 2	91
4.3.3.1 Elección del punto de alimentación	91
4.3.3.2 Ajuste de la constante dieléctrica del modelo teórico	93
4.3.4 Análisis de la Antena Triángulo de Sierpinski Modificado: Iteración 3	93
4.3.4.1 Elección del punto de alimentación	93
4.3.4.2 Ajuste de la constante dieléctrica del modelo teórico	95
CAPITULO V	
5.1 IMPLEMENTACIÓN FISICA DE LAS ANTENAS Y RESULTADOS EXPERIMENTALES	96
5.1.1 Construcción de las antenas Triángulo de Sierpinski y Triángulo de Sierpinski Modificado	96

5.2 MEDICIONES EXPERIMENTALES	101
5.2.1 Mediciones experimentales haciendo uso de un analizador de espectro.	101
5.2.2 Mediciones experimentales obtenidas en el laboratorio	103
5.2.2.1 Resultados experimentales de la antena Triángulo de Sierpinski para la tres primeras iteraciones	104
5.2.2.2 Resultados experimentales de la antena Triángulo de Sierpinski Modificado para la tres primeras iteraciones	106
CONCLUSIONES	111
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	113
ANEXOS	116

LISTA DE TABLAS

TABLA	Pág.
Tabla 1.1. Cuadro Comparativo entre la geometría clásica y la geometría fractal	4
Tabla 1.2 Ventajas y desventajas de las antenas microstrip	13
Tabla 1.3 Técnicas de alimentación de una antena microstrip	21
Tabla 3.1 Valores aproximados del argumento de la derivada de la Función de Bessel igualada a cero.	63
Tabla 4.1 Ubicación de los puntos de alimentación de la antena Triángulo de Sierpinski Iteración 1,2 y 3.	77
Tabla 4.2. Resultados simulación Antena Sierpinski iteración 1, alimentada en puntos diferentes	78
Tabla 4.3. Resultados Modelo Teórico Antena Sierpinski iteración 1, alimentada en diferentes puntos	79
Tabla 4.4. Resultados simulación Antena Sierpinski iteración 2, alimentada en puntos diferentes	81
Tabla 4.5. Resultados Modelo Teórico Antena Sierpinski iteración 2, alimentada en diferentes puntos	83
Tabla 4.6 Resultados simulación Antena Sierpinski iteración 3, alimentada en puntos diferentes	85
Tabla 4.7 Ptos. de alimentación de la antena Triángulo de Sierpinski Modificado	88
Tabla 4.8. Resultados simulación Antena Sierpinski Modificada iteración 1, alimentada en puntos diferentes	89
Tabla 4.9. Resultados Modelo Teórico Antena Sierpinski Modificada iteración 1, alimentada en diferentes puntos	90

Tabla 4.10. Resultados simulación Antena Sierpinski Modificada iteración 2, alimentada en puntos diferentes	92
Tabla 4.11. Resultados simulación Antena Sierpinski Mod. Iter. 3	94
Tabla 5.1 Mediciones obtenidas con el analizador de espectro Anritsu Site Master	101
Tabla 5.2 Mediciones obtenidas con el analizador de espectro Anritsu Site Master	102

LISTA DE FIGURAS, GRÁFICAS E ILUSTRACIONES

FIGURA, GRÁFICA E ILUSTRACIÓN	Pág.
Figura 1.1. Segmento de recta, forma unidimensional	6
Figura 1.2. Cuadrado de lado L, forma bi-dimensional	6
Figura 1.3. Triangulo Sierpinski 1 ^a y 2 ^a iteración	7
Figura 1.4 Fractal Curva Koch	9
Figura 1.5 Fractal Triángulo de Sierpinski	10
Figura 1.6 Fractal Conjunto de Cantor	11
Figura 1.7 Antena planar microstrip	12
Figura 1.8 líneas de campo eléctrico en la antena microstrip	14
Figura 1.9 Modelo de línea de transmisión	15
Figura 1.10 Modelo de Cavidad	15
Figura 1.11 Alimentación mediante línea microstrip	18
Figura 1.12 Alimentación coaxial	18
Figura 1.13 Alimentación usando una abertura acoplada	19
Figura 1.14 Alimentación usando acoplamiento por proximidad	20
Figura 1.15 Antenas planares Fractales Microstrip típicas	24
Figura 2.1 Fractal Triangulo de Sierpinski	27
Figura 2.2 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Triángulo de Sierpinski iteración 1 alimentada con línea microstrip	29
Gráfico 2.1 Resultado simulación impedancia de entrada de la Antena planar Triangular	30
Figura 2.3 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Triángulo de Sierpinski iteración 2 alimentada con línea microstrip	30
Gráfico 2.2 Resultados simulación impedancia de entrada de la Antena	

Triángulo Sierpinski iteración 2	31
Figura 2.4 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Triángulo de Sierpinski iteración 3 alimentada con línea microstrip.	31
Gráfico 2.3 Resultado simulación impedancia de entrada de la Antena Triángulo Sierpinski iteración 3	32
Figura 2.5 Condiciones de Frontera	36
Figura 2.6 Cavity triangular vectores perpendiculares a los muros magnéticos	38
Figura 2.7 Modo de propagación del campo eléctrico m=1	42
Figura 2.8 Modo de propagación del campo eléctrico m=2	43
Figura 2.9 Modo de propagación del campo eléctrico m=5	43
Figura 2.10 líneas de campo \vec{H} dentro de la cavidad, las líneas corresponden a los modos: m=1, m=8, m=10 y m=20	44
Gráfico 2.4 Impedancia de Entrada de la Antena Triángulo de Sierpinski iteración 1.	45
Figura 2.11 Iteración 2, cada triangulo es modelado como una red de tres Puertos	47
Figura 2.12 Red de tres puertos	47
Figura 2.13 Modelo equivalente Triángulo Sierpinski iteración 2	52
Gráfico 2.5 Impedancia de Entrada de la Antena Triángulo de Sierpinski iteración 2.	57
Figura 2.14 Triángulo de Sierpinski Iteración 3, conformada por 3 configuraciones de la iteración 2.	58
Figura 3.1 Cavity circular	62
Figura 3.2 Condiciones de frontera para el segmento circular	64
Figura 3.3 Área de alimentación de la antena cuya forma es un segmento circular	65
Gráfico 3.1 Impedancia de Entrada de la Antena Triángulo de Sierpinski Modificada Iteración 1	67
Figura 3.4 Iteración 2, cada segmento es modelado como una red de tres puertos	68

Figura 4.1 Variación de la ubicación del punto de alimentación de la antena compuesta por triángulos	76
Figura 4.2 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Triángulo Sierpinski Iteración 1	77
Gráfica 4.1 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski iteración 1, obtenida con el simulador para la posición7 de la tabla 4.1	80
Gráfica 4.2 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski iteración 1, obtenida con el Modelo de Cavidad para la posición7 de la tabla 4.1	80
Figura 4.3 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Triángulo Sierpinski Iteración 2	81
Gráfica 4.3 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski iteración 2, obtenida con el simulador para la posición5 de la tabla 4.1	84
Gráfica 4.4 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski iteración 2, obtenida con el Modelo de Cavidad para la posición5 de la tabla 4.1	84
Figura 4.4 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Triángulo Sierpinski Iteración 3	85
Gráfica 4.5 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski iteración 3, obtenida con el simulador para la posición 6 de la tabla 4.1	86
Figura 4.5 Variación de la ubicación del punto de alimentación de la antena compuesta por segmentos circulares	87
Figura 4.6 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Segmento Circular	88
Gráfica 4.6 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski Modificada iteración 1, obtenida con el simulador para la posición 6	90
Gráfica 4.7 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski Modificada iteración 1, obtenida con el Modelo de Cavidad para la posición6 de la tabla 4.7	91
Figura 4.7 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Triángulo de Sierpinski Modificado iteración 2	91
Gráfica 4.8 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski Modificada iteación2, obtenida con el simulador para la posición 7	93

Figura 4.8 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Triángulo de Sierpinski Mod. Iter3.	94
Gráfica 4.9 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski Modificada iteración3, obtenida con el simulador para la posición 8 de la tabla 4.7	95
Ilustración 5.1 Conector Tipo N con chasis	97
Ilustración 5.2 Antena Triangular	97
Ilustración 5.3 Antena Triángulo de Sierpinski Iteración 2	98
Ilustración 5.4 Antena Triángulo de Sierpinski Iteración 3	98
Ilustración 5.5 Antena Fractal Triángulo Sierpinski con tres iteraciones	99
Ilustración 5.6 Antena Segmento Circular	99
Ilustración 5.7 Antena Triángulo de Sierpinski Modificado Iteración 2	100
Ilustración 5.8 Antena Triángulo de Sierpinski Modificado Iteración 3	100
Ilustración 5.9 Antena Fractal Triángulo Sierpinski Modificado con tres iteraciones	101
Figura 5.1 Esquema de medición para obtener el coeficiente de reflexión de las antenas	103
Gráfico 5.1 Modulo del coeficiente de reflexión de la antena triangular	104
Gráfico 5.2 Modulo del coeficiente de reflexión de la antena Sierpinski Iter2	105
Gráfico 5.3 Modulo del coeficiente de reflexión de la antena Sierpinski Iter2	105
Gráfico 5.4 Modulo del coeficiente de reflexión de la antena Sierpinski Iter3	106
Gráfico 5.5 Modulo del coeficiente de reflexión de la antena Segmento circular	107
Gráfico 5.6 Modulo del coeficiente de reflexión de la antena Segmento Circular	107
Gráfico 5.7 Modulo del coeficiente de reflexión de la antena Sierpinski Modificada iter2	108
Gráfico 5.8 Modulo del coeficiente de reflexión de la antena Sierpinski Modificada iter2	109
Gráfico 5.9 Módulo del coeficiente de reflexión de la antena Sierpinski Modificada iter3	109

Introducción

El uso de geometrías fractales ha impactado significativamente diferentes áreas de la ciencia y la ingeniería. Actualmente se usan antenas con este tipo de geometría para varias aplicaciones en telecomunicaciones incluso están disponibles comercialmente.

A pesar de que la geometría fractal ha sido conocida por los matemáticos desde hace un siglo, las investigaciones en ingeniería aplicadas a las antenas son muy recientes, y su desarrollo ha sido posible gracias al aumento de la velocidad de los microprocesadores, necesaria para completar su diseño. Se ha descubierto que las formas fractales irradian energía electromagnética de manera satisfactoria y que tiene diferentes propiedades que las hace mas ventajosas que las antenas tradicionales. Ellas pueden ser usadas como antenas multibanda, es decir, pueden radiar señales en múltiples bandas de frecuencia. Otra propiedad es que ellas son compactas, esto significa que ellas pueden ocupar una porción menor de espacio que otro tipo de antena. Estas nuevas características que han introducido las formas fractales permiten el diseño de dispositivos inalámbricos que se adapten a la demandas de las nuevas tecnologías, y a los nuevos desafíos de las comunicaciones inalámbricas.

El Departamento de Comunicaciones de la escuela de ingeniería eléctrica ha venido impulsando proyectos que involucran el diseño y fabricación de dispositivos de microondas implementados con tecnología microstrip. Continuando con esta tendencia se ha planteado este proyecto bajo tres premisas básicas, el diseño de una antena compacta, multibanda, y de fácil fabricación. Para cumplir con estos objetivos se van a integrar dos tecnologías en pleno auge la tecnología microstrip y la tecnología fractal.

El cuerpo del trabajo consta de seis capítulos, en el primer capítulo se expone la teoría necesaria para plantear el diseño de las antenas, allí encontramos los conceptos referentes a la teoría fractal, las características de este tipo de geometría, y las

principales formas fractales usadas para aplicaciones de antenas, luego se esboza la teoría referente a la tecnología microstrip, descripción de la tecnología, modelos teóricos de análisis de una antena microstrip, y las técnicas de alimentación usadas comúnmente en este tipo de antenas.

El segundo capítulo presenta el diseño de la primera Antena, primero se presenta una justificación para la elección de la forma fractal triángulo de Sierpinski, luego se hace un análisis teórico de la primera iteración de la forma fractal, este análisis se hace aplicando el modelo de cavidad resonante, después se explica un modelo equivalente para las siguientes iteraciones que se obtiene mediante síntesis de redes, por último haciendo uso del paquete Matemática® se obtienen resultados numéricos. En el tercer capítulo se sigue el procedimiento anterior pero aplicado a la segunda antena cuya forma es un fractal similar al triángulo de Sierpinski, el cual se ha denominado triángulo de Sierpinski modificado, en esta configuración, los triángulos isósceles que componen el triángulo de Sierpinski son sustituidos por segmentos de circunferencia.

Los resultados obtenidos en la etapa de diseño permiten dimensionar las antenas, estas son analizadas en un paquete de simulación. Los resultados de la simulación de las seis antenas obtenidas se presentan en el capítulo cuatro, a partir de la simulación se obtienen los principales parámetros de la antena. Luego se establece una comparación entre los resultados obtenidos mediante el modelo de cavidad, y los resultados de la simulación, también se comparan los resultados obtenidos tomando cada iteración como una antena patch triangular.

Finalmente en el último capítulo se implementa la antena y se obtienen los resultados experimentales, se establece una comparación entre los resultados teóricos y experimentales.

CAPITULO I

1.1 TEORIA FRACTAL

La teoría fractal es compleja y muy amplia, a continuación se dará un breve resumen para conocerla, sin embargo, se han omitido varios conceptos, ya que van más allá del alcance de este trabajo.

1.1.1 Geometría Fractal

Los fractales son formas geométricas complejas que no pueden ser descritas con la teoría clásica Euclidiana.

Aunque los fractales son conocidos desde hace más de un siglo, fue Benoit Mandelbrott quien en 1975 desarrolló una teoría acerca de estas peculiares figuras. Mandelbrott denominó fractales (del latín Fractus, irregular) al conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracterizan por tener longitud infinita y por no ser diferenciables, además tienen la propiedad de que su aspecto y distribución estadística no cambian cualquiera que sea la escala con la que se observe. Mandelbrott construyó un conjunto de nuevas reglas para esta nueva geometría que permite describir la naturaleza, y reconoció los fractales como herramientas potencialmente útiles para analizar un gran número de fenómenos físicos. Hoy en día los fractales son elementos insustituibles en el trabajo de físicos, químicos, biólogos, economistas, etc.

El interés de Mandelbrot en los fractales nació de su certeza de que “las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, como la corteza de un árbol no es plana ni un rayo viaja en línea recta... la naturaleza no exhibe un grado mayor sino también un nivel diferente de complejidad” [1].

En la siguiente tabla observamos las principales diferencias entre la geometría fractal y la geometría euclidiana.

Tabla 1.1. Cuadro Comparativo entre la geometría clásica y la geometría fractal

ENFOQUE EUCLIDIANO	ENFOQUE FRACTAL
Desarrollada hace 2000 años	Desarrollada hace 30 años
Aplicable a objetos artificiales	Aplicable a objetos naturales
La forma cambia al ampliarla	La forma se conserva cuando se amplia
Se define con ecuaciones analíticas	Se define con algoritmos recursivos
Curvas diferenciables	No son diferenciables

1.1.2 Características de la geometría fractal

Los Fractales tienen dos características principales: autosimilitud o autoafinidad, y dimensión fraccional también llamada dimensión fractal.

Podemos describir la autosimilitud en pocas palabras, como la propiedad geométrica de un objeto que contiene copias de sí mismo en diversas escalas diferentes.

Los Fractales que existen en la naturaleza tienden a ser irregulares y son autosimilares solo en sentido estadístico; esto es, si tomamos un conjunto suficientemente grande de objetos de la misma clase y amplificamos una porción de uno de ellos es posible que no sea idéntico al original, pero seguramente si será similar a algún otro miembro de la colección.

La autosimilitud es la principal característica que diferencia la geometría fractal con la euclidiana, en la geometría Euclidiana las figuras geométricas tienden a perder su estructura cuando son ampliadas, un arco de círculo se transforma poco a poco en una recta, la superficie de una esfera se hace cada vez más plana etc., en cambio en la geometría fractal al ampliar los objetos la forma original se conserva, y no importa cuanto sea el nivel de detalle siempre observamos una forma compleja similar a la original.

Otra característica propia de los fractales es la longitud infinita, y se deriva de lo explicado anteriormente, si observamos una línea costera, notamos que tiene picos, curvas, es una línea totalmente accidentada, si la ampliamos varias veces observamos la misma forma accidentada, si se desea obtener la longitud de esta línea costera notaríamos que es infinita, ya que no importa cuanto se amplíe siempre se observa la misma línea accidentada, sin embargo, el hecho de que la longitud de la línea sea infinita no implica que el lugar que ocupa es infinito. En pocas palabras en la geometría fractal los objetos tienen longitud infinita, sin embargo, el espacio que ocupan es finito, esta es una de las paradojas que encontramos en la geometría fractal, para entenderlo mejor se introduce el concepto de dimensión fraccional, o dimensión fractal.

El matemático alemán Félix Hausdorff en 1919 introdujo el concepto de dimensión, la dimensión de Hausdorff cuantifica hasta que punto el objeto cubre el espacio en el que se encuentra inscrito.

Establecer la dimensión de un objeto a simple vista a veces no resulta complicado, por ejemplo, un trozo de hilo es aproximadamente unidimensional una hoja de papel tiene dos dimensiones, sin embargo, si se quiere la dimensión de una línea costera es necesario un método más riguroso que la intuición.

La dimensión de Hausdorff se define como:

$$df = \frac{\text{Log}(N)}{\text{Log}(L/l)} \quad \text{ec. 1.01}$$

Donde df es la dimensión de Hausdorff, N es el número de formas geométricas que integran o constituyen la forma geométrica total, L es la longitud del lado de la forma geométrica, l es la longitud del lado de las figuras que la integran.

Para entender mejor el concepto de dimensión fractal, se ilustran algunos ejemplos a continuación.

Si tomamos tres segmentos de recta de longitud l y formamos con ellos una recta de longitud L , obtenemos la figura indicada:

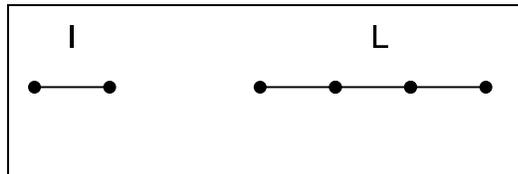


Figura 1.1. Segmento de recta, forma unidimensional

Observamos que $N = 3$ y $L/l = 3$, sustituyendo en la ecuación 1.01 obtenemos la dimensión del objeto geométrico en este caso la recta L :

$$df = \frac{\text{Log}(N)}{\text{Log}(L/l)} = \frac{\text{Log}(3)}{\text{Log}(3)} = 1$$

La dimensión de Hausdorff de la recta es uno.

Si tomamos cuatro cuadrados de lado l , y los unimos obtenemos la figura indicada:

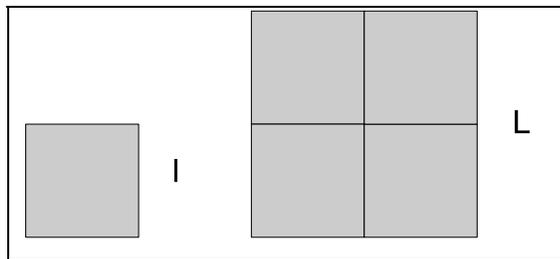


Figura 1.2. Cuadrado de lado L , forma bi-dimensional

Entonces $N = 4$, y $L/l = 2$, sustituyendo en la ecuación 1.01, obtenemos la dimensión del objeto geométrico (en este caso un cuadrado de lado L) la cual nos da:

$$df = \frac{\text{Log}(N)}{\text{Log}(L/l)} = \frac{\text{Log}(4)}{\text{Log}(2)} = 2$$

En el siguiente caso tenemos una forma geométrica constituida por tres triángulos de lado l , como se indica en la figura:

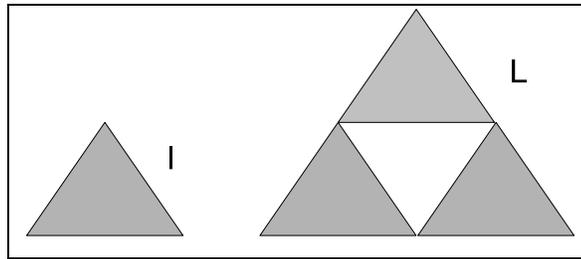


Figura 1.3. Triángulo Sierpinski 1ª y 2ª iteración.

Notamos que esta vez $N = 3$, ya que toda la figura está formada por tres triángulos, y $L/l = 2$, sustituyendo en la ecuación (1.01) tenemos:

$$df = \frac{\text{Log}(N)}{\text{Log}(L/l)} = \frac{\text{Log}(3)}{\text{Log}(2)} = 1.584$$

Este resultado, indica que la forma geométrica formada por los tres triángulos de lado l , ocupa menos espacio que el cuadrado anterior, pero ocupa más espacio que la recta.

La dimensión de Hausdorff no solo cuantifica hasta qué punto el objeto cubre el espacio en el que se encuentra inscrito, además en algunos casos indica la rugosidad del objeto, mientras más rugoso es el fractal más próxima está su dimensión fraccional a la dimensión entera inmediatamente superior.

Cabe destacar que la dimensión fractal puede ser un valor útil para aplicaciones prácticas, por ejemplo la dimensión fraccional (dimensión fractal), de la superficie

irregular de una falla en un material se utiliza como medida indirecta de su resistencia y dureza.

1.1.3 Construcción de las Geometrías Fractales

Para construir un fractal pueden seguirse procedimientos matemáticos, geométricos, físicos y químicos; el interés en generar objetos fractales es muy diverso; representar imágenes, hacer modelos, analizar patrones, identificar estructuras.

El procedimiento matemático para generar un fractal es el siguiente: se parte de un número sobre el que se hace una operación, esta misma operación se aplica al resultado, y así indefinidamente. Por ejemplo, si tenemos el número 2 y lo elevamos al cuadrado tenemos 4, si seguimos la secuencia tenemos:

$$2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 16 \Rightarrow 256 \Rightarrow 65536 \Rightarrow \dots \Rightarrow \infty$$

La secuencia de números que se genera se denomina órbita, y el punto al que tiende (en este caso infinito) es llamado atractor. Los fractales matemáticos más famosos son realizados con números complejos y entre ellos podemos mencionar los conjuntos de Julia y los conjuntos de Mandelbrot.

El procedimiento geométrico para obtener un fractal consiste en tomar un objeto geométrico y aplicar en él transformaciones generales de afinidad en el plano, estas no son más que reglas para escalar, rotar, desplazar, y en ocasiones distorsionar un objeto geométricamente, los fractales que se generan geométricamente son: el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la alfombra de Sierpinski, y la curva Koch.

Los fractales físicos y químicos son fractales que se obtienen en procesos de sedimentación, electro-deposición, y agregación de coloides, aerosoles, polvos, etc. Estos fractales son llamados agregados fractales, y son sistemas en donde hay una gran cantidad de partículas que se agrupan para generar un cuerpo con estructura

irregular. La formación de agregados fractales metálicos que se depositan electroquímicamente sobre superficies que tienen geometrías diversas, ha impulsado un nuevo campo de investigación que rinde frutos importantes en el área de tecnología de pilas y baterías.

Para culminar con la sección sobre geometría fractal se explicarán brevemente algunos fractales geométricos usados en aplicaciones de antenas.

1.1.4 Formas Fractales usadas en Aplicaciones de Antenas

El conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la alfombra de Sierpinski y la curva de Koch han sido utilizados en la última década para el diseño de Antenas fractales, las propiedades de estos fractales han permitido mejorar el desempeño de estos dispositivos para así adaptarse a las exigencias de las comunicaciones inalámbricas actuales. A continuación se da una breve reseña de cada una de estas formas.

En 1904 Niels Helge von Koch (1870-1924) define la curva que lleva su nombre. Esta curva se obtiene partiendo de un segmento el cual es dividido en tres partes iguales. La parte central se sustituye por dos segmentos del mismo tamaño que el eliminado. Sucesivamente se repite el mismo proceso por cada segmento formado, la curva obtenida tiene múltiples quiebres y picos, cuya longitud es infinita pero a su vez ocupa poco espacio, esta forma geométrica fue una de las primeras formas fractales usadas para aplicaciones de antenas [2].

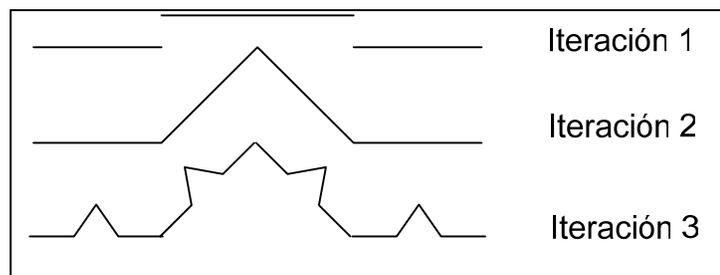


Figura 1.4 Fractal Curva Koch

Waclaw Sierpinski (1862-1969) alrededor de 1915, concibió una forma fractal que actualmente es ampliamente conocida. Partiendo de un triángulo dibujamos otro uniendo los puntos medios de sus lados. La figura resultante contiene cuatro triángulos semejantes al anterior, pero sólo tres comparten su orientación. Aquel triángulo que no comparte esta orientación es extraído de la figura así obtenemos la segunda iteración, si repetimos el procedimiento con los triángulos que permanecen en la figura y así sucesivamente se va obteniendo el fractal Triángulo de Sierpinski. El mismo procedimiento se sigue con el fractal alfombra de Sierpinski aunque en este caso la figura inicial es un cuadrado. Este fractal ha sido muy utilizado en aplicaciones de antenas, se comporta de manera muy parecida a las antenas “Bow-Tie” (antena corbatín) [3].

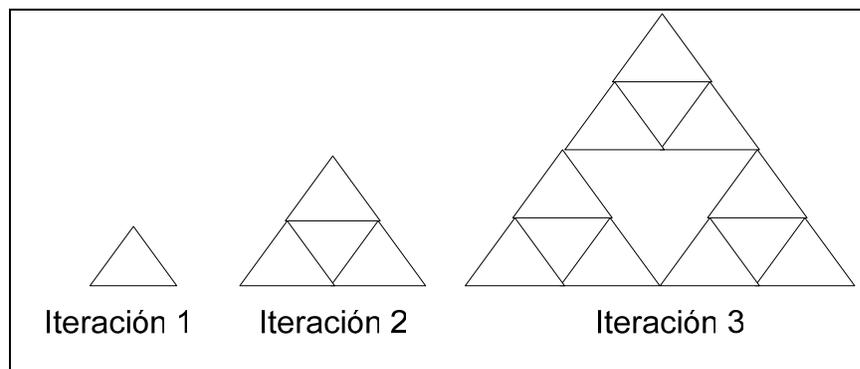


Figura 1.5 Fractal Triángulo de Sierpinski

Georg Cantor (1845-1918), creó el fractal que lleva su nombre el cual se genera a partir de una línea recta la cual es dividida en tres partes iguales, se extrae el segmento central, se repite el procedimiento con los segmentos restantes y así sucesivamente.

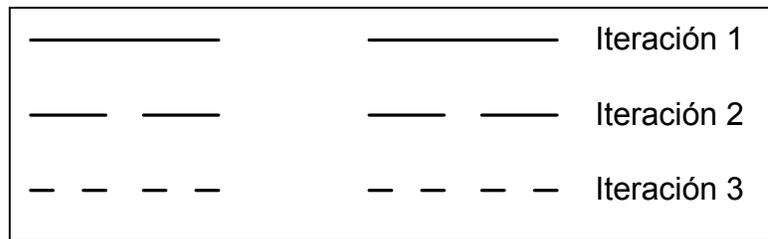


Figura 1.6 Fractal Conjunto de Cantor

Las curvas de Hilbert y el fractal de árbol (fractal tree), son también usadas en aplicaciones de antenas, sin embargo, por simplicidad se reseñaron las más sencillas de generar.

1.2 TECNOLOGIA MICROSTRIP

1.2.1 Antenas Planares

Una antena planar implementada con tecnología microstrip es en esencia un elemento conductor grabado o impreso en una lámina cuyo material es un dieléctrico, un plano de tierra está adherido al lado opuesto al dieléctrico.

A fin de simplificar el análisis y la predicción del funcionamiento, el elemento conductor es generalmente cuadrado, rectangular, circular, triangular, elíptico o alguna otra forma común, generalmente la alimentación también está impresa en el substrato dieléctrico.

El elemento radiante es seleccionado para ser muy delgado así que se debe cumplir $t \ll \lambda$ donde t es el espesor del material conductor y λ es la longitud de onda de la señal de excitación. La altura h del substrato dieléctrico es usualmente $0.003 \lambda \leq h \leq 0.05 \lambda$. La constante dieléctrica del substrato ϵ_r esta típicamente en el rango $2.2 \leq \epsilon_r \leq 12$.

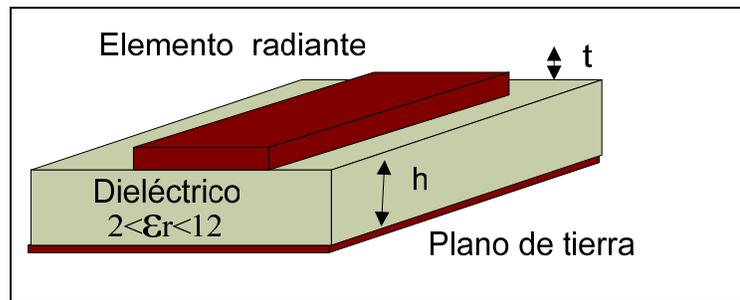


Figura 1.7 Antena planar microstrip

Los elementos radiantes de tecnología microstrip son antenas de tipo resonante, esto significa que a fin de que la antena irradie, una de las dimensiones del conductor superior debe ser aproximadamente media longitud de onda, de la señal de excitación.

La antena microstrip irradia debido a los campos que la bordean y se dirigen al plano de tierra (fringing fields). Para un buen funcionamiento de la antena, el sustrato debe tener una baja constante dieléctrica, así se obtiene mejor eficiencia, gran ancho de banda y mejor radiación, no obstante, tal condición aumenta el tamaño de la antena.

Si por el contrario se desea una antena compacta, la constante dieléctrica debe ser alta, pero esto trae como consecuencia que la antena sea poco eficiente y de banda estrecha. Así en la etapa de diseño se debe alcanzar un compromiso entre las dimensiones de la antena y su desempeño.

Las antenas microstrip han ido creciendo en popularidad para su uso en aplicaciones inalámbricas debido a su bajo perfil. Por ello son extremadamente compatibles para integrarlas en inalámbricos portátiles tales como: teléfonos celulares, Laptops, Instrumentos de Navegación, etc. La telemetría y las antenas de comunicaciones en misiles necesitan ser delgadas y adaptables a este tipo de condiciones y por lo general son antenas microstrip. Otra área donde ellas han sido usadas exitosamente es en comunicaciones satelitales.

En la tabla podemos observar las ventajas y las desventajas de las antenas microstrip:

Tabla 1.2 Ventajas y desventajas de las antenas microstrip

<i>VENTAJAS</i>	<i>DESVENTAJAS</i>
Livianas y de poco volumen.	Banda estrecha.
Configuración planar de bajo perfil fácilmente adaptables a mecanismos.	Radiación extraordinaria de los puntos de alimentación y las uniones.
Bajos costos de fabricación	Baja eficiencia.
Puede tener tanto polarización lineal, como circular.	La celda unitaria no es altamente directiva.
Puede ser fácilmente adaptable a circuito integrados de microondas.	Excitación de ondas superficiales.
Mecánicamente robusta cuando se adhiere a superficies rígidas.	

1.2.2 Métodos de análisis de una antena Microstrip

Existen varios métodos que pueden ser usados para el análisis de antenas microstrip. Estos métodos se pueden dividir en dos categorías: métodos aproximados y métodos “full-wave”. En los métodos aproximados se hacen algunas suposiciones para simplificar los cálculos, esto trae como consecuencia que el análisis sea más sencillo, pero a su vez inexacto. Los métodos aproximados son muy útiles para analizar elementos de antenas simples, y por lo general nos dan una idea del fenómeno físico que esta ocurriendo, otra ventaja de estos métodos es que el tiempo de solución es muy corto. En los métodos “full wave” el proceso de solución es muy riguroso, se toman en cuenta todas las componentes de campo y para obtener la solución es necesario un algoritmo numérico. Estos métodos son muy exactos y pueden ser usados para modelar una amplia variedad de configuraciones de antenas incluyendo arreglos. Una de las desventajas de los métodos “full wave”, es que son muy

complejos, y no ofrecen una idea del fenómeno físico y además requieren recursos computacionales cuyos tiempos de solución según sea el caso son extensos.

1.2.2.1 Métodos aproximados

Los métodos aproximados más usados son el modelo de línea de transmisión y el modelo de cavidad.

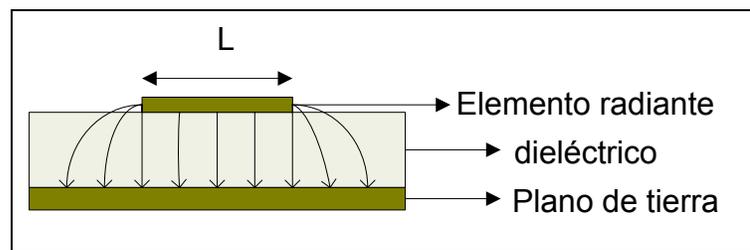


Figura 1.8 líneas de campo eléctrico en la antena microstrip

En el modelo de línea de transmisión el elemento radiante es reemplazado por dos ranuras radiantes equivalentes separadas por una distancia L que garantiza que los campos radiados de ambas ranuras se sumen en fase, cada ranura es representada por una admitancia, así la antena es modelada como un circuito con dos admitancias en paralelo. El análisis se reduce a la teoría básica de circuitos lo cual permite calcular de forma sencilla la frecuencia de resonancia y la impedancia de entrada de la antena. El modelo de línea de transmisión es el más simple para analizar antenas microstrip, pero es el menos exacto y también carece de versatilidad, funciona bastante bien en antenas con substratos muy delgados, y constante dieléctrica baja, sin embargo, si alguna de estas variables aumenta el modelo pierde validez.

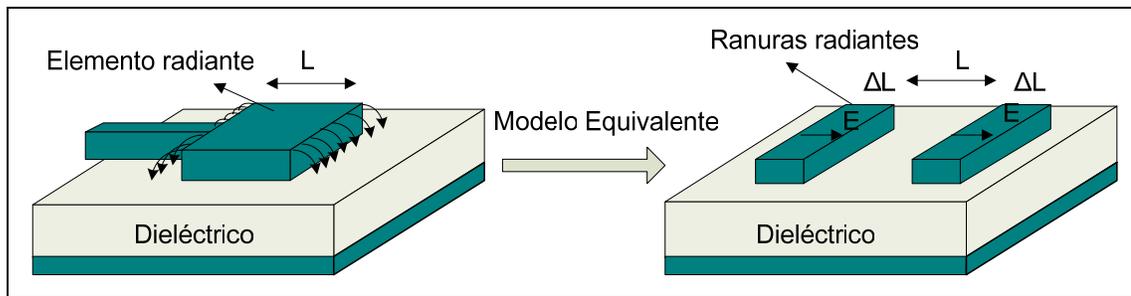


Figura 1.9 Modelo de línea de transmisión

En el modelo de cavidad resonante, la antena es explicada como una cavidad con muros eléctricos donde se encuentran los conductores, y con muros magnéticos en la transición dieléctrica. Con este método el campo eléctrico queda confinado entre el elemento radiante y el plano de tierra por lo tanto la cavidad no tiene pérdidas. El campo eléctrico resultante puede ser expresado como la expansión de una serie de modos resonantes (auto-funciones) cuyos autovalores están asociados a las frecuencias de resonancia. El análisis se hace a partir de las ecuaciones de Maxwell, bajo dos proposiciones, que el campo axial a lo largo de la cavidad es constante, y que solo se propagan modos transverso-magnéticos(TM).

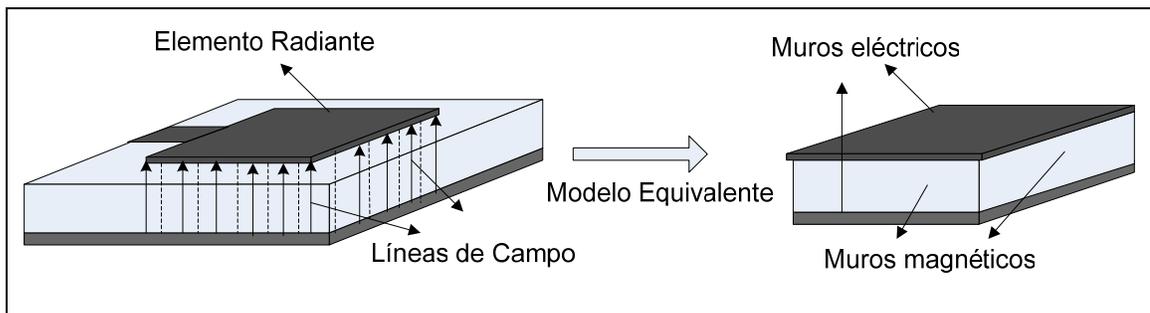


Figura 1.10 Modelo de Cavidad

Debido a que se considera que la cavidad no tiene pérdidas y no irradia energía, la impedancia que se obtiene es puramente reactiva, el efecto de la radiación se toma en cuenta introduciendo una permitividad relativa imaginaria, la cual toma en cuenta las pérdidas debido a los campos en las discontinuidades (fringe fields).

1.2.2.2 Métodos “full wave”

Los principales métodos denominados “full wave” son: el método de los momentos (MM), el método de elementos finitos (FEM), y el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD). A diferencia de los métodos aproximados estos métodos toman en cuenta todas las componentes de campo y son muy precisos. Todos incorporan el enfoque de la discretización, es decir se divide la antena en elementos radiantes discretos y se calcula el campo en estos elementos, en el caso del (MM) se calcula la densidad de corriente en los elementos discretizados, en los otros métodos (FEM) y (FDTD) se halla el campo eléctrico.

Los métodos “full wave” son extremadamente exactos, versátiles y puede tratar elementos simples, arreglos finitos e infinitos, elementos agrupados, elementos de formas arbitrarias y elementos acoplados.

En esta sección no se profundizará en estos métodos ya que la descripción de cada uno es compleja y se escapa al alcance de este trabajo.

Por ultimo cabe destacar que estos métodos no profundizan en el fenómeno físico, es decir, calculan los campos pero el proceso intermedio entre el planteamiento del problema y los resultados no es explícito, por lo tanto se desconoce el fenómeno involucrado a diferencia de los modelos aproximados los cuales si dan una idea del fenómeno físico involucrado, los métodos “full wave” requieren para ser implementados el uso de un algoritmo computacional, debido a su complejidad.

1.2.3 Técnicas de alimentación de una línea microstrip

Las Antenas microstrip pueden ser alimentadas por una variedad de métodos. Estos métodos pueden ser clasificados en dos categorías: alimentación por contacto y alimentación sin contacto. En el método con contacto, la potencia RF es alimentada directamente al elemento radiante usando un conector o una línea delgada microstrip.

En el esquema de no contacto el campo electromagnético se acopla transfiriendo potencia entre la línea microstrip y el elemento radiante.

Las cuatro técnicas más populares usadas son: tira de alimentación microstrip, conector coaxial, acoplamiento por abertura, acoplamiento por proximidad.

Si se desea un mayor ancho de banda, las técnicas de alimentación por línea microstrip y coaxial no son las indicadas. Las técnicas de no contacto pueden ser más apropiadas para substratos muy delgados.

1.2.3.1 Alimentación usando una línea microstrip

Este tipo de técnica de alimentación, consiste de un conductor microstrip que es conectado directamente al borde del elemento radiante. El ancho del conductor microstrip es pequeño en comparación con la antena, y es impreso en el mismo substrato donde esta impresa la antena.

En esta técnica lo ideal es acoplar la línea microstrip a la antena sin usar otro elemento acoplador adicional. Para acoplar de manera apropiada se calculan las dimensiones de la línea de tal manera que la impedancia de la línea sea igual a la impedancia de la antena.

Este esquema de alimentación permite una fácil fabricación, es simple y fácil de acoplar. No obstante, el espesor del substrato dieléctrico puede incrementar las ondas superficiales y esto a su vez incrementa la radiación espuria en la línea de alimentación. Otra desventaja es que reduce el ancho de banda ya que la línea de alimentación actúa como un filtro pasabanda.

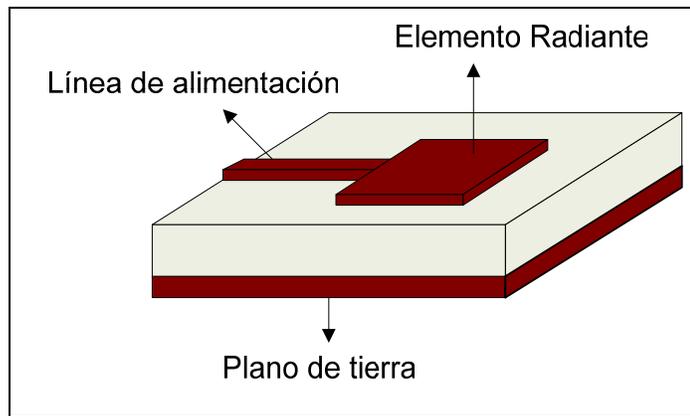


Figura 1.11 Alimentación mediante línea microstrip

1.2.3.2 Alimentación coaxial

La alimentación coaxial es una técnica muy común. El conductor interno del conector coaxial atraviesa el dieléctrico y es soldado al elemento radiante, mientras el conductor externo es conectado al plano de tierra. La principal desventaja de este tipo de alimentación es que se debe ubicar un punto específico para alimentar, y así acoplar el sistema, la ubicación de este punto no se conoce a priori y se ajusta de manera empírica.

Este método de alimentación es fácil de fabricar y tiene baja radiación espuria. No obstante, su mayor desventaja es que provee un ancho de banda angosto además el conector sobresale en la parte externa del plano de tierra, esto hace que el dispositivo no sea totalmente planar.

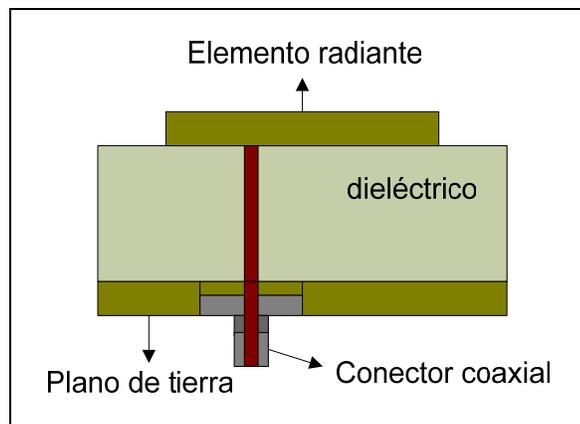


Figura 1.12 Alimentación coaxial

1.2.3.3 Alimentación usando una abertura acoplada

En este tipo de técnica de alimentación, el elemento radiante y la línea de alimentación microstrip, son separados por un plano de tierra. El acoplamiento entre la antena y la línea de alimentación es hecho a través de una ranura o abertura en el plano de tierra. La abertura es centrada bajo la antena, permitiendo una muy baja polarización cruzada debido a la simetría de la configuración. La cantidad de acoplamiento de la línea de alimentación con la antena esta determinada por la forma, el tamaño, y la ubicación de la abertura. Puesto que el plano de tierra separa la antena de la línea de alimentación, la radiación espuria es mínima.

Generalmente, un material dieléctrico de constante alta se usa en la parte inferior del sustrato, y un dieléctrico cuya constante es baja es usado para la parte superior, esto para optimizar la radiación. La mayor desventaja de esta técnica de alimentación es que es difícil de fabricar, además las múltiples capas incrementan el espesor de la antena.

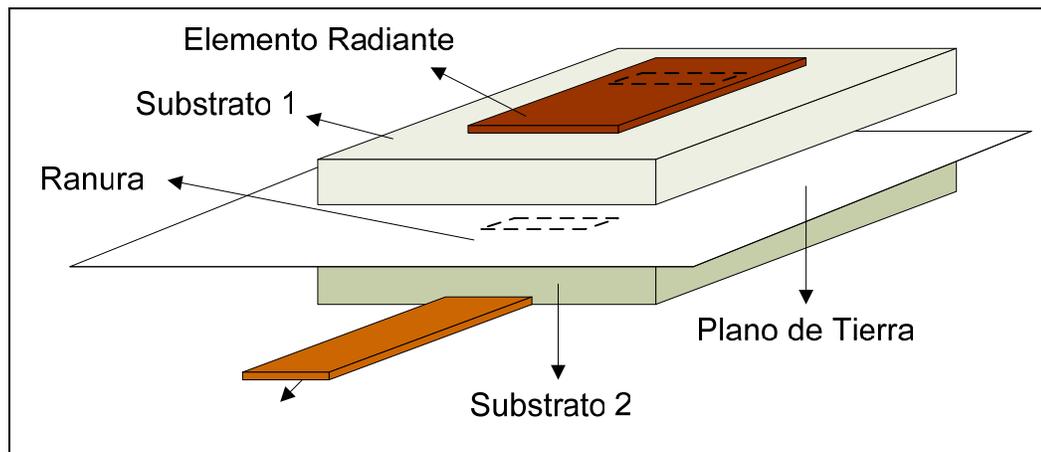


Figura 1.13 Alimentación usando una abertura acoplada

1.2.3.4 Alimentación usando acoplamiento por proximidad

En esta técnica la antena posee dos substratos dieléctricos, en medio de ellos se introduce la línea de alimentación, en la parte superior del conjunto de los dos dieléctricos se talla o se imprime el elemento radiante, y en la parte inferior se encuentra el plano de tierra. La principal ventaja de esta técnica de alimentación es que elimina radiación espuria y mejora considerablemente el ancho de banda.

En este esquema se deben elegir dos medios dieléctricos, uno para la antena y otro para la alimentación, una elección apropiada permite optimizar el desempeño de la antena.

Entre las desventajas tenemos que es difícil de fabricar y aumenta el espesor de la antena. El acoplamiento se hace eligiendo dimensiones apropiadas de la línea de alimentación.

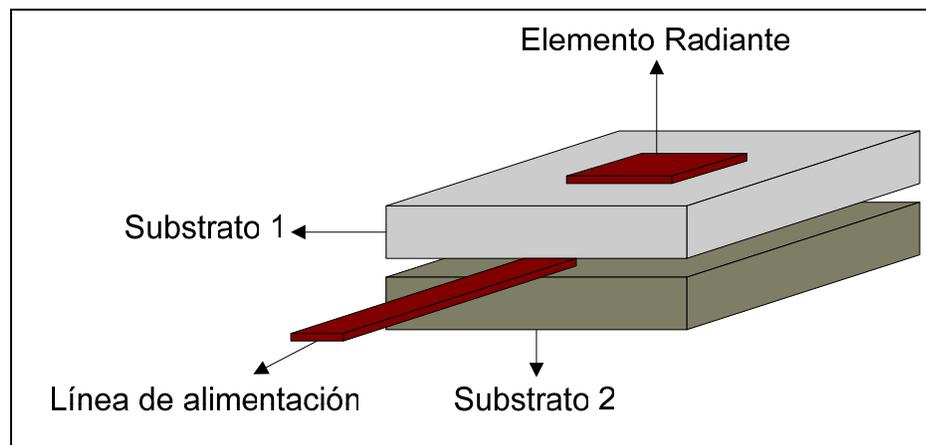


Figura 1.14 Alimentación usando acoplamiento por proximidad

A continuación encontramos las características de las principales técnicas de alimentación:

Tabla 1.3 Técnicas de alimentación de una antena microstrip

Características	Línea Microstrip	Conector Coaxial	Acoplamiento por Ranura	Acoplamiento por Proximidad
Radiación espuria	Aumenta	Aumenta	Disminuye	Mínima
Confiabilidad	Excelente	Regular	Buena	Buena
Facilidad de fabricación	Fácil	Es necesario soldar y taladrar	Se requiere alineación	Se requiere alineación
Acoplamiento de impedancia	Fácil	Fácil	Fácil	Fácil
Ancho de banda	2-5%	2-5%	2-5%	13%

1.3 ANTENAS FRACTALES MICROSTRIP

Las comunicaciones inalámbricas han sufrido un gran repunte en los últimos años, diversos son los sistemas inalámbricos comerciales que transmiten voz, mensajes, datos, y en algunos países incluso imágenes. Los usuarios son cada vez más móviles, esto ha motivado el desarrollo de nuevas tecnologías y ha convertido las comunicaciones inalámbricas en uno de los sectores de mayor crecimiento, los dispositivos portátiles son cada vez mas pequeños para que sean cómodos de llevar, y las arquitecturas se reajustan para satisfacer las necesidades de estos usuarios en el lugar donde se encuentren.

Uno de los principales retos de las comunicaciones inalámbricas actuales es la integración de servicios. Tecnologías emergentes como GPRS, EDGE, y UMTS tienen como objetivo brindar una plataforma donde el usuario posea los siguientes servicios: correo electrónico en línea, acceso a la red mundial, servicios de mensajes

cortos mejorados, radiodifusión, servicio de localización GPS, info-entretenimiento, etc. Sin embargo no sólo estas tecnologías han dado respuesta a los nuevos desafíos y exigencias de las comunicaciones inalámbricas, existe un elemento imprescindible que en las últimas décadas se ha ido adaptando a los nuevos tiempos, los sistemas radiantes.

Diferentes investigaciones han sido orientadas a mejorar el desempeño de la antena, los aspectos más importantes a tomar en cuenta para mejorar estos dispositivos son: tamaño compacto (miniaturización), comportamiento multibanda, mayor ancho de banda, mayor directividad, y que ocupen poco volumen (livianas). Estos intentos para optimizar las antenas han rendido sus frutos y han traído como resultado la aplicación de la geometría fractal a la tecnología microstrip.

Es bien sabido que la tecnología microstrip nos permite construir antenas planares de bajo perfil y livianas, aunque con baja eficiencia, y ancho de banda estrecho. Sin embargo se ha observado en ellas un gran potencial y lejos de descartar esta tecnología se han buscado técnicas que permitan mejorar su desempeño.

Una de las áreas que se han explorado para optimizar las antenas planares con tecnología microstrip es la geometría fractal, hasta hace poco las formas geométricas de los elementos radiantes de las antenas eran cuadrados, círculos, triángulos, etc. Sin embargo en la última década se han sustituido estas formas de la geometría clásica, por formas fractales cuyas propiedades se cree influyen directamente en el desempeño de las antenas [4].

Los fractales ocupan menos espacio que formas geométricas básicas, y poseen longitud infinita, aunque los fractales aplicados a antenas no tienen infinitas iteraciones, si permiten mayor longitud eléctrica y esto influye directamente en la miniaturización especialmente en antenas que operen en la banda L. Los equipos son cada vez más compactos, lo que obliga a que las dimensiones de las antenas sean

cada día más pequeñas, por lo tanto esta característica hace que los fractales sean ideales para antenas miniatura.

También se ha comprobado que las antenas fractales tienen comportamiento multibanda, en especial el fractal Triángulo de Sierpinski, debido a la propiedad de autosimilitud, con cada escalamiento se ocupa una nueva área de radiación lo cual permite que la antena resuene en bandas discretas [5], [6]. Esta ventaja de los fractales permite que una misma antena opere en diferentes bandas, esta característica es muy importante, anteriormente se mencionaba que las tecnologías emergentes integraban servicios, estos servicios operan en diferentes bandas por lo tanto el comportamiento multibanda es una característica deseable en la antena, por ejemplo, actualmente existen antenas comerciales duales GSM900-UMTS y GSM1800-UMTS [7], que fueron implementadas con geometría fractal. Otra ventaja de las antenas duales es que se reduce el costo y el impacto estético.

Las antenas microstrip típicas poseen un ancho de banda de 1% o 2%, las antenas fractales aumentan el ancho de banda a 5% o 6%, sin embargo sistemas como UMTS requieren un ancho de banda de al menos 13%, sin embargo para mejorar el ancho de banda existen técnicas muy usadas como son utilizar parches parásitos o elementos capacitivos, también existen técnicas de alimentación que permiten mejorar el ancho de banda.

La directividad es otro de las características que se pueden mejorar con las geometrías fractales. Un arreglo típico de antenas microstrip operando en su modo fundamental presenta un diagrama de radiación “broadside” y una directividad típica de de 9dB. Se ha demostrado que un parche cuadrado únicamente es “broadside” en el primer modo mientras que para la antena inspirada en el fractal Sierpinski presenta diversos modos con característica “broadside” y con una directividad creciente a medida que aumenta el orden del modo, esto permite el diseño de una antena directiva sin necesidad de agrupar varias antenas. Si es necesario una alta directividad

debe usarse un arreglo de antenas fractales ya que siempre será menor que un arreglo de antenas convencionales.

En el siguiente gráfico observamos algunas antenas planares basadas en configuraciones fractales:

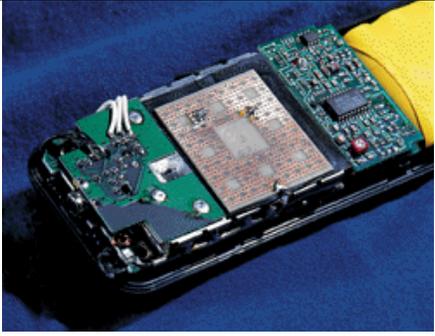
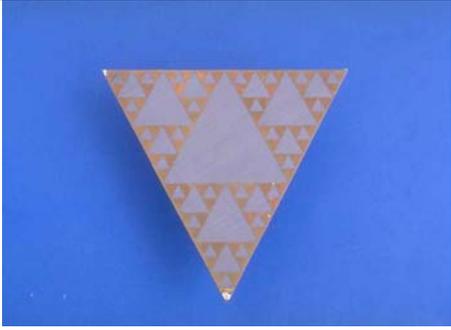
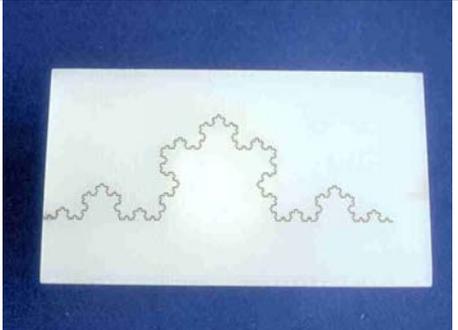
	
Antena "Sierpinski Carpet"	Antena planar "Fractal Tree"
	
Antena monopolo "Triangulo Sierpinski"	Antena "Curva de Koch"

Figura 1.15 Antenas planares Fractales Microstrip típicas

CAPITULO II

2.1 DISEÑO DE LA ANTENA FRACTAL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

El propósito de este trabajo es diseñar una antena fractal multibanda, compacta, y de fácil fabricación.

El proceso de diseño de esta antena comprende los siguientes pasos: elegir una forma fractal apropiada para la antena, seleccionar una técnica de alimentación, escoger un modelo teórico para analizar la antena y comprender el fenómeno físico involucrado, finalmente seleccionar los materiales a utilizar y el proceso de implementación de la antena.

En este capítulo se explicará en detalle cada paso del proceso de diseño y se presentarán los resultados obtenidos, al final del capítulo se establecen los materiales involucrados en la fabricación.

2.2 CONSIDERACIONES DE DISEÑO

La antena Fractal a construir debe satisfacer los siguientes parámetros:

- La impedancia nominal del puerto de entrada será de 50Ω (en la frecuencia de resonancia).
- Para la fabricación se usará tecnología microstrip, se usará una lámina con sustrato de material FR4 ($\epsilon_r = 4.3$).
- Para el diseño se usará geometría Fractal.
- La antena Fractal será multibanda con al menos dos bandas de operación.
- Una de las frecuencias de Resonancia de la antena será 2.4GHz.
- La antena debe poseer un $VSWR < 2$ para la banda nominal de operación.

2.3 ELECCIÓN DE LA FORMA FRACTAL PARA LA ANTENA

En el capítulo anterior se mencionaron algunas formas fractales y las ventajas que se obtienen al usar estas geometrías para aplicaciones de antenas, entre ellas cabe mencionar, miniaturización, comportamiento multibanda, mayor ancho de banda, y mayor directividad.

Sin embargo existen configuraciones fractales más apropiadas que otras dependiendo de las condiciones de diseño de la antena, por ejemplo, si se desea miniaturización el fractal “Koch Snowflake” es el más idóneo, este fractal no es más que la curva Koch formando un lazo cerrado, otros fractales que ocupan menos espacio y al aumentar la iteración disminuyen la frecuencia de resonancia son: el fractal de Árbol (Fractal Tree), y la curva Hilbert (Hilbert Curves). Si se desea que la antena posea comportamiento multibanda las formas fractales Alfombra Sierpinski (Sierpinski Carpet) o el Triángulo de Sierpinski (Sierpinski Gasket) son las indicadas para lograr esta condición.

Una de las características de la antena a diseñar es que sea multibanda por lo tanto, entre las formas fractales antes mencionadas se eligió la forma fractal Triángulo de Sierpinski para implementar la antena. Entre las razones que motivaron esta elección se puede mencionar que es la forma fractal más documentada y estudiada en comparación con otras formas fractales, además algunos estudios indican que esta forma fractal favorece el comportamiento multibanda debido a su geometría simétrica, y es posible variar su geometría y experimentar con otras formas sin variar la naturaleza fractal [8].

Otra de las razones por las cuales se eligió el triángulo de Sierpinski es que a pesar de ser una forma fractal está constituida por figuras de la geometría clásica, en este caso triángulos, esto facilita el análisis teórico, y es más fácil de graficar para efectos de simulación e implementación.

A continuación se observan las tres primeras iteraciones de esta forma fractal:

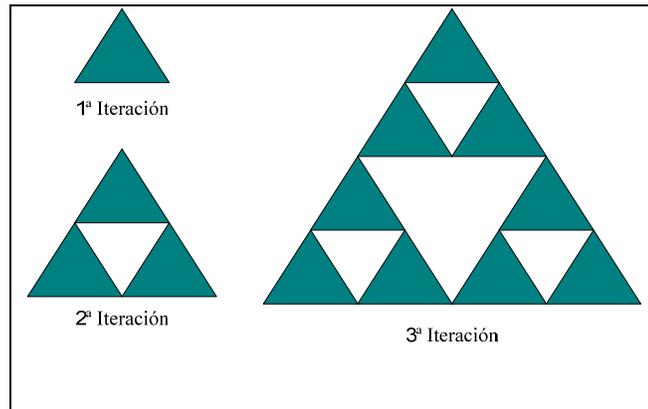


Figura 2.1 Fractal Triángulo de Sierpinski

En la sección 1.1.4 se explicó el procedimiento para obtener la forma fractal de la figura 2.1. La ubicación de bordes en determinadas zonas en el triángulo de Sierpinski permite que la radiación ocurra, como se explicó en la sección 1.2.1.

Otro aspecto a resaltar de esta forma Fractal es que el número de bandas de operación esta directamente relacionado con el número de iteraciones, por ejemplo, el fractal de la figura 2.1 posee tres iteraciones entonces debería esperarse que posea tres bandas de operación, un fractal en teoría posee infinitas iteraciones, sin embargo, para aplicaciones de antenas el fractal Triángulo de Sierpinski es acotado, es decir, posee un numero de iteraciones finito.

Para este trabajo se diseñará una antena cuya forma es el fractal Triángulo de Sierpinski con tres iteraciones, cada iteración será analizada como una antena independiente.

2.4 TÉCNICA DE ALIMENTACIÓN

Hay diferentes técnicas para alimentar la señal a la antena Fractal microstrip que fueron descritas en el Capitulo I. Para este trabajo fueron consideradas dos técnicas: la técnica de alimentación por línea microstrip y la técnica usando alimentación coaxial. Las otras técnicas no fueron consideradas debido a su complejidad.

Por su simplicidad se seleccionó la técnica de alimentación utilizando una línea microstrip, sin embargo, para garantizar que esta técnica puede ser utilizada se va a realizar una simulación de cada iteración de la antena Triángulo Sierpinski para tener una idea del valor de la impedancia de entrada.

Cuando una antena se alimenta con una línea de alimentación microstrip, la impedancia de la tira debe ser igual a la impedancia de entrada de la antena para garantizar el acoplamiento del sistema, posteriormente si es necesario se diseña un acoplador $\lambda/4$ para acoplar el sistema a la línea de alimentación ($Z_0 = 50\Omega$). Las dimensiones de la tira de alimentación dependen de la impedancia de entrada de la tira por lo tanto también dependen de la impedancia de entrada de la antena, la simulación nos proporcionará el valor de la impedancia de la antena con este valor se podrán estimar las dimensiones de la tira de alimentación.

A continuación se calcularán las dimensiones del triángulo correspondiente a la primera iteración, estas dimensiones están directamente relacionadas con la frecuencia de operación. A partir de este triángulo se construirán las iteraciones 2 y 3.

Se tomó como altura del triángulo aproximadamente $\lambda/2$ eléctrico, sabemos que:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot f}} \quad \text{ec.2.01}$$

Si sustituimos en la ecuación 2.01, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$, $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6}$, $\epsilon_r = 4.4$ y $f = 2.4GHz$ obtenemos:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot f}} = 59.48mm$$

$$h = \frac{\lambda}{2} = 29.7mm$$

Primero se va a realizar la simulación de una antena tipo patch triangular en la figura 2.2 se indican las dimensiones y el gráfico 3D de la antena a simular.

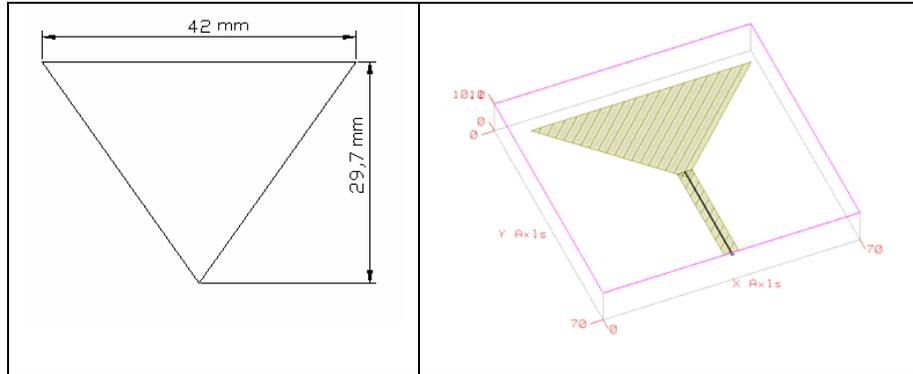


Figura 2.2 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Triángulo de Sierpinski iteración 1 alimentada con línea microstrip

En la figura 2.2 se observa que la alimentación de la antena es una tira microstrip, sin embargo, notamos una sonda que va desde el borde de la lámina al vértice del triángulo, esta opción del simulador nos permite conocer la impedancia en el vértice del triángulo, es decir, la impedancia de entrada de la antena.

En el gráfico 2.1 se encuentra el resultado de la simulación, debido a que la impedancia es compleja se observa por separado la parte real de la impedancia, y la parte imaginaria en función de la frecuencia. Para la frecuencia de resonancia el resultado es una impedancia de entrada igual a $z_{in} = 7232.8\Omega$, esta impedancia es muy alta, es imposible dimensionar e implementar una tira para esa impedancia. Típicamente las líneas de alimentación microstrip son para antenas de impedancia entre 20Ω y 150Ω .

A pesar de que no es conveniente alimentar la antena correspondiente a la iteración 1 con una tira microstrip, se hizo el mismo análisis para la iteración 2 y 3.

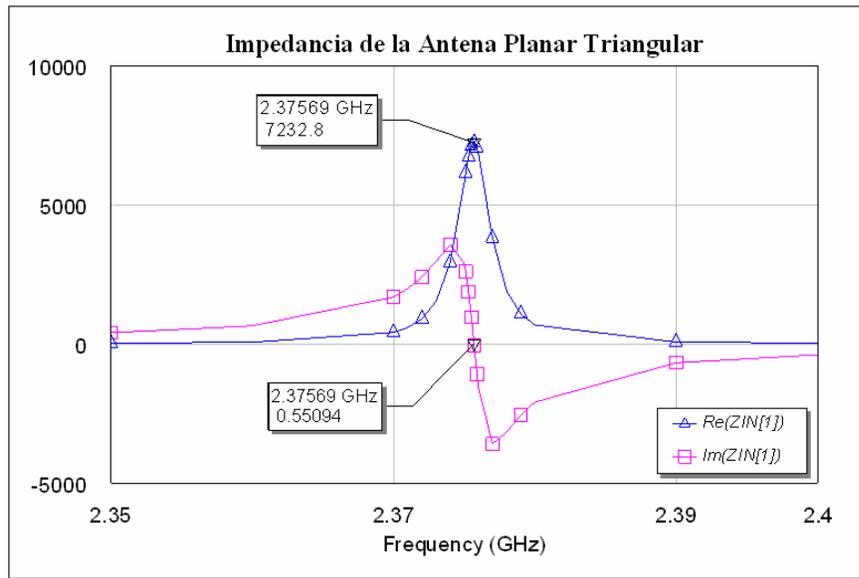


Gráfico 2.1 Resultado simulación impedancia de entrada de la Antena planar Triangular

En la figura 2.3 se observa la antena correspondiente a la iteración 2, para obtenerla simplemente se agregaron dos triángulos de igual dimensión que la iteración 1 en los vértices del triángulo correspondiente a la iteración 1.

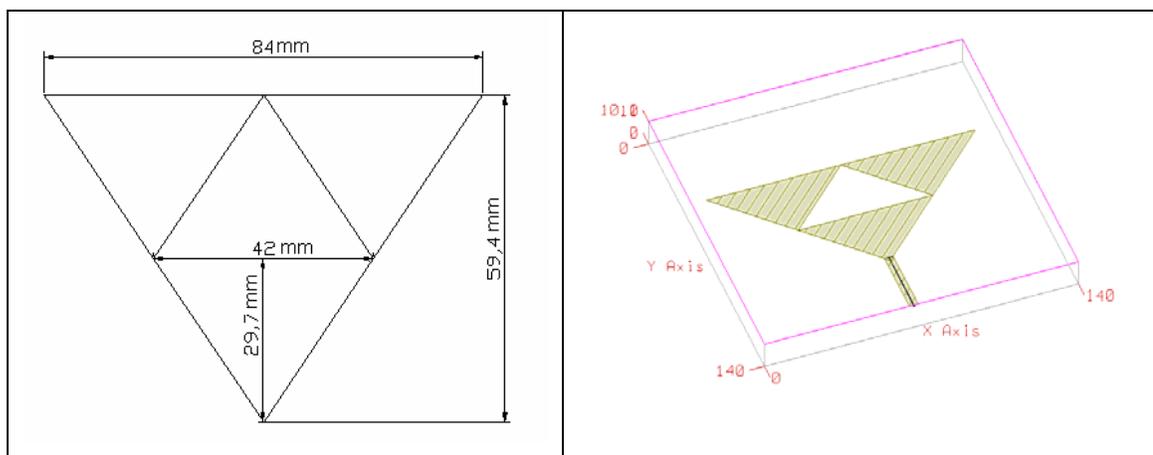


Figura 2.3 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Triángulo de Sierpinski iteración 2 alimentada con línea microstrip

La simulación de la iteración dos de la antena fractal Triángulo de Sierpinski nos da como resultado una impedancia de entrada igual a $z_{in} = 1394\Omega$, como se observa en el gráfico 2.2:

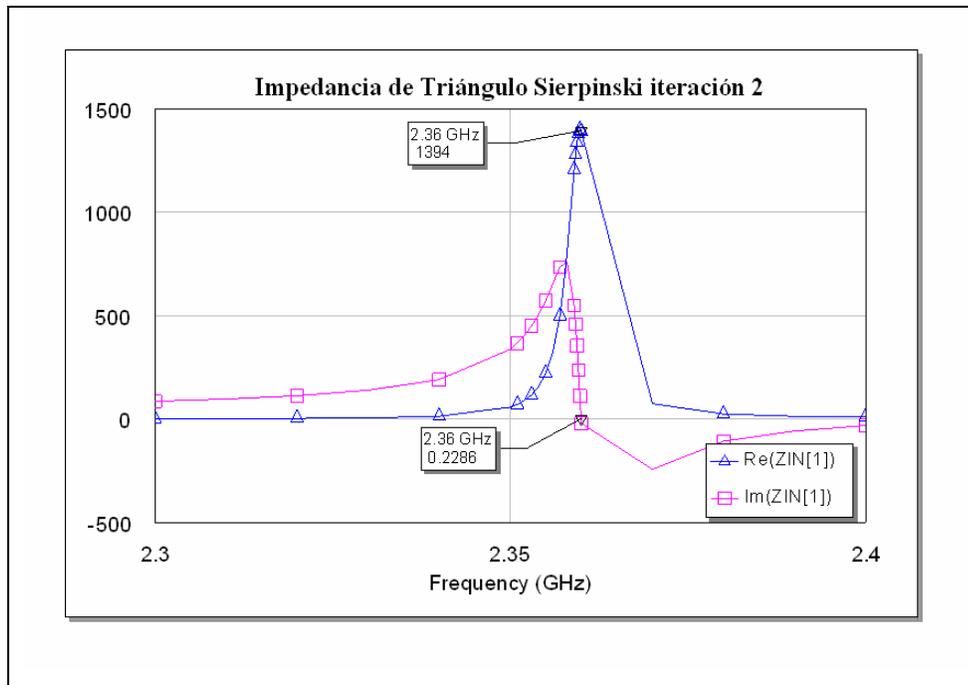


Gráfico 2.2 Resultados simulación impedancia de entrada de la Antena Triángulo Sierpinski iteración 2

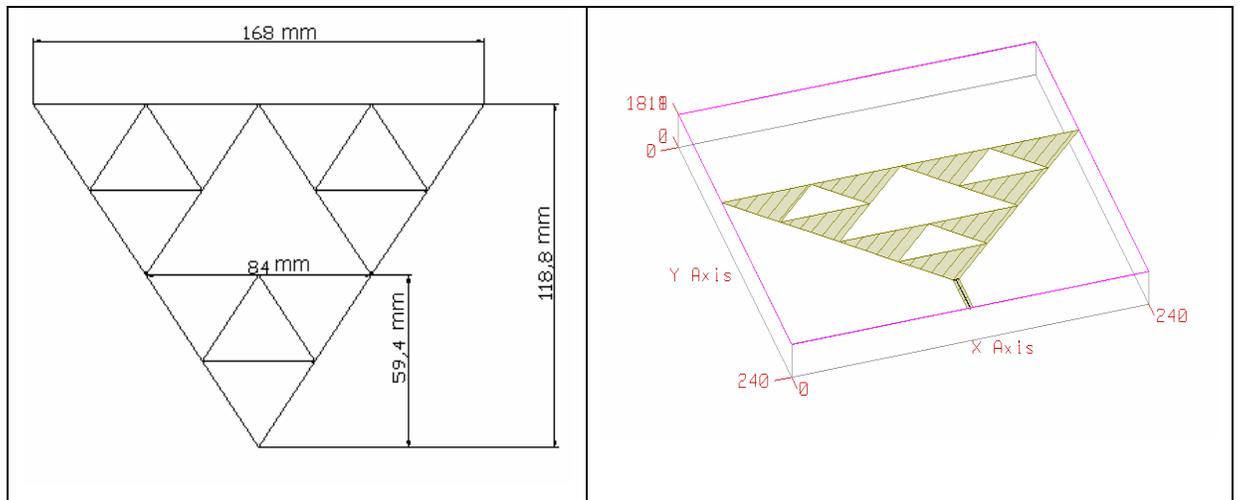


Figura 2.4 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Triángulo de Sierpinski iteración 3 alimentada con línea microstrip.

La antena correspondiente a la iteración 3 se observa en la figura 2.4, para obtenerla se procedió como la iteración 2, se agregó la forma correspondiente a la iteración 2 a los vértices de los triángulos externos de la iteración 2.

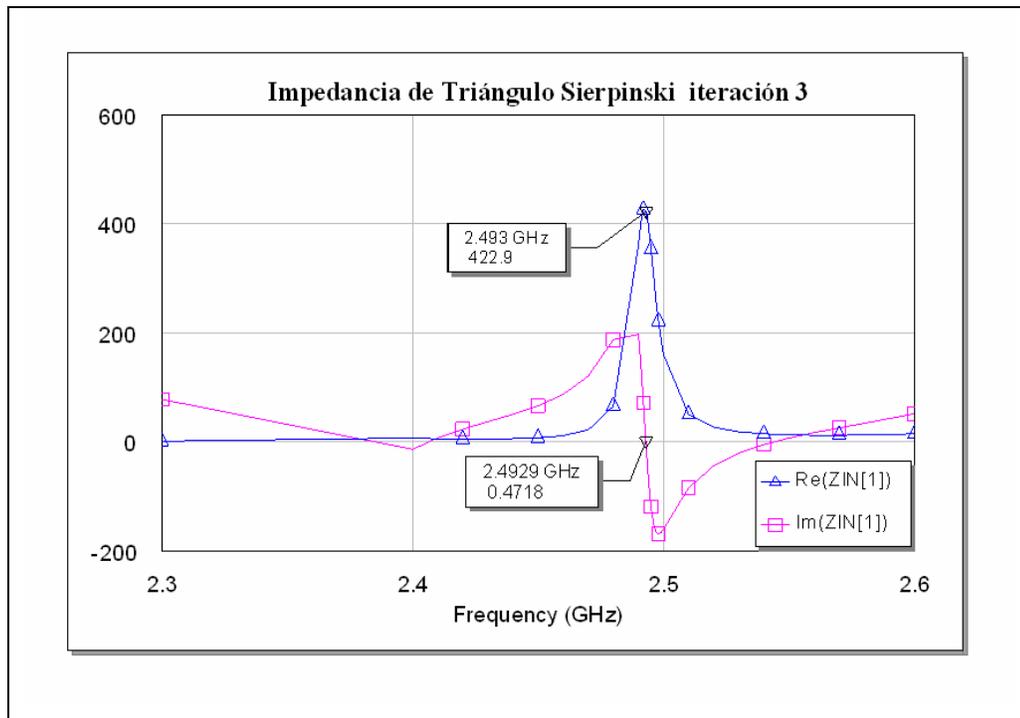


Gráfico 2.3 Resultado simulación impedancia de entrada de la Antena Triángulo Sierpinski iteración 3

Por último la simulación de la iteración tres que se observa en el gráfico 2.3 da como resultado una impedancia de entrada igual a $z_{in} = 422.9\Omega$. Aunque se reduce considerablemente es una impedancia muy alta para alimentarla con tira microstrip.

Los resultados de las simulaciones aunque son una aproximación de la antena real indican que este tipo de antenas con geometría fractal poseen una impedancia muy alta al ser alimentadas en el vértice con una tira microstrip, por lo tanto, no es conveniente alimentar con tira de alimentación microstrip ya que sería una línea muy

delgada difícil de implementar. Debido a lo anterior se eligió como técnica de alimentación la alimentación usando un conector coaxial.

2.5 ANALISIS TEÓRICO DE LA ANTENA FRACTAL

Como se indicó en la sección 2.3 la antena a diseñar tendrá la forma fractal Triángulo de Sierpinski con tres iteraciones, cada iteración será analizada como una antena individual. El análisis teórico de la primera iteración se hará usando el modelo de cavidad, para la iteración 2 y 3 se deducirá un modelo equivalente usando síntesis de redes.

2.5.1 Análisis de la primera iteración. Modelo de Cavidad.

El modelo de cavidad resonante ha sido usado con buenos resultados en el análisis de antenas planares microstrip de varias formas geométricas, círculos, triángulos, rectángulos, etc. [9]. Este modelo nos da una idea aproximada del fenómeno físico en estas estructuras, para los triángulos en particular, encontramos documentos en los cuales se ha usado este modelo para analizar y diseñar antenas, circuladores y resonadores de geometría triangular [10]-[12].

En esta sección se analizará un triángulo isósceles mediante el modelo de cavidad resonante. Este modelo teórico parte de las siguientes consideraciones:

- La región comprendida entre el elemento radiante y el plano de tierra puede ser considerada como una cavidad delimitada por muros magnéticos a lo largo del borde del elemento radiante y por muros eléctricos en la parte superior (elemento radiante) e inferior de la cavidad (plano de tierra).
- La distancia entre el elemento radiante y el plano de tierra es muy pequeña ($h \ll \lambda$), por lo tanto, el Campo Eléctrico \vec{E} solo tiene componente z y es

constante a lo largo de esta coordenada ($\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$), la intensidad de Campo Magnético \vec{H} tiene componentes x-y en la región encerrada por el elemento radiante y el plano de tierra. Por lo tanto sólo se propagan modos TM en la cavidad.

- La corriente eléctrica en el elemento radiante no debe tener componente normal en ningún punto del borde del conductor, esto implica que la componente tangencial de la intensidad de Campo Magnético \vec{H} a lo largo del borde del elemento radiante es despreciable.
- La solución del triángulo isósceles es un subconjunto del caso cuadrado.

El análisis tiene como punto de partida la ecuación vectorial de onda:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - w^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot \vec{E} = -j \cdot w \cdot \mu \cdot \vec{J} \quad \text{ec. 2.02}$$

Usando la identidad vectorial: $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ y debido a que no hay carga ni aglomeraciones en la cavidad, tenemos $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ sustituyendo en la ecuación 2.02 se obtiene

$$-\nabla^2 \vec{E} - w^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_d \cdot \vec{E} = -j \cdot w \cdot \mu \cdot \vec{J} \quad \text{ec. 2.03}$$

Multiplicando por -1, y sustituyendo $k_d = w \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}$ en la ec. 2.03 tenemos:

$$\nabla^2 \vec{E} + k_d^2 \cdot \vec{E} = j \cdot w \cdot \mu \cdot \vec{J} \quad \text{ec.2.04}$$

Como solo hay componente de campo en z, tenemos $\vec{E} = E_z \hat{z}$, además el Laplaciano

es $\nabla^2 E_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$ y $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$. Sustituyendo lo anterior en la

ecuación 2.04, obtenemos la ecuación de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_d^2 \cdot E_z = -j \cdot w \cdot \mu \cdot \vec{J} \quad \text{ec. 2.05}$$

La expresión 2.05 es una ecuación diferencial en derivadas parciales cuya ecuación homogénea es de la forma:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k^2 \cdot E_z = 0 \quad \text{ec. 2.06}$$

La solución de la ecuación homogénea 2.06 es:

$$E_z = (A_1 \cdot \text{Cos}(\alpha \cdot x) + B_1 \cdot \text{Sen}(\alpha \cdot x)) \cdot (A_2 \cdot \text{Cos}(\beta \cdot y) + B_2 \cdot \text{Sen}(\beta \cdot y)) \quad \text{ec. 2.07}$$

De las ecuaciones de Maxwell se obtienen las componentes H_x y H_y :

$$H_x = \frac{j}{w \cdot \mu} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad \text{ec. 2.08}$$

$$H_y = -\frac{j}{w \cdot \mu} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad \text{ec. 2.09}$$

Las constantes A_1 , B_1 , A_2 , B_2 , α , y β de la ec.2.07 se determinan aplicando condiciones de frontera, en las paredes de la cavidad.

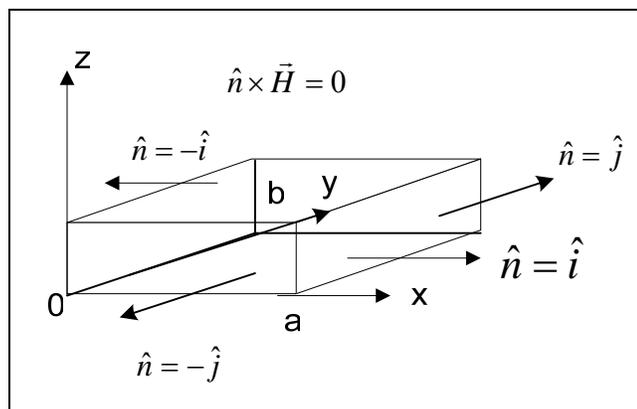


Figura 2.5 Condiciones de Frontera

En la figura 2.6 se observan los vectores normales a cada pared de la cavidad, en las paredes magnéticas laterales de la cavidad se debe cumplir: $\hat{n} \times \vec{H} = 0$

$$\hat{n} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \pm H_x \cdot \hat{k} = \vec{0} \quad \text{ec.2.10}$$

$$\hat{n} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \pm H_y \cdot \hat{k} = \vec{0} \quad \text{ec.2.11}$$

Para que se cumplan condiciones de frontera, $H_x|_{y=0} = 0$ y $H_y|_{x=0} = 0$

$$H_x = \frac{j}{w \cdot \mu} \cdot (A_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + B_1 \cdot \text{Sen}(\alpha \cdot x)) \cdot \beta \cdot (-A_2 \cdot \text{Sen}(\beta \cdot y) + B_2 \cdot \cos(\beta \cdot y)) = 0 \quad \text{ec.2.12}$$

Si evaluamos $y = 0$ en la ecuación 2.12, obtenemos:

$$H_x = \frac{j}{w \cdot \mu} \cdot (A_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + B_1 \cdot \text{Sen}(\alpha \cdot x)) \cdot \beta \cdot (B_2) = 0 \quad \text{ec.2.13}$$

Para que la ecuación 2.13 sea cero, se debe cumplir que $B_2 = 0$.

Si evaluamos $y = b$ en la ec.2.12 y de nuevo buscamos la condición que sea cero,

obtenemos: $\beta = \frac{n \cdot \pi}{b}$.

Igualmente para H_y :

$$H_y = -\frac{j}{w \cdot \mu} \cdot \alpha \cdot (-A_1 \cdot \text{Sen}(\alpha \cdot x) + B_1 \cdot \text{Cos}(\alpha \cdot x)) \cdot (A_2 \cdot \text{Cos}(\beta \cdot y) + B_2 \cdot \text{Sen}(\beta \cdot y)) = 0 \quad \text{ec. 2.14}$$

Si evaluamos en la ecuación 2.14, $x = 0$, $x = a$ y buscamos la condición para que sea cero se obtienen las siguientes constantes

$$B_1 = 0 \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{m \cdot \pi}{a}$$

Sustituyendo las constantes obtenidas en la ecuación 2.07, obtenemos la solución para el campo eléctrico:

$$E_z = \left(A_1 \cdot \text{Cos}\left(\frac{m}{\pi \cdot a} \cdot x\right) \right) \cdot \left(A_2 \cdot \text{Cos}\left(\frac{n \cdot \pi}{b} \cdot y\right) \right) \quad \text{ec. 2.15}$$

Si se propagan varios modos el Campo Eléctrico es:

$$E_z = \sum_m A_m \cdot \text{Cos}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \text{Cos}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \quad \text{ec.2.16}$$

La expresión 2.16 satisface la ecuación 2.06, y es la solución para una antena de forma rectangular, cuyos lados son a y b. A partir de esta solución se construye la solución de la antena triangular. El procedimiento anterior no puede utilizarse para hallar la solución de la antena triangular debido a que la solución para la ecuación diferencial en derivadas parciales se halla aplicando variables separables, en el caso del triángulo no se pueden separar las variables en la diagonal para conocer las

condiciones de frontera. Por lo tanto como se indicó al principio la solución del triángulo se deriva de la solución del rectángulo.

Para obtener la solución del triángulo, se busca una solución que cumpla con la condición de frontera en la diagonal, es decir, la componente tangencial de la intensidad de Campo Magnético \vec{H} debe ser cero en la diagonal de la cavidad cuadrada.

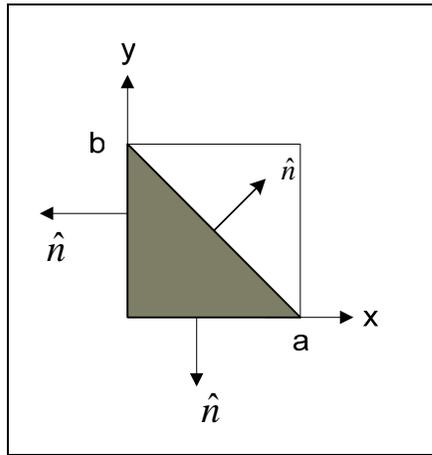


Figura 2.6 Cavidad triangular vectores perpendiculares a los muros magnéticos

Para que se cumpla condición de frontera en la diagonal $\hat{n} \times \vec{H} \Big|_{y=-\frac{b}{a}x+b} = 0$

La solución del triángulo debe satisfacer la expresión:

$$a \cdot H_y - b \cdot H_x = 0 \tag{ec.2.17}$$

Después de sustituir H_x , H_y y hacer un análisis de la expresión 2.17 se determinó que si $m = n$, y además si el triángulo es isósceles $a = b$, la expresión se hace cero, es decir, se cumple la condición de frontera en la diagonal, por lo tanto la solución para la antena triangular es:

$$E_z = \sum_m A_m \cdot \text{Cos}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \text{Cos}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot y}{a}\right) \tag{ec.2.18}$$

$$\text{Si } \Psi_m = \text{Cos}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \text{Cos}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot y}{a}\right) \quad \text{ec.2.19}$$

La solución 2.18 puede expresarse de la forma:

$$E_z = \sum_m Am \cdot \Psi_m \quad \text{ec.2.20}$$

Si sustituimos la solución 2.18 en la ecuación homogénea 2.06 obtenemos:

$$k = k_m = \sqrt{2} \cdot \frac{m \cdot \pi}{a} \quad \text{ec.2.21}$$

Si tomamos las expresiones 2.20, 2.21 y las sustituimos en la ecuación 2.05 obtenemos:

$$\sum_m Am \cdot \Psi_m \cdot (k_d^2 - k_m^2) = j \cdot w \cdot \mu \cdot J_z \quad \text{ec.2.22}$$

Se observa en la ec.2.22 un producto escalar generalizado:

$$\langle f_1, f_2^* \rangle = \int_{x^2} f_1 \cdot f_2 \cdot dx^2 \quad \text{ec.2.23}$$

Haciendo analogía tenemos:

$$\langle \Psi, \Psi^* \rangle = \int_{x^2} \Psi \cdot \Psi \cdot dx^2 \quad \text{ec.2.24}$$

Si multiplicamos la expresión 2.22 por Ψ y luego integramos obtenemos:

$$\iint_{xy} \sum_m Am \cdot \Psi_m \cdot \Psi_m \cdot (k_d^2 - k_m^2) \cdot dx dy = \iint_{xy} j \cdot w \cdot \mu \cdot J_z \cdot \Psi_m \cdot dx dy \quad \text{ec.2.25}$$

Se debe definir la alimentación, como se explicó en la sección 2.4, se usará un conector coaxial, esto indica que el área de alimentación es una circunferencia, sin

embargo debido a que el sistema de coordenadas es cartesiano, se usara un área equivalente a la circunferencia pero de forma cuadrada [13].

La alimentación es equivalente a un área cuadrada, por lo tanto la corriente es de la forma:

$$\bar{J} = \frac{I_0}{(c-b)^2} \cdot H_b^c(x) \cdot H_b^c(y) \cdot H_0^h(z) \hat{z} \quad \text{ec.2.26}$$

Sustituyendo J_z en la expresión 2.25 e integrando adecuadamente se obtiene la expresión para A_m :

$$A_m = j \cdot w \cdot \mu \cdot \frac{4}{a^2} \cdot \frac{I_0}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \frac{1}{(c-b)^2} \cdot \frac{a^2}{m^2 \cdot \pi^2} \cdot \left(\text{Sen}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot c}{a}\right) - \text{Sen}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{a}\right) \right)^2 \quad \text{ec.2.27}$$

Sustituyendo en la expresión 2.18 finalmente queda:

$$E_z = \sum_m j \cdot w \cdot \mu \cdot \frac{4}{a^2} \cdot \frac{I_0}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \frac{1}{(c-b)^2} \cdot \frac{a^2}{m^2 \cdot \pi^2} \cdot \left(\text{Sen}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot c}{a}\right) - \text{Sen}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{a}\right) \right)^2 \cdot \text{Cos}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \text{Cos}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot y}{a}\right) \quad \text{ec.2.28}$$

Donde:

$$k_m = \sqrt{2} \cdot \frac{m \cdot \pi}{a} \quad \text{y} \quad k_d = w \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon_d}$$

Como se desea conocer la impedancia de entrada de la antena, se calcula el campo eléctrico promedio en el área de alimentación, luego la tensión de entrada y finalmente la impedancia:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{\text{area}} \cdot \iint_{xy} E \cdot dx dy \quad \text{ec.2.29}$$

$$V = -h \cdot \langle E_z \rangle \quad \text{ec.2.30}$$

$$Z_{in} = \frac{V}{I_{in}} \quad \text{ec.2.31}$$

Sustituyendo la expresión 2.28 en la ecuación 2.29, luego el resultado se sustituye en 2.30, finalmente se obtiene de la ecuación 2.31 la expresión de la impedancia.

Aplicando representación por expansión de modos resonantes la impedancia de entrada de la antena triangular es:

$$Z_{in} = \frac{-j \cdot \omega \cdot \mu \cdot 4 \cdot h}{k_d^2 \cdot a^2} + \sum_{m=1}^{\infty} -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot h \cdot \frac{4 \cdot a^2}{m^4 \cdot \pi^4} \cdot \frac{1}{(c-b)^4} \cdot \frac{1}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \left(\text{Sen}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot c}{a}\right) - \text{Sen}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{a}\right) \right)^4$$

ec.2.32

A partir de la expresión 2.32 se puede obtener el valor del lado “a” del triángulo Isósceles. Se iguala a cero el denominador de la impedancia de entrada, al hacer esto se está obteniendo el valor de “a” en un punto de resonancia. Haciendo cero el denominador obtenemos:

$$K_d^2 - K_m^2 = 0, \quad (2 \cdot \pi \cdot f \cdot \mu \cdot \varepsilon)^2 = \left(\frac{\sqrt{2} \cdot m \cdot \pi}{a} \right)^2$$

Despejando “a” se obtiene:

$$a = \frac{\sqrt{2} \cdot m}{2 \cdot f \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}}$$

ec. 2.33

El valor de “a” se calcula para que se propague el primer modo de propagación, sin embargo, si m=0 entonces a=0, por lo tanto “a” se calcula para que se propague el segundo modo m=1. Si tenemos que: $f = 2.4GHz$, $\mu = 8.85 \times 10^{-12}$, $\varepsilon_0 = 1.26 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_r = 4.3$. Entonces $a = 4.2 \times 10^{-2} m$.

Cabe destacar que el valor de “a” obtenido es igual al valor que se obtuvo en la sección 2.4, tomando la altura del triángulo como $h = \lambda/2$, por lo tanto las dos formas son válidas para dimensionar la antena.

Como se explicó en la sección 1.2.1 los responsables de la radiación son los campos en el borde del elemento radiante (Fringing fields) para tomarlos en cuenta en el modelo de cavidad se calculará un área del patch ligeramente mayor, existen muchas

formulas para calcular esta área [14], para este trabajo se eligió la siguiente expresión dada por Dahele y Lee [15]:

$$a_{eff} = a + \frac{h}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \text{ec. 2.34}$$

En la expresión 2.34, a es el lado del triángulo, y a_{eff} es el lado ligeramente mayor para tomar en cuenta los “Fringing fields”, por lo tanto el lado del triángulo definitivo

$$\text{es: } a_{eff} = 4.2 \times 10^{-2} + \frac{1.5 \times 10^{-3}}{\sqrt{4.3}} = 4.2723 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Luego de obtener las expresiones correspondientes al Campo Eléctrico ec.2.18, la intensidad de Campo Magnético ec.2.08, ec.2.09, la impedancia de entrada de la antena triangular ec.2.32, y las dimensiones de la antena se usará el software Matemática®, para observar los resultados obtenidos de forma gráfica.

Inicialmente se graficaron los modos de propagación del Campo Eléctrico dentro de la cavidad, esto se hizo de dos maneras, primero se graficaron curvas de nivel acotadas en las componentes x-y por la paredes de la cavidad, igualmente se graficaron las curvas de nivel en 3-D. Los resultados se encuentran a continuación:

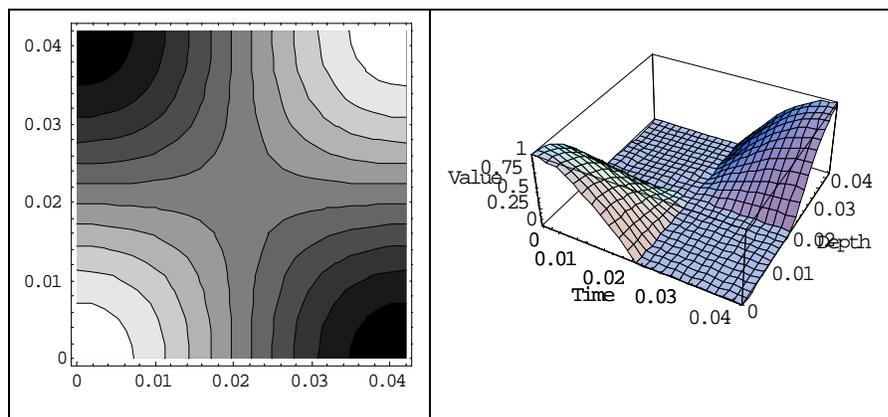


Figura 2.7 Modo de propagación del campo eléctrico $m=1$

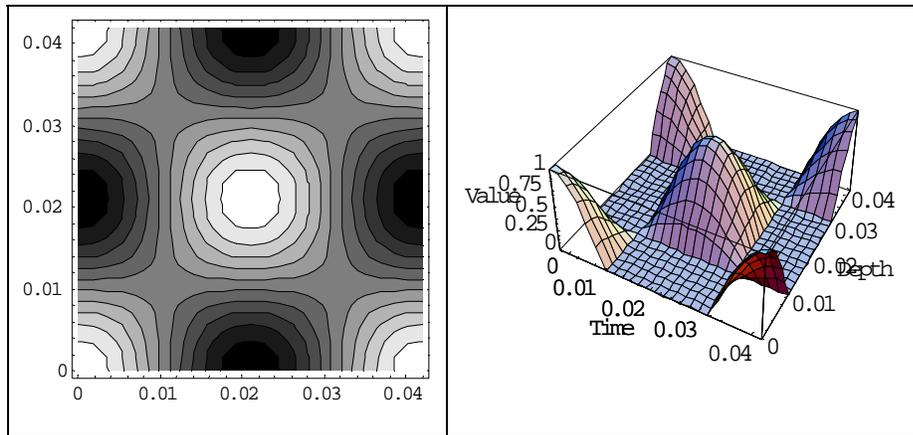


Figura 2.8 Modo de propagación del campo eléctrico $m=2$

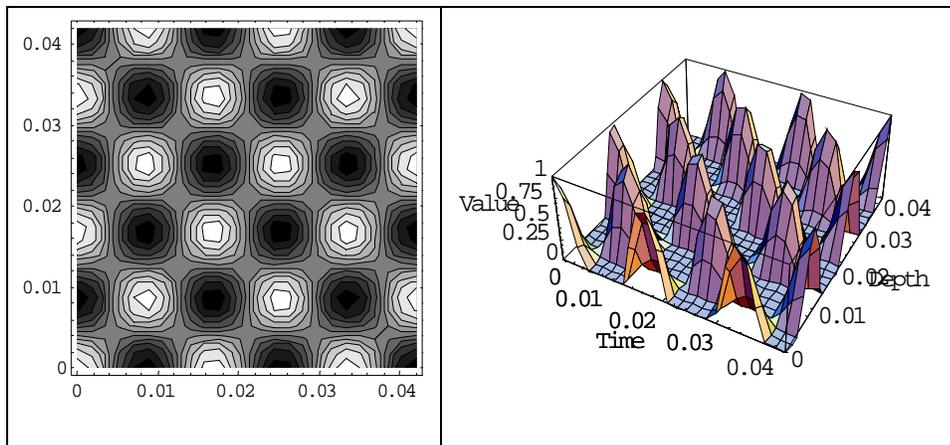


Figura 2.9 Modo de propagación del campo eléctrico $m=5$

En las figuras 2.7, 2.8 y 2.9 se observan algunos modos de propagación del campo eléctrico dentro de la cavidad, en las curvas de nivel las zonas más claras corresponden a las cotas más altas. La antena se diseña para que se propague un solo modo, sin embargo, se propagan varios modos como aparece en la solución 2.16, debido a que en realidad hay múltiples reflexiones dentro de la cavidad.

Con el software Matemática® se pudo verificar la solución de la cavidad triangular, se debe cumplir que el campo \vec{H} tangencial a la diagonal del triángulo debe ser cero. A continuación se observan las líneas de campo de \vec{H} dentro de la cavidad.

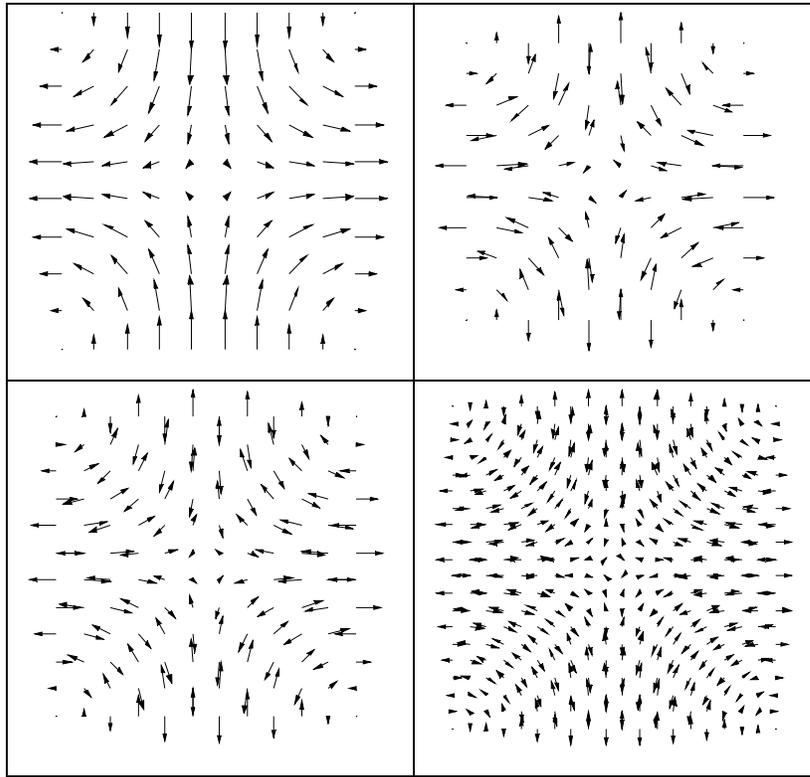


Figura 2.10 líneas de campo \vec{H} dentro de la cavidad, las líneas corresponden a los modos: $m=1$, $m=8$, $m=10$ y $m=20$

En la figura 2.10 se observan como las líneas de campo de \vec{H} se alinean de manera perpendicular a la diagonal, esto corrobora la solución de la antena triangular ya que se cumplen las condiciones de frontera en las tres paredes que conforman la cavidad.

Finalmente usando el paquete Matemática® se obtuvo la gráfica de la impedancia de entrada en función de la frecuencia, la cual observamos en el gráfico 2.4. Como se determinó en la expresión 2.32 la impedancia es compleja y tiene parte real y parte imaginaria. El propósito cuando se diseña una antena es que ella resuene en la frecuencia de interés, por lo tanto en esa frecuencia la parte imaginaria de la impedancia debe ser cero y la parte real debe ser máxima, esto lo observamos en el gráfico 2.4, del cual se deduce que la antena resuena en una frecuencia cercana a 2.4 GHz como era de esperarse.

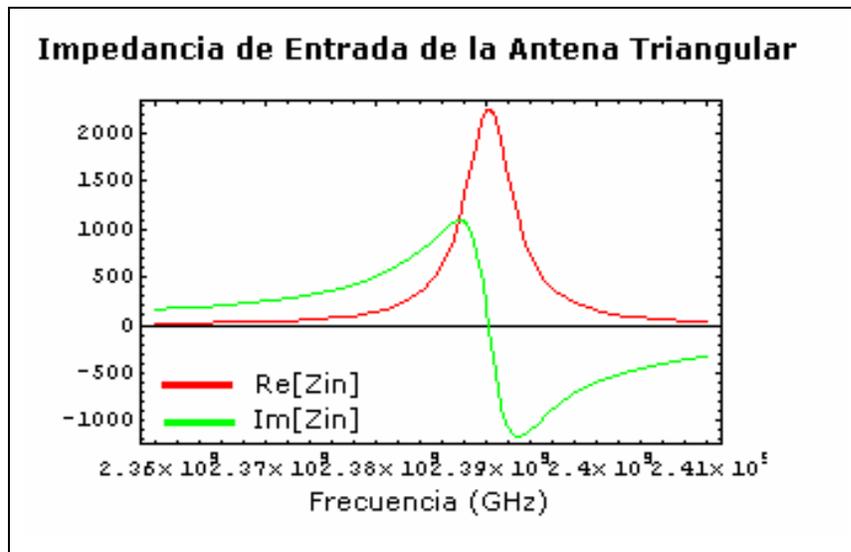


Gráfico 2.4 Impedancia de Entrada de la Antena Triángulo de Sierpinski iteración 1.

En el anexo 1 y 2 se encuentra el archivo de Matemática® realizado para obtener las figuras 2.7, 2.8, 2.9, 2.10 y el gráfico 2.4.

Como se indicó anteriormente se asume que la cavidad no tiene pérdidas, y los campos están confinados dentro de la cavidad, ésta presunción se hace para simplificar los cálculos, sin embargo la cavidad posee pérdidas, de otra manera no habría radiación. Para introducir las pérdidas en la impedancia de entrada, se introduce una constante dieléctrica compleja. El cálculo del valor de la parte imaginaria de esta constante es laborioso de calcular analíticamente. Para determinar este valor, se usará un paquete de simulación que nos permita conocer el comportamiento de la antena. Con los valores de impedancia suministrados por el simulador, se ajustará el valor imaginario de la constante dieléctrica compleja. Este procedimiento se realizará en un capítulo posterior.

Por último cabe destacar que este valor imaginario de la constante dieléctrica sólo afecta el valor real de la impedancia, la parte imaginaria de la impedancia compleja nos indica las frecuencias de resonancia y no se ve afectada por el ajuste de la constante dieléctrica. Para el cálculo de la impedancia en función de la frecuencia del gráfico 2.4 se usó una constante dieléctrica cuyo valor imaginario es $0.0022 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$.

este valor es estimado para obtener el gráfico no es un valor exacto, para este cálculo también se asumió que se propagan 30 modos.

2.5.2 Análisis de la segunda iteración. Modelo equivalente mediante síntesis de redes.

En la sección anterior se analizó teóricamente la iteración 1 del fractal triángulo de Sierpinski, para analizar la iteración dos se realizarán dos procedimientos. Primero se caracterizará cada triángulo que conforma la geometría como una red de tres puertos, y se calculará la matriz de impedancia de cada red usando el modelo de cavidad. El segundo procedimiento consiste en obtener una matriz equivalente mediante síntesis de redes. El objetivo de caracterizar cada triángulo como una red, es que permite reducir el sistema a uno equivalente para cada iteración, este sistema equivalente permite conocer la impedancia de entrada de la antena.

Debido a que el fractal se obtiene de manera recursiva puede esperarse un modelo recursivo que describa el comportamiento de cada nueva iteración, existen documentos que ya han usado este enfoque y han comprobado que el comportamiento multibanda está relacionado con la naturaleza fractal de la estructura, [16], [17]. Sin embargo, los modelos iterativos que describen estos documentos usan como punto de partida la matriz de parámetros de dispersión de la red (matriz S) correspondiente a la primera iteración, otros modelos iterativos hacen uso de una teoría más compleja para obtener el modelo equivalente, [18] haciendo uso de álgebra lineal y tensores.

Para este estudio se usará un planteamiento diferente, se calculará la matriz de impedancia correspondiente a cada triángulo, luego se hallará la red equivalente de una configuración de redes de tres puertos interconectadas.

Esta forma de analizar la antena ofrece una manera sencilla y alternativa a los análisis electromagnéticos, los cuales son complicados y demandan tiempo de computación y gran cantidad de memoria.

Por último cabe destacar que estos modelos equivalentes son muy útiles para la fase de diseño cuando es necesaria una rápida predicción del comportamiento de la antena fractal.

2.5.2.1 Caracterización de los triángulos que conforman el triángulo de Sierpinski, en redes de tres puertos.

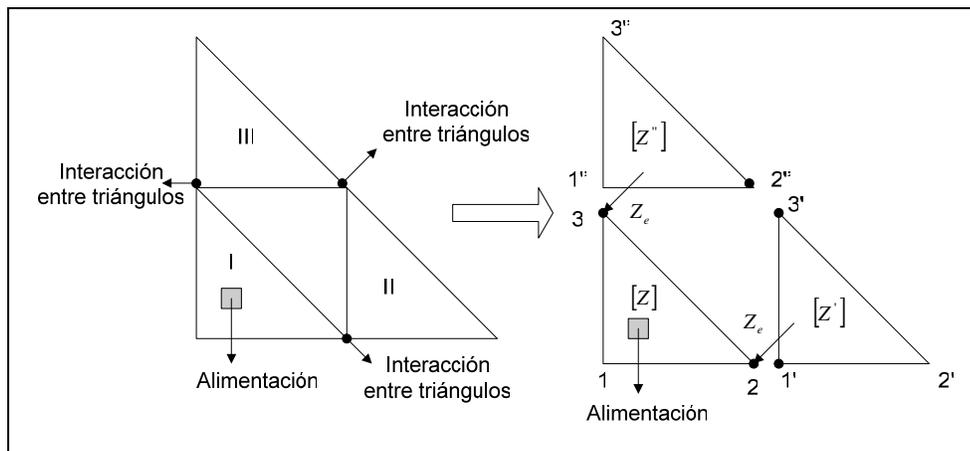


Figura 2.11 Iteración 2, cada triángulo es modelado como una red de tres puertos

Como se observa en la figura 2.11 cada triángulo identificado por los números I, II, III es una red de tres puertos donde cada puerto está identificado por un número. También se observan los puertos que coinciden e interactúan.

A continuación se explica el procedimiento para la obtención de la matriz de impedancia de cada triángulo.

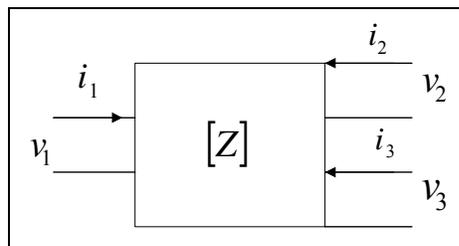


Figura 2.12 Red de tres puertos

En la figura 2.12 se observa una red de tres puertos, en ella cada tensión de entrada es función de las corrientes de cada puerto como se observa en la siguiente expresión:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 + z_{13}I_3 \quad \text{ec.2.35}$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 + z_{23}I_3 \quad \text{ec.2.36}$$

$$V_3 = z_{31}I_1 + z_{32}I_2 + z_{33}I_3 \quad \text{ec.2.37}$$

La matriz de impedancia es de la forma:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ec.2.38}$$

Donde $z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0, I_3=0}$, $z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0, I_3=0}$, $z_{13} = \left. \frac{V_1}{I_3} \right|_{I_1=0, I_2=0}$, y así sucesivamente...

En la figura 2.11 observamos que los vértices del triángulo I están identificados por los números 1, 2, y 3, cada uno representa un puerto. El puerto 1 corresponde a la alimentación del conector coaxial, los puertos 2 y 3 corresponden a los puntos de interacción con los otros triángulos, se supondrá que en los puertos 2 y 3 está colocada una fuente puntual (Delta de Dirac), que representan la interacción y el flujo de corriente entre puertos.

En la sección anterior se calculó la impedancia de entrada de una antena triangular, usando el método de cavidad, se partirá de esta deducción para calcular las componentes de la matriz de impedancia de la red I.

En este caso se desea obtener V_1 , V_2 , y V_3 en función de I_1 , I_2 , y I_3 .

De la ecuación 2.25 tenemos:

$$\iint_{xy} \sum_m A_m \cdot \Psi_m \cdot \Psi_m \cdot (k_d^2 - k_m^2) \cdot dx dy = \iint_{xy} j \cdot w \cdot \mu \cdot J_z \cdot \Psi_m \cdot dx dy \quad \text{ec.2.25}$$

Donde J_z en la red I es de la forma:

$$J_z = J_{1z} + J_{2z} + J_{3z} \quad \text{ec.2.39}$$

$$J_{1z} = \frac{I_1}{(c-b)^2} \cdot H_b^c(x) \cdot H_b^c(y) \cdot H_0^h(z) \quad \text{ec.2.40}$$

$$J_{2z} = I_2 \cdot \delta(y) \cdot \delta(x-a) \cdot H_0^h(z) \quad \text{ec.2.41}$$

$$J_{3z} = I_3 \cdot \delta(x) \cdot \delta(y-a) \cdot H_0^h(z) \quad \text{ec.2.42}$$

$$J_z = \frac{I_1}{(c-b)^2} \cdot H_b^c(x) H_b^c(y) H_0^h(z) + I_2 \delta(y) \delta(x-a) H_0^h(z) + I_3 \delta(x) \delta(y-a) H_0^h(z) \quad \text{ec.2.43}$$

Si sustituimos la expresión 2.43 en la ecuación 2.25, e integramos obtenemos el término A_m :

$$A_m = jw\mu \frac{1}{(c-b)^2} \frac{1}{k_d^2 - k_m^2} \frac{4}{m^2 \cdot \pi^2} \left(\text{Sen}\left(\frac{m\pi c}{a}\right) - \text{Sen}\left(\frac{m\pi b}{a}\right) \right)^2 I_1 + jw\mu \text{Cos}(m\pi) I_2 + jw\mu \text{Cos}(m\pi) I_3 \quad \text{ec.2.44}$$

De la ecuación 2.18, obtenemos el campo eléctrico, luego calculamos el promedio del campo en el punto de alimentación en este caso en el puerto 1 usando la expresión 2.29, después se calcula V_1 , a partir de la ecuación 2.30, el resultado nos da una expresión en función de las tres corrientes, allí obtenemos las impedancias. El mismo proceso se repite para V_2 y V_3 , solo que el promedio del campo se calcula en los puertos 2 y 3 respectivamente.

Si analizamos las componentes de la matriz que se obtienen notamos que hay simetría entre los puertos que conforman la red I, por lo tanto, se cumple:

$$\begin{aligned} Z_{11} \\ Z_{12} = Z_{13} = Z_{21} = Z_{31} \\ Z_{22} = Z_{23} = Z_{32} = Z_{33} \end{aligned} \quad \text{ec.2.45}$$

Finalmente siguiendo el procedimiento anterior y tomando en cuenta la simetría entre puertos, obtenemos las siguientes impedancias que componen la matriz de la red I:

$$Z_{11} = \sum_{m=1} -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \frac{1}{(c-b)^4} \cdot \frac{4 \cdot a^2}{m^4 \cdot \pi^4} \cdot \frac{h}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \left(\text{Sen}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot c}{a}\right) - \text{Sen}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{a}\right) \right)^4 \quad \text{ec.2.46}$$

$$Z_{12} = \sum_{m=1} -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \frac{1}{(c-b)^2} \cdot \frac{4}{m^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{h}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \left(\text{Sen}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot c}{a}\right) - \text{Sen}\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{a}\right) \right)^2 \cdot \text{Cos}(m \cdot \pi) \quad \text{ec.2.47}$$

$$Z_{22} = \sum_{m=1} -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \frac{4}{a^2} \cdot \frac{h}{(k_d^2 - k_m^2)} \quad \text{ec.2.48}$$

El cálculo de la matriz de impedancia de la red II es igual a la anterior, solo que como se observa en la figura 2.10 esta red no esta alimentada, hay un punto de interacción con la red I, por el puerto 1', esta interacción al ser analizada la red II como una red individual se interpreta como una fuente puntual (delta de Dirac).

Esta fuente indica que allí hay un flujo de corriente, ya que de la red I fluye corriente a la red II, a través del puerto 1'.

Igual que la red I, la matriz de impedancia de la red II es de la forma:

$$Z' = \begin{bmatrix} z'_{11} & z'_{12} & z'_{13} \\ z'_{21} & z'_{22} & z'_{23} \\ z'_{31} & z'_{32} & z'_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ec.2.49}$$

Se observa que se diferencia la matriz de la red II usando un apóstrofe, todos los puertos y las corrientes en esta red poseen apóstrofe para ser diferenciados.

En esta red al igual que la red I, hay simetría en los puertos. Se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} z'_{12} &= z'_{13} = z'_{21} = z'_{31} \\ z'_{11} &= z'_{22} = z'_{23} = z'_{32} = z'_{33} \end{aligned} \quad \text{ec.2.50}$$

Por lo tanto las impedancias que conforman la matriz de la red II son:

$$Z'_{11} = \sum_{m=1} -j \cdot w \cdot \mu \cdot \frac{4}{a^2} \cdot \frac{h}{(k_d^2 - k_m^2)} \quad \text{ec.2.51}$$

$$Z'_{12} = \sum_{m=1} -j \cdot w \cdot \mu \cdot \frac{4}{a^2} \cdot \frac{h}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \text{Cos}(m \cdot \pi) \quad \text{ec.2.52}$$

Para la red III se sigue el mismo procedimiento, luego de un análisis se comprueba que la red II y la red III, son idénticas por lo tanto:

$$V_1'' = z''_{11} I_1'' + z''_{12} I_2'' + z''_{13} I_3'' \quad \text{ec.2.53}$$

$$V_2'' = z''_{21} I_1'' + z''_{22} I_2'' + z''_{23} I_3'' \quad \text{ec.2.54}$$

$$V_3'' = z''_{31} I_1'' + z''_{32} I_2'' + z''_{33} I_3'' \quad \text{ec.2.55}$$

$$Z''_{11} = \sum_{m=1} -j \cdot w \cdot \mu \cdot \frac{4}{a^2} \cdot \frac{h}{(k_d^2 - k_m^2)} \quad \text{ec.2.56}$$

$$Z''_{12} = \sum_{m=1} -j \cdot w \cdot \mu \cdot \frac{4}{a^2} \cdot \frac{h}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \text{Cos}(m \cdot \pi) \quad \text{ec.2.57}$$

$$Z''_{22} = \sum_{m=1} -j \cdot w \cdot \mu \cdot \frac{4}{a^2} \cdot \frac{h}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \text{Cos}^2(m \cdot \pi) \quad \text{ec.2.58}$$

2.5.2.2 Modelo equivalente, obtención de impedancia de entrada de la antena triángulo de Sierpinski iteración 2.

En la sección anterior, se obtuvo la matriz de impedancia de cada triángulo que conforma la iteración dos del fractal triángulo de Sierpinski, ahora cada triángulo es una red de tres puertos, y están interconectados como se observa en la figura 2.12. La red que se aprecia en la figura 2.12 no esta en paralelo o en serie, por lo tanto no se pueden aplicar los teoremas conocidos para síntesis de redes.

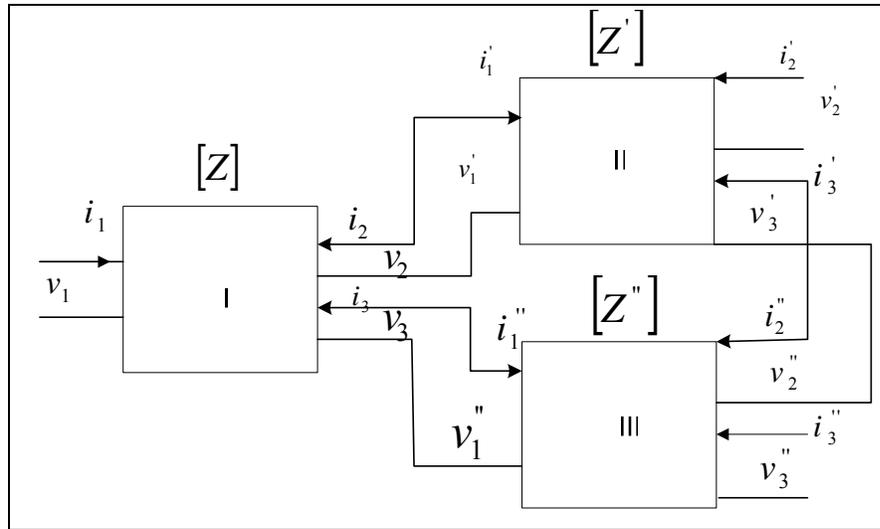


Figura 2.13 Modelo equivalente Triángulo Sierpinski iteración 2

Para conocer la red equivalente se plantearán las ecuaciones de cada red, y algunas relaciones que suceden entre los puertos, luego se sustituirá apropiadamente para despejar el término que corresponde a la impedancia de entrada en el puerto 1 de la red I.

En la figura 2.13 se observa que los puertos de interacción son 2 y 1', 3 y 1'', 3' y 2'', en estos puertos se van a definir impedancias las cuales son la relación entre la tensión en el puerto y la corriente de entrada al puerto, se obtienen las siguientes expresiones:

$$Z_{equi} = \frac{V_1}{I_1} \tag{ec.2.59}$$

$$z_c = \frac{-V_2}{I_2} = \frac{V_1'}{I_1'} \quad \text{ec.2.60}$$

$$z_c = \frac{-V_3}{I_3} = \frac{V_1''}{I_1''} \quad \text{ec.2.61}$$

$$z_i = \frac{V_3'}{I_3'} = \frac{-V_2''}{I_2''} \quad \text{ec.2.62}$$

Notamos que la impedancia en el puertos 2, 1' es igual a la impedancia en los puertos 3,1'', esto se debe a la simetría del fractal. También cabe destacar que la corriente en los puertos 2' y 3'' es cero ya que allí no hay interacción con ninguna red sin embargo la tensión en estos puntos no es cero. Por lo tanto:

$$I_2' = 0 \quad \text{ec.2.63}$$

$$V_2' \neq 0 \quad \text{ec.2.64}$$

$$I_3'' = 0 \quad \text{ec.2.65}$$

$$V_3'' \neq 0 \quad \text{ec.2.66}$$

Para la red I tenemos:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 + z_{13}I_3 \quad \text{ec.2.35}$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 + z_{23}I_3 \quad \text{ec.2.36}$$

$$V_3 = z_{13}I_1 + z_{32}I_2 + z_{33}I_3 \quad \text{ec.2.37}$$

Si sustituimos las expresiones 2.59, 2.60 y 2.61 en las ecuaciones 2.35, 2.36 y 2.37 respectivamente se obtiene:

$$z_{equi} = z_{11} + z_{12} \frac{I_2}{I_1} + z_{13} \frac{I_3}{I_1} \quad \text{ec.2.67}$$

$$-z_c \cdot \frac{I_2}{I_1} = z_{21} + z_{22} \frac{I_2}{I_1} + z_{23} \frac{I_3}{I_1} \quad \text{ec.2.68}$$

$$-z_c \cdot \frac{I_3}{I_1} = z_{31} + z_{32} \frac{I_2}{I_1} + z_{33} \frac{I_3}{I_1} \quad \text{ec.2.69}$$

Se puede notar que las ecuaciones 2.67, 2.68 y 2.69 forman un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, z_{equi} , I_2/I_1 , I_3/I_1 , y Z_c . Las incógnitas I_2/I_1 y I_3/I_1 , se hallan de las expresiones:

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{z_{31} + z_{32} \frac{I_2}{I_1}}{-z_c - z_{33}} \quad \text{ec.2.70}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21} \cdot z_c - z_{21} \cdot z_{33} + z_{23} \cdot z_{31}}{\left(z_c^2 + z_{33} \cdot z_c + z_{22} \cdot z_c + z_{22} \cdot z_{33} - z_{23} \cdot z_{32}\right)} \quad \text{ec.2.71}$$

Para hallar una expresión de Z_c , se analiza la red II.

$$V_1' = z_{11}' I_1' + z_{12}' I_2' + z_{13}' I_3' \quad \text{ec.2.72}$$

$$V_2' = z_{21}' I_1' + z_{22}' I_2' + z_{23}' I_3' \quad \text{ec.2.73}$$

$$V_3' = z_{31}' I_1' + z_{32}' I_2' + z_{33}' I_3' \quad \text{ec.2.74}$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.60, y 2.63, en las expresiones 2.72, 2.73, y 2.74 se obtiene:

$$z_c = z_{11}' + z_{13}' \frac{I_3'}{I_1'} \quad \text{ec.2.75}$$

$$\frac{V_2'}{I_1'} = z_{21}' + z_{23}' \frac{I_3'}{I_1'} \quad \text{ec.2.76}$$

$$z_i' \cdot \frac{I_3'}{I_1'} = z_{31}' + z_{33}' \frac{I_3'}{I_1'} \quad \text{ec.2.77}$$

Con las ecuaciones 2.75 y 2.77, tenemos un sistema de dos ecuaciones tres incógnitas

Z_c , $\frac{I_3'}{I_1'}$, y Z_i . Las incógnitas Z_c y $\frac{I_3'}{I_1'}$, se obtienen de las expresiones:

$$z_c = z_{11}' + z_{13}' \frac{I_3'}{I_1'} \quad \text{ec.2.78}$$

$$\frac{I_3'}{I_1'} = \frac{z_{31}'}{z_i' - z_{33}'} \quad \text{ec.2.79}$$

Para obtener la expresión de Z_i , se analiza la red III:

$$V_1'' = z_{11}'' I_1'' + z_{12}'' I_2'' + z_{13}'' I_3'' \quad \text{ec.2.80}$$

$$V_2'' = z_{21}'' I_1'' + z_{22}'' I_2'' + z_{23}'' I_3'' \quad \text{ec.2.81}$$

$$V_3'' = z_{31}'' I_1'' + z_{32}'' I_2'' + z_{33}'' I_3'' \quad \text{ec.2.82}$$

Si en las ecuaciones 2.80, 2.81 y 2.82 sustituimos las ecuaciones 2.61 y 2.62 obtenemos las siguientes expresiones:

$$z_c = z_{11}'' + z_{12}'' \frac{I_2''}{I_1''} \quad \text{ec.2.83}$$

$$-z_i \frac{I_2''}{I_1''} = z_{21}'' + z_{22}'' \frac{I_2''}{I_1''} \quad \text{ec.2.84}$$

$$\frac{V_3''}{I_1''} = z_{31}'' + z_{32}'' \frac{I_2''}{I_1''} \quad \text{ec.2.85}$$

De las ecuaciones 2.84 y 2.83 obtenemos una expresión de Z_i en función de Z_c :

$$z_i = \frac{z'_{11} \cdot z'_{22} - z'_{12} \cdot z'_{21} - z_c \cdot z'_{22}}{z_c - z'_{11}} \quad \text{ec.2.86}$$

Si la sustituimos en la expresión 2.79 y el resultado lo sustituimos a su vez en la expresión 2.78. Obtenemos la siguiente ecuación:

$$Z_c = \frac{Z'_{11} \cdot Z'_{33} - Z'_{13} \cdot Z'_{31} + Z'_{11} \cdot Z'_{22} - Z'_{12} \cdot Z'_{21}}{Z'_{33} + Z'_{22}} \quad \text{ec.2.87}$$

En resumen tenemos el siguiente sistema:

$$z_{equi} = z_{11} + z_{12} \frac{I_2}{I_1} + z_{13} \frac{I_3}{I_1} \quad \text{ec.2.67}$$

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{z_{31} + z_{32} \frac{I_2}{I_1}}{-z_c - z_{33}} \quad \text{ec.2.70}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21} \cdot z_c - z_{21} \cdot z_{33} + z_{23} \cdot z_{31}}{(z_c^2 + z_{33} \cdot z_c + z_{22} \cdot z_c + z_{22} \cdot z_{33} - z_{23} \cdot z_{32})} \quad \text{ec.2.71}$$

$$Z_c = \frac{Z'_{11} \cdot Z'_{33} - Z'_{13} \cdot Z'_{31} + Z'_{11} \cdot Z'_{22} - Z'_{12} \cdot Z'_{21}}{Z'_{33} + Z'_{22}} \quad \text{ec.2.87}$$

Las ecuaciones 2.67, 2.70, 2.71 forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Debido a que resolver el sistema planteado es laborioso se usará el software Matemática®, para obtener una expresión final de z_{equi} , ésta impedancia como ya se indicó es la impedancia de entrada de la antena y nos ayudará a conocer el

comportamiento de la antena para un rango dado de frecuencia. En el gráfico 2.5 se observa la impedancia en función de la frecuencia de la iteración 2 del triángulo de Sierpinski, podemos notar dos frecuencias de resonancia una cercana a 1GHz y la otra cercana a 2.4 GHz, en este caso el modelo teórico predice efectivamente las dos bandas correspondientes a la iteración 2. Al igual que la iteración 1 se ajustará posteriormente el valor imaginario de la impedancia compleja para determinar la parte real de la impedancia compleja.

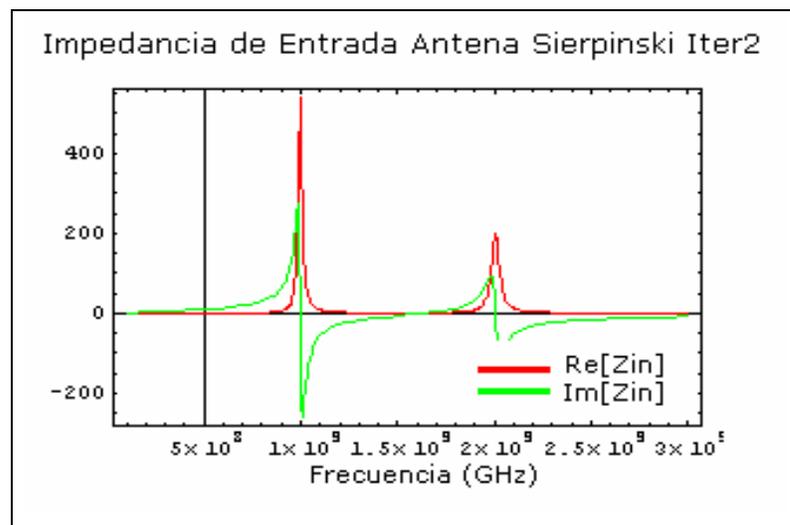


Gráfico 2.5 Impedancia de Entrada de la Antena Triángulo de Sierpinski iteración 2.

2.5.3 Análisis de la tercera iteración. Modelo equivalente mediante síntesis de redes.

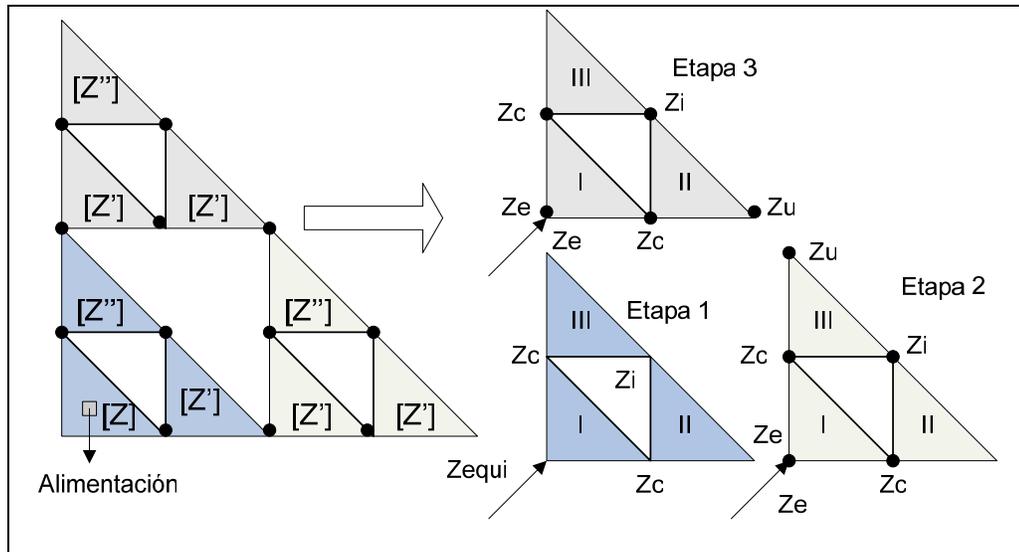


Figura 2.14 Triángulo de Sierpinski Iteración 3, conformada por 3 configuraciones de la iteración 2.

Para analizar la iteración 3, se divide el análisis en tres etapas como indica la figura 2.14, cada color identifica cada etapa. A pesar de que el problema se divide en tres etapas el análisis de cada etapa es el mismo análisis que se hizo para la iteración 2 en la sección 2.5.2. Por lo tanto, el análisis se simplifica aplicando el mismo grupo de ecuaciones utilizadas en la iteración 2. La diferencia entre etapas radica en la impedancia que se define en cada puerto. En la figura 2.14 cada puerto de interés fue identificado con una impedancia, tomando en cuenta esta asignación y utilizando la notación de la figura 2.10, se obtienen las relaciones entre puertos, las cuales serán sustituidas en las ecuaciones de cada red, luego resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene finalmente la impedancia entrada Z_{equi} . Debido a que este procedimiento ya fue explicado en la sección anterior, las ecuaciones obtenidas y el proceso de sustitución será descrito en el anexo 3.

Se usó el paquete Matemática® para resolver el sistema de ecuaciones, y obtener la impedancia en función de la frecuencia, en el anexo 4 se encuentra el cálculo, sin embargo, los resultados no fueron los esperados, ya que no se observan las tres frecuencias de resonancia que deberían generarse, además existe una incongruencia

ya que aparece una impedancia negativa lo cual no es posible. Este resultado a pesar de no ser aceptable no implica que el análisis planteado deba ser descartado, posiblemente por el numero de ecuaciones algebraicas involucradas se genere algún error que no fue detectado, seria recomendable para las iteraciones sucesivas en lugar de hacer sustituciones algebraicas, elaborar un algoritmo que realice el cálculo iterativo.

2.6 IMPLEMENTACIÓN

En esta fase del diseño se establece los materiales involucrados en la fabricación. Diferentes tipos de dieléctricos pueden ser usados para este diseño, en este caso solo se encuentra disponible substrato dieléctrico FR4 cuya constante dieléctrica es $\epsilon_r = 4.3$ (Una hoja de datos se encuentra en el anexo 5). El espesor del dieléctrico disponible es 1.5 mm. Por lo tanto no hay flexibilidad en el tipo ni en el espesor del material que se esta usando. El conector usado será un conector tipo N, en estos casos también es usado el conector SMA, sin embargo, debido al costo y a la facilidad de adquisición se opto por un conector N. Cabe destacar que si fuera posible contar con los dos conectores seria recomendable usar el conector SMA ya que la sonda de alimentación es mas pequeña esto genera menos efectos indeseables en el punto de alimentación, tales como radiación espuria y discontinuidades.

CAPITULO III

3.1 DISEÑO DE LA ANTENA FRACTAL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI MODIFICADA

La segunda antena a diseñar es una configuración similar al Triángulo de Sierpinski, solo que en lugar de triángulos esta constituida por segmentos circulares. Esta nueva configuración será denominada Triángulo de Sierpinski modificado.

Las fases de diseño serán las mismas que en el capítulo anterior, primero se hará un análisis teórico de la iteración 1 aplicando el modelo de cavidad, luego se caracterizará cada segmento circular como una red de tres puertos, finalmente se hallará un modelo equivalente para la iteración 2 y 3.

3.2 CONSIDERACIONES DE DISEÑO

La antena Fractal a construir debe satisfacer los siguientes parámetros:

- La impedancia nominal del puerto de entrada será de 50Ω (en la frecuencia de resonancia).
- Para la fabricación se usará tecnología microstrip, se usará una lámina con sustrato de material FR4 ($\epsilon_r = 4.4$).
- Para el diseño se usará geometría Fractal.
- La antena Fractal será multibanda con al menos dos bandas de operación.
- La ganancia de la antena será de al menos 3dBi.
- Una de las frecuencias de Resonancia de la antena será 2.4GHz.
- La antena debe poseer un $VSWR < 2$ para la banda nominal de operación.

3.3 FORMA FRACTAL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI MODIFICADA

El primer paso en el proceso de diseño es elegir una forma fractal para la segunda antena la cual debe ser multibanda y compacta. Debido a que se eligió el modelo de cavidad para analizar teóricamente la antena anterior, era deseable elegir una forma que pudiera ser analizada bajo el mismo modelo, por lo tanto, debido a que las antenas circulares ya han sido estudiadas y analizadas [19] se eligió una antena formada por segmentos circulares. En el capítulo anterior se eligió el fractal Triángulo de Sierpinski debido a que favorece el comportamiento multibanda, y su geometría es sencilla para analizar. Así que se eligió para esta segunda antena una configuración derivada del Triángulo de Sierpinski. Esta nueva configuración en lugar de triángulos esta constituida por segmentos de circunferencia.

3.4 TÉCNICA DE ALIMENTACIÓN

Para esta antena se elegirá como técnica de alimentación un conector coaxial. Esta técnica se eligió debido a que no es recomendable usar una tira microstrip debido a que la antena posee una impedancia muy alta.

3.5 ANÁLISIS TEORICO DE LA ANTENA FRACTAL

Como se indicó en la sección 3.3 la antena a diseñar tendrá la forma fractal Triángulo de Sierpinski modificado se realizarán tres iteraciones, cada iteración será analizada como una antena individual. El análisis teórico de la primera iteración se hará usando el modelo de cavidad, para la iteración 2 y 3 se usará el modelo equivalente que se explicó en el capítulo II.

3.5.1 Análisis de la primera iteración. Modelo de Cavidad.

En el capítulo II se explicó el modelo de cavidad así que en este caso se procederá directamente con el análisis. Debido a que la forma geométrica es un segmento de circunferencia es conveniente usar en este análisis coordenadas cilíndricas.

En la figura 3.1 se observa la cavidad circular:

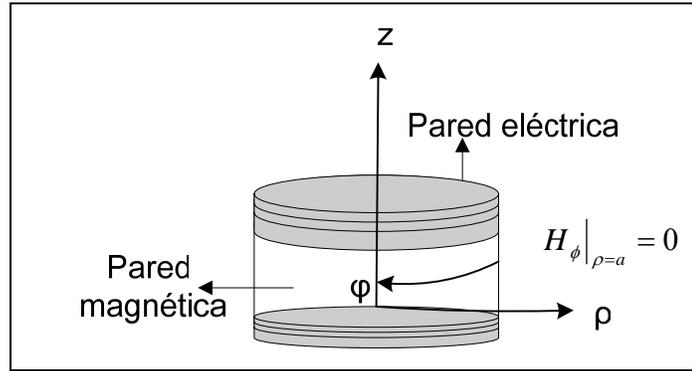


Figura 3.1 Cavidad circular

Partiendo de la expresión de tenemos:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot E_z = 0 \quad \text{ec.3.1}$$

$$E_z = A_{mv} \cdot J_v(h \cdot \rho) \cdot \text{Cos}(v \cdot \phi) \quad \text{ec.3.2}$$

$$H_\rho = \frac{1}{h^2} \cdot \left[j \frac{w \cdot \varepsilon}{\rho} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right] \quad \text{ec.3.3}$$

$$H_\phi = \frac{1}{h^2} \cdot \left[-j \cdot w \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right] \quad \text{ec.3.4}$$

Para que se cumpla la condición de frontera en la cavidad circular se debe cumplir la

condición $H_\phi|_{\rho=a} = 0$:

$$H_\phi = \frac{-1}{h^2} \cdot j \cdot w \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot A_{mv} \cdot J'_v(h \cdot a) \cdot h \cdot \text{Cos}(v \cdot \phi) = 0 \quad \text{ec.3.5}$$

Para que la expresión 3.5 sea cero se debe cumplir:

$$J'_{mv}(h \cdot a) = 0 \quad \text{ec.3.6}$$

Si denotamos los ceros de la derivada de la función de Bessel como S_{mv} se obtiene una expresión para h.

$$h = \frac{S_{mx}}{a} \quad \text{ec.3.7}$$

En la tabla 3.1 se encuentran algunas raíces positivas de la derivada de la función de Bessel.

Tabla 3.1 Valores aproximados del argumento de la derivada de la Función de Bessel igualada a cero.

$J'_m(\rho) = 0$	v=0	v=1	v=2	v=3
m=1	3.8317	1.8412	3.0542	4.2012
m=2	7.0156	5.3314	6.7061	8.0152
m=3	10.1735	8.5363	9.9695	11.3459
m=4	13.3237	11.7060	13.1704	14.5859
m=5	16.4706	14.8636	16.3475	17.7888

Como se observa en la tabla, cada raíz de la derivada cambia al incrementarse los valores m y v, donde v es el orden de la función de Bessel.

Según la condición de frontera se debe cumplir $J'_{mv}(h \cdot a) = 0$, si solo se propaga el primer modo se obtiene:

$$S_{10} = 3.8317 = h \cdot a$$

Donde $h = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon}$, si queremos que la antena resuene a la frecuencia 2.4Ghz, se despeja el radio del segmento circular “a”, de la expresión, sustituyendo los valores $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$, $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6}$, $\epsilon_r = 4.4$, se obtiene:

$$a = \frac{3.8317}{h} = \frac{3.8317}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon}} = 3.6275m = 36.3mm$$

Al igual que el caso anterior la solución del segmento circular es un subconjunto de la solución del círculo.

La solución para el segmento circular debe satisfacer las condiciones de frontera en las paredes que delimitan el segmento como se observa en la figura 3.2.

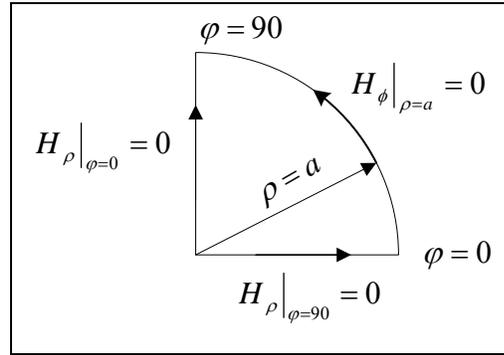


Figura 3.2 Condiciones de frontera para el segmento circular

Como se indica en la figura 3.2 se deben cumplir tres condiciones en la frontera de la cavidad: $H_\phi|_{\rho=a} = 0$, $H_\rho|_{\phi=0} = 0$, $H_\rho|_{\phi=90} = 0$

Para que se cumpla la primera condición $J'_{mv}(h \cdot a) = 0$.

Las siguientes condiciones de frontera establecen que:

$$H_\rho|_{\phi=0} = \frac{1}{h^2} \cdot \left[\frac{j \cdot w \cdot \epsilon}{\rho} \cdot (-A_{mn} \cdot J_{mn}(h \cdot \rho) \cdot \text{Sen}(m \cdot \phi) \cdot m) \right] = 0 \quad \text{ec.3.8}$$

$$H_\rho|_{\phi=90} = \frac{1}{h^2} \cdot \left[\frac{j \cdot w \cdot \epsilon}{\rho} \cdot (-A_{mn} \cdot J_{mn}(h \cdot \rho) \cdot \text{Sen}(m \cdot \frac{\pi}{2}) \cdot m) \right] = 0 \quad \text{ec.3.9}$$

De 3.8 y 3.9 se obtiene la condición $v = 2n$.

Finalmente la expresión de campo para el segmento circular es:

$$E_z = \sum_{mn} A_{2mn} J_{2n} \left(\frac{S_{2mn} \cdot \rho}{a} \right) \cdot \text{Cos}(2 \cdot n \cdot \phi) \quad \text{ec.3.10}$$

$$\Psi_{mn} = J_{2m} \left(\frac{S_{2mn} \cdot \rho}{a} \right) \cdot \text{Cos}(2 \cdot n \cdot \phi) \quad \text{ec.3.11}$$

$$\Psi_{mn} = \sum A_{2mn} \cdot \Psi_{mn} \quad \text{ec.3.12}$$

Si sustituimos la expresión 3.10 en la ecuación 3.1 se deduce que:

$$K_{mn} = \frac{S_{2mn}}{a} \quad \text{ec.3.13}$$

Del capítulo dos sabemos que:

$$\sum_{mn} A_{2mn} \cdot \Psi_{mn} \cdot (k_d^2 - k_{mn}^2) = j \cdot \omega \cdot \mu \cdot J_z \quad \text{ec.3.14}$$

$$\iint_{\rho\phi} \sum_{mn} A_{2mn} \cdot \Psi_{mn} \cdot \Psi_{mn} \cdot (k_d^2 - k_{mn}^2) \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\phi = \iint_{\rho\phi} j \cdot \omega \cdot \mu \cdot J_z \cdot \Psi_{mn} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\phi \quad \text{ec.3.15}$$

Se debe definir la alimentación, como se explicó en la sección 3.4, se usará un conector coaxial, esto indica que el área de alimentación es una circunferencia, sin embargo debido a que las coordenadas son cilíndricas, se usará un área equivalente como se indica en la figura 3.3.

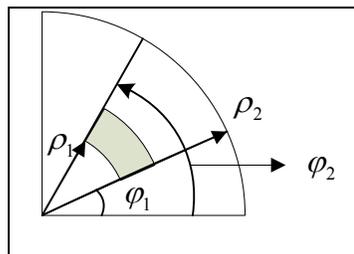


Figura 3.3 Área de alimentación de la antena cuya forma es un segmento circular.

De la figura 3.3 se deduce que la corriente es de la forma:

$$\vec{J} = \frac{I}{A_{seg}} \cdot H_{\phi_0}^{\phi_1}(\phi) \cdot H_{\rho_0}^{\rho_1}(\rho) \cdot \hat{z} \quad \text{ec.3.16}$$

$$A_{seg} = \frac{1}{2} \cdot (\phi_1 - \phi_0) \cdot (\rho_1^2 - \rho_0^2) \quad \text{ec. 3.17}$$

Sustituyendo en la expresión 3.15 e integrando apropiadamente se obtiene A_{2mn} :

$$A_{2mn} = j\omega\mu \frac{I_0}{A_{seg}} \cdot \frac{1}{k_d^2 - k_{mn}^2} \cdot \frac{\left[\int_{\rho_0}^{\rho_1} J_{2n} \left(\frac{s_{2mn} \cdot \rho}{a} \right) \rho d\rho \right] \cdot \left[\frac{1}{2n} \cdot (\text{Sen}(2n\phi_1) - \text{Sen}(2n\phi_0)) \right]}{\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^a J_{2n}^2 \left(\frac{S_{2mn}}{a} \rho \right) \cdot \rho \cdot d\rho} \quad \text{ec. 3.18}$$

El campo eléctrico es:

$$E_z = \sum A_{2mn} \cdot \Psi \quad \text{ec.3.19}$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{A_{seg}} \cdot \iint_{\rho\phi} E \cdot \rho \cdot d\rho d\phi \quad \text{ec.3.20}$$

$$V = -h \cdot \langle E \rangle \quad \text{ec.3.21}$$

$$Z_{in} = \frac{V}{I_0} \quad \text{ec.3.22}$$

Sustituyendo la expresión 3.18 en las ecuaciones 3.19, 3.20, 3.21 y 3.22 respectivamente se obtiene finalmente la impedancia de entrada de la antena:

$$Z_{in} = -\sum j\omega\mu \frac{h}{A_{seg}^2} \cdot \frac{1}{k_d^2 - k_{mn}^2} \cdot \frac{\left[\int_{\rho_0}^{\rho_1} J_{2n} \left(\frac{s_{2mn} \cdot \rho}{a} \right) \rho d\rho \right]^2 \cdot \left[\frac{1}{2n} \cdot (\text{Sen}(2n\phi_1) - \text{Sen}(2n\phi_0)) \right]^2}{\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^a J_{2n}^2 \left(\frac{S_{2mn}}{a} \rho \right) \cdot \rho \cdot d\rho} \quad \text{ec.3.23}$$

En el programa Matemática se puede observar el gráfico impedancia vs frecuencia, el cual nos indica la frecuencia de resonancia de la antena analizada.

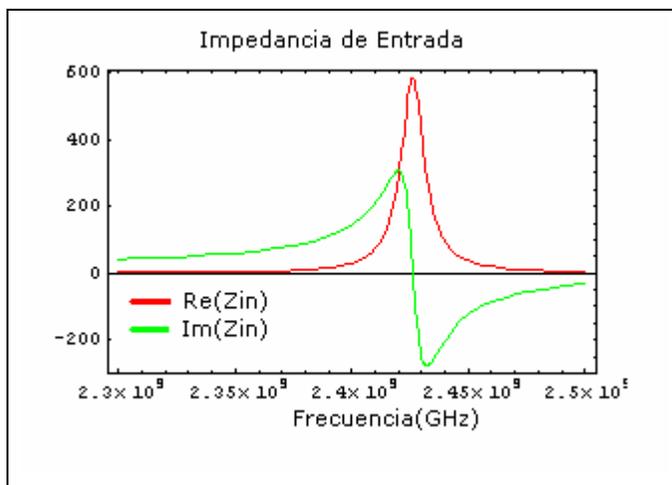


Gráfico 3.1 Impedancia de Entrada de la Antena Triángulo de Sierpinski Modificada Iteración 1.

En el anexo 6 se observa el cálculo en el matemática con el cual se obtuvo la gráfica 3.1, se observa que la parte imaginaria se hace cero para una frecuencia cercana a 2.4 GHz, siendo esto coherente con las especificaciones de diseño, la parte real de la impedancia se ajustará apropiadamente variando la parte imaginaria de la constante dieléctrica compleja. En el capítulo cuatro se realizarán estos ajustes con los resultados de la simulación, también se aumentará el valor del radio del segmento de circunferencia para tomar en cuenta los “Fringing fields”, usando la misma expresión del capítulo II.

3.5.2 Análisis de la segunda iteración. Modelo equivalente mediante síntesis de redes.

Se usará el mismo análisis descrito en la sección 2.5.2 del capítulo dos, allí se obtuvieron las formulas del modelo equivalente, por lo tanto en la siguiente sección se caracterizará cada segmento circular como una red de tres puertos, luego, se usarán las formulas ya deducidas.

3.5.2.1 Caracterización de los segmentos de circunferencia que conforman el Triángulo de Sierpinski Modificado, en redes de tres puertos.

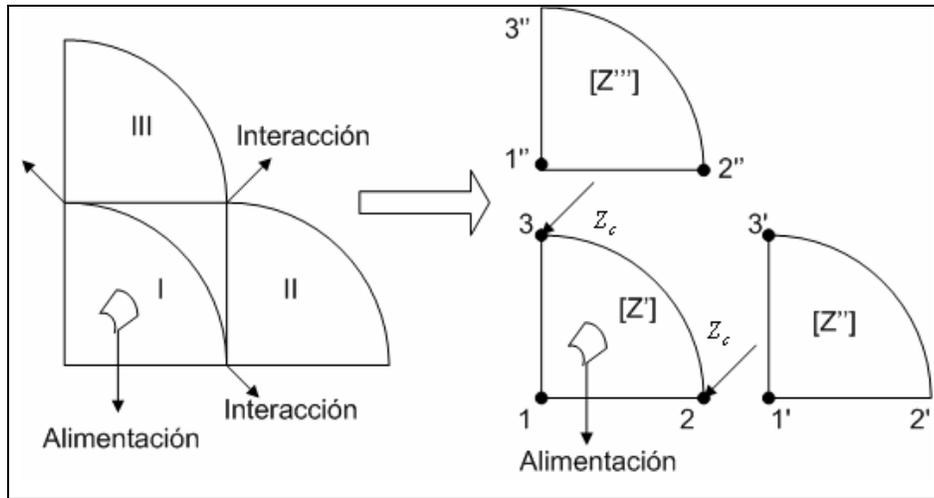


Figura 3.4 Iteración 2, cada segmento es modelado como una red de tres puertos

Del capítulo anterior obtenemos las siguientes expresiones:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 + z_{13}I_3 \quad \text{ec.3.24}$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 + z_{23}I_3 \quad \text{ec.3.25}$$

$$V_3 = z_{31}I_1 + z_{32}I_2 + z_{33}I_3 \quad \text{ec.3.26}$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ec.3.27}$$

Donde $z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0, I_3=0}$, $z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0, I_3=0}$, $z_{13} = \frac{V_1}{I_3} \Big|_{I_1=0, I_2=0}$, y así sucesivamente...

En la figura 3.4 los vértices del triángulo I están identificados por los números 1, 2, y 3, cada uno representa un puerto. El puerto 1 corresponde a la alimentación del conector coaxial, los puertos 2 y 3 corresponden a los puntos de interacción con los otros segmentos, se supondrá que en los puertos 2 y 3 está colocada una fuente

puntual (Delta de Dirac), que representan la interacción y el flujo de corriente entre puertos.

Se partirá de la deducción para calcular la impedancia para hallar las componentes de la matriz de impedancia de la red I.

Se desea obtener V_1 , V_2 , y V_3 en función de I_1 , I_2 , y I_3 .

De la ecuación 3.15 tenemos:

$$\iint_{xy} \sum_m A_m \cdot \Psi_m \cdot \Psi_m \cdot (k_d^2 - k_m^2) \cdot dx dy = \iint_{xy} j \cdot w \cdot \mu \cdot J_z \cdot \Psi_m \cdot dx dy \quad \text{ec.3.28}$$

Donde J_z en la red I es de la forma:

$$J_z = J_{1z} + J_{2z} + J_{3z} \quad \text{ec.3.29}$$

$$J_{1z} = \frac{I_1}{A_{seg}} \cdot H_{\phi_0}^{\phi_1}(\phi) \cdot H_{\rho_0}^{\rho_1}(\rho) \cdot H_0^h(z) \quad \text{ec.3.30}$$

$$J_{2z} = \frac{I_2}{\rho} \cdot \delta(\phi) \cdot \delta(\rho - a) \cdot H_0^h(z) \quad \text{ec.3.31}$$

$$J_{3z} = \frac{I_3}{\rho} \cdot \delta(\phi - \frac{\pi}{2}) \cdot \delta(\rho - a) \cdot H_0^h(z) \quad \text{ec.3.32}$$

$$J_z = \frac{I_1}{A_{seg}} \cdot H_{\phi_0}^{\phi_1}(\phi) \cdot H_{\rho_0}^{\rho_1}(\rho) \cdot H_0^h(z) + \frac{I_2}{\rho} \cdot \delta(\phi) \cdot \delta(\rho - a) \cdot H_0^h(z) + \frac{I_3}{\rho} \cdot \delta(\phi - \frac{\pi}{2}) \cdot \delta(\rho - a) \cdot H_0^h(z) \quad \text{ec.3.33}$$

Si sustituimos la expresión 3.33 en la ecuación 3.28, e integramos obtenemos el término A_m , de la ecuación 2.29, obtenemos el campo eléctrico, luego calculamos el promedio del campo en el punto de alimentación en este caso en el puerto 1 usando la expresión 2.30, después se calcula V_1 , a partir de la ecuación 2.31, el resultado nos da una expresión en función de las tres corrientes, allí obtenemos las impedancias. El

mismo proceso se repite para V_2 y V_3 , solo que el promedio del campo se calcula en los puertos 2 y 3 respectivamente.

Si analizamos las componentes de la matriz que se obtienen notamos que hay simetría entre los puertos que conforman la red I, por lo tanto, se cumple:

$$\begin{aligned}
 Z_{11} & \\
 Z_{12} &= Z_{21} \\
 Z_{13} &= Z_{31} \\
 Z_{22} &= Z_{33} \\
 Z_{23} &= Z_{32}
 \end{aligned} \tag{ec.3.34}$$

Finalmente siguiendo el procedimiento anterior y tomando en cuenta la simetría entre puertos, obtenemos las siguientes impedancias que componen la matriz de la red I:

$$Z_{11} = \sum_{\substack{n=nfinal \\ m=mmax \\ m=1 \\ n=0}} \frac{1}{A_{seg}^2} \cdot \frac{-j \cdot w \cdot \mu \cdot h}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \frac{\left[\int_{\rho_0}^{\rho_1} J_{2n} \left(\frac{S_{2mn}}{a} \cdot \rho \right) \cdot \rho \cdot d\rho \right]^2 \cdot \left[\frac{1}{(2n)^2} \cdot (Sen(2n\phi_1) - Sen(2n\phi_0)) \right]^2}{\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^a J_{2n}^2 \left(\frac{S_{2mn}}{a} \rho \right) \rho \cdot d\rho} \tag{ec.3.35}$$

$$Z_{12} = \sum_{\substack{n=nfinal \\ m=mfinal \\ m=1 \\ n=0}} \frac{-j \cdot w \cdot \mu \cdot h}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \frac{J_{2n}(S_{2mn}) \cdot \int_{\rho_0}^{\rho_1} J_{2n} \left(\frac{S_{2mn}}{a} \cdot \rho \right) \cdot \rho \cdot d\rho \cdot \left[\frac{1}{(2n)^2} \cdot (Sen(2n\phi_1) - Sen(2n\phi_0)) \right]}{\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^a J_{2n}^2 \left(\frac{S_{2mn}}{a} \rho \right) \rho \cdot d\rho} \tag{ec.3.36}$$

$$Z_{13} = \sum_{\substack{n=nfinal \\ m=mmax \\ m=1 \\ n=0}} \frac{-j \cdot w \cdot \mu \cdot h}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \frac{J_{2n}(S_{2mn}) \cdot Cos(n\pi) \cdot \int_{\rho_0}^{\rho_1} J_{2n} \left(\frac{S_{2mn}}{a} \cdot \rho \right) \cdot \rho \cdot d\rho \cdot \left[\frac{1}{(2n)^2} \cdot (Sen(2n\phi_1) - Sen(2n\phi_0)) \right]}{\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^a J_{2n}^2 \left(\frac{S_{2mn}}{a} \rho \right) \rho \cdot d\rho} \tag{ec.3.37}$$

$$Z_{22} = \sum_{\substack{n=nfinal \\ m=mmax \\ n=0}} -j \cdot w \cdot \mu \cdot \frac{h}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \frac{J_{2n}^2(S_{2mn})}{\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^a J_{2n}^2\left(\frac{S_{2mn}}{a} \rho\right) \rho \cdot d\rho} \quad \text{ec.3.38}$$

$$Z_{23} = \sum_{\substack{n=nfinal \\ m=mmax \\ n=0}} -j \cdot w \cdot \mu \cdot \frac{h}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \frac{J_{2n}^2(S_{2mn}) \cdot \text{Cos}(n\pi)}{\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^a J_{2n}^2\left(\frac{S_{2mn}}{a} \rho\right) \rho \cdot d\rho} \quad \text{ec.3.39}$$

El cálculo de la matriz de impedancia de la red II es igual a la anterior, solo que como se observa en la figura 2.10 esta red no esta alimentada, hay un punto de interacción con la red I, por el puerto 1', esta interacción al ser analizada la red II como una red individual se interpreta como una fuente puntual (delta de Dirac).

Esta fuente indica que allí hay un flujo de corriente, ya que de la red I fluye corriente a la red II, a través del puerto 1'.

Igual que la red I, la matriz de impedancia de la red II es de la forma:

$$Z' = \begin{bmatrix} z'_{11} & z'_{12} & z'_{13} \\ z'_{21} & z'_{22} & z'_{23} \\ z'_{31} & z'_{32} & z'_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ec.3.40}$$

Se observa que se diferencia la matriz de la red II usando un apostrofe, todos los puertos y las corrientes en esta red poseen apostrofe para ser diferenciados.

En esta red al igual que la red I, hay simetría en los puertos. Se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} z'_{11} &= z'_{11} \\ z'_{12} &= z'_{21} \\ z'_{13} &= z'_{31} \\ z'_{22} &= z'_{33} \\ z'_{23} &= z'_{32} \end{aligned} \quad \text{ec.3.41}$$

Por lo tanto las impedancias que conforman la matriz de la red II son:

$$Z'_{11} = \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}} -j \cdot w \cdot \mu \cdot \frac{h}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \frac{J_{2n}^2(0)}{\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^a J_{2n}^2\left(\frac{S_{2mn}}{a} \rho\right) \rho \cdot d\rho} \quad \text{ec.3.42}$$

$$Z'_{12} = \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}} -j \cdot w \cdot \mu \cdot \frac{h}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \frac{J_{2n}(0) \cdot J_{2n}(S_{2mn})}{\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^a J_{2n}^2\left(\frac{S_{2mn}}{a} \rho\right) \rho \cdot d\rho} \quad \text{ec.3.43}$$

$$Z'_{13} = \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}} -j \cdot w \cdot \mu \cdot \frac{h}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \frac{J_{2n}(0) \cdot J_{2n}(S_{2mn}) \cdot \text{Cos}(n\pi)}{\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^a J_{2n}^2\left(\frac{S_{2mn}}{a} \rho\right) \rho \cdot d\rho} \quad \text{ec.3.44}$$

$$Z'_{22} = \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}} -j \cdot w \cdot \mu \cdot \frac{h}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \frac{J_{2n}^2(S_{2mn})}{\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^a J_{2n}^2\left(\frac{S_{2mn}}{a} \rho\right) \rho \cdot d\rho} \quad \text{ec.3.45}$$

$$Z'_{23} = \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}} -j \cdot w \cdot \mu \cdot \frac{h}{(k_d^2 - k_m^2)} \cdot \frac{J_{2n}^2(S_{2mn}) \cdot \text{Cos}(n\pi)}{\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^a J_{2n}^2\left(\frac{S_{2mn}}{a} \rho\right) \rho \cdot d\rho} \quad \text{ec.3.46}$$

Para la red III se sigue el mismo procedimiento, luego de un análisis se comprueba que la red II y la red III, son idénticas por lo tanto:

$$[Z'] = [Z''] \quad \text{ec.3.47}$$

Al igual que la antena de configuración Triángulo de Sierpinski se procederá a calcular y graficar en *Matemática®* la impedancia de entrada de la antena para la iteración dos, en este caso al igual que el anterior debe resolverse el sistema de ecuaciones siguiente:

$$z_{equi} = z_{11} + z_{12} \frac{I_2}{I_1} + z_{13} \frac{I_3}{I_1} \quad \text{ec.2.67}$$

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{z_{31} + z_{32} \frac{I_2}{I_1}}{-z_c - z_{33}} \quad \text{ec.2.70}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21} \cdot z_c - z_{21} \cdot z_{33} + z_{23} \cdot z_{31}}{\left(z_c^2 + z_{33} \cdot z_c + z_{22} \cdot z_c + z_{22} \cdot z_{33} - z_{23} \cdot z_{32} \right)} \quad \text{ec.2.71}$$

$$Z_c = \frac{Z'_{11} \cdot Z'_{33} - Z'_{13} \cdot Z'_{31} + Z'_{11} \cdot Z'_{22} - Z'_{12} \cdot Z'_{21}}{Z'_{33} + Z'_{22}} \quad \text{ec.2.87}$$

En el sistema los valores de impedancia son los hallados en la sección 3.5.2.1.

En el anexo 7 se encuentra el cálculo realizado en el Matemática® de la iteración 2 de la configuración Triángulo de Sierpinski Modificado allí se puede observar que el gráfico de la impedancia no es el esperado ya que en lugar de dos resonancias solo hay una resonancia cercana a 2.4 Ghz, a pesar de la incongruencia entre los resultados y lo que predice la teoría, lo recomendable no es descartar el modelo sino talvez ser mas cuidadoso en el cálculo ya que probablemente la forma como la herramienta matemática evalúa las integrales introduce algunas aproximaciones que modifican el resultado, también el cálculo analítico puede poseer términos que talvez se han omitido.

CAPITULO IV

4.1 AJUSTE DEL MODELO TEÓRICO MEDIANTE LA SIMULACIÓN DE LAS ANTENAS FRACTALES TRIÁNGULO DE SIERPINSKI Y TRIÁNGULO DE SIERPINSKI MODIFICADO

En los capítulos anteriores se diseñaron y analizaron dos configuraciones diferentes de antenas fractales hasta la iteración 3 usando dos métodos analíticos, el modelo de cavidad y síntesis de redes.

Los resultados obtenidos permitieron conocer las frecuencias de resonancia de cada antena, sin embargo, el valor real de la impedancia compleja hallado con estos métodos es inexacto ya que la constante dieléctrica responsable de las pérdidas en la cavidad se desconoce. Para conocer este valor se procederá a simular el comportamiento de las antenas diseñadas en los capítulos anteriores usando el paquete de simulación Microwave Office 2002[®].

La simulación tiene como objetivo ajustar los valores de impedancia del modelo teórico a los valores obtenidos del simulador para conocer la constante dieléctrica compleja, además la simulación nos ayudará a determinar la ubicación adecuada del punto de alimentación de cada antena.

En los casos en los cuales el modelo teórico no proporcionó los valores esperados, igualmente se simulará la antena y luego se corroborará con la fase experimental, también se hallarán los puntos adecuados de alimentación para las antenas en las cuales hubo discrepancia en los resultados.

El simulador es una herramienta útil para diseñar y analizar dispositivos que operan en las bandas de frecuencia, RF, y Microondas.

Para analizar antenas Microstrip, el simulador posee un programa llamado EMSight con este programa se pueden simular estructuras planares en tres dimensiones que contienen múltiples capas bien sea conductoras o dieléctricas.

El simulador usa un método “full wave” para calcular los campos de la estructura, específicamente usa “El Método de los Momentos en el dominio espectral”.

Una de las limitaciones de EMSight es que el tiempo de simulación crece exponencialmente con el tamaño y complejidad del problema.

Para el análisis el simulador divide la antena microstrip en celdas, estas celdas pueden ser cuadradas o rectangulares. Para que los resultados de la simulación sean satisfactorios se aconseja que el tamaño de celda sea 1/100 de la longitud de onda de propagación. En este trabajo para la simulación de las antenas se eligió un tamaño de celda de 1.2mm. El tamaño recomendado por el simulador sería 0.6mm, sin embargo, se eligió un tamaño de celda mayor para reducir los tiempos de simulación.

Si la celda es muy pequeña se obtiene mayor precisión pero aumenta considerablemente el tiempo de simulación además exige mayor memoria RAM al computador.

4.2 ANALISIS DE LA ANTENA TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

Las siguientes simulaciones se realizarán con el fin de conocer la impedancia de entrada de la antena para diferentes puntos de alimentación.

Después de conocer la impedancia de entrada para diferentes puntos de alimentación se elegirá un punto adecuado que permita acoplar la antena, esto será de gran utilidad para la implementación de las antenas, además los valores de impedancia obtenidos nos ayudarán a ajustar la constante dieléctrica del modelo teórico para la antena fractal.

4.2.1 Elección de la ubicación del punto de alimentación.

Cuando se alimenta una antena planar microstrip con un conector coaxial soldado en la base, existen múltiples opciones para alimentar la antena y no se puede determinar a priori el punto de alimentación adecuado. Sin embargo, en este caso debido a la geometría simétrica de la antena, lo apropiado es alimentar la antena triangular en la diagonal, porque en este lugar se conserva la simetría.

Como se observa en la figura 4.1 la ubicación del punto de alimentación se desplazará a lo largo de la diagonal.

El área de la alimentación como se observa en el gráfico es 5.76mm^2 , en realidad el área de alimentación es un círculo de radio aproximado 1.4mm correspondiente a la sonda del conector, sin embargo, el simulador sólo admite una fuente de alimentación de área cuadrada por ello se establece un área cuadrada equivalente a la de la sonda del conector.

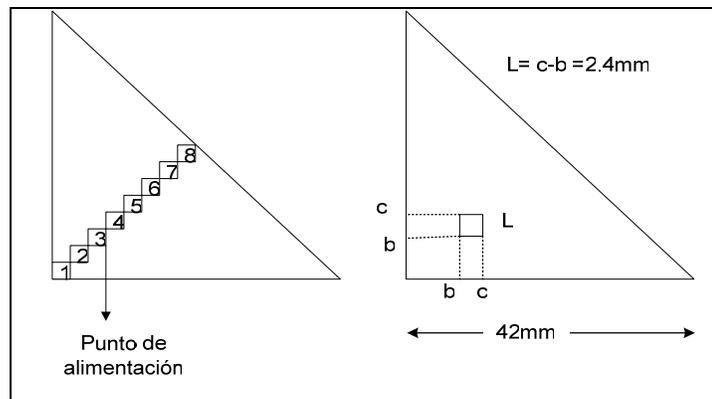


Figura 4.1 Variación de la ubicación del punto de alimentación de la antena compuesta por triángulos

La impedancia de la antena varía al cambiar el punto de alimentación, por lo tanto, se elegirá el punto de alimentación que permita acoplar la antena a una línea de alimentación de $50\ \Omega$, esto implica que el VSWR sea menor que 2 y que la parte real de la impedancia sea cercana a $50\ \Omega$.

Tabla 4.1 Ubicación de los puntos de alimentación de la antena Triángulo de Sierpinski Iteración 1,2 y 3.

Posición	b(mm)	c(mm)
1	0	2.4
2	2.4	4.8
3	4.8	7.2
4	7.2	9.6
5	9.6	12
6	12	14.4
7	14.4	16.8
8	16.8	19.2

Las posiciones que se observan en la diagonal se encuentran en la tabla 4.1, cada posición se obtiene variando los puntos b y c a lo largo de las coordenadas “x” y “y”. Cabe destacar que el lado del cuadrado que representa el área de alimentación es igual a $L = c - b$ en todas las posiciones.

4.2.2 Análisis de la Antena Triángulo de Sierpinski: Iteración 1

4.2.2.1 Elección del punto de alimentación

En la figura 4.2 se observa la antena Triángulo de Sierpinski correspondiente a la iteración 1, se observa el gráfico con las dimensiones de la antena y el gráfico 3D en el simulador, el espesor del dieléctrico es 1.5 mm y la constante dieléctrica es 4.3, el plano de tierra tiene un área de $102 \times 102 \text{ mm}^2$.

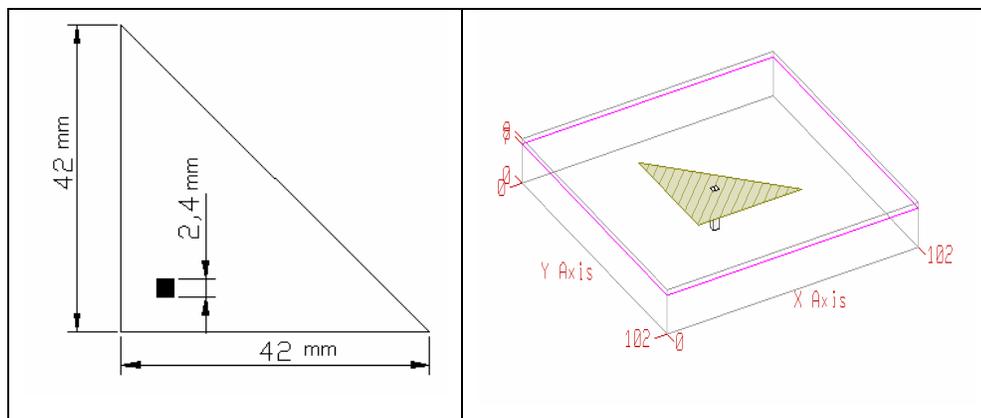


Figura 4.2 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Triángulo Sierpinski Iteración 1

Se realizó la simulación de la antena ubicando la alimentación en ocho puntos diferentes a lo largo de la diagonal, como se indicó en la sección anterior. En la tabla 4.3 se resumen los resultados obtenidos de la simulación.

Tabla 4.2. Resultados simulación Antena Sierpinski iteración 1, alimentada en puntos diferentes. (Ver tabla 4.1)

<i>Posición</i>	<i>Frecuencia (GHz)</i>	<i>Re(ZIN)</i>	<i>Im(ZIN)</i>	<i>VSWR</i>	<i> S[1,1] </i>
1	2.3797	2432.45	1.9951	48.6491	0.9597
2	2.3797	2159.42	-0.1146	43.1885	0.9547
3	2.3789	1679.17	-1.0137	33.5834	0.9421
4	2.3800	1120.40	-1.3785	22.4080	0.9145
5	2.3793	616.29	0.1972	12.3257	0.8499
6	2.3796	255.34	0.4203	5.1068	0.6725
7	2.3812	61.90	-0.0820	1.2379	0.1063
8	nr	nr	nr	nr	nr

En la tabla 4.2, se observa que la banda de resonancia para cada punto de alimentación es cercana a 2.4GHz. A medida que el punto de alimentación se aleja del vértice la impedancia de la antena en la frecuencia de resonancia de 2,4GHz se reduce considerablemente. La fila resaltada con la franja azul indica el punto apropiado para alimentar la antena, en ese punto la antena resuena a una frecuencia cercana a 2,4GHz, y el modulo del coeficiente de reflexión es 0.1064, por lo general un acoplamiento se considera aceptable si el modulo del coeficiente de reflexión es $|\rho| \leq 0.2$ en este caso se cumple con esta condición.

En la columna 5 de la tabla se puede observar el ROE, en concordancia con la disminución de la impedancia igualmente el ROE va disminuyendo, lo ideal es que el ROE sea cercano a 1 ya que garantiza total acoplamiento con el sistema.

4.2.2.2 Ajuste de la constante dieléctrica del modelo teórico

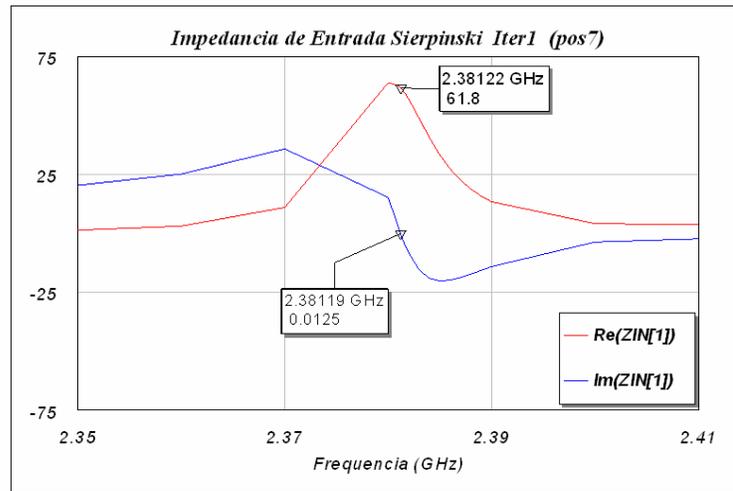
Los resultados obtenidos en la tabla 4.2 se usarán para ajustar el modelo teórico y determinar el valor imaginario de la constante dieléctrica compleja. En el capítulo II se explicó el modelo teórico para la iteración 1, y en el paquete Matemática® se calculó el resultado con los valores de la simulación de la tabla 4.2 se ajustó el valor de impedancia del modelo teórico variando $Im[\epsilon_r]$ de forma apropiada, en la tabla 4.3 se encuentran los resultados.

Tabla 4.3. Resultados Modelo Teórico Antena Sierpinski iteración 1, alimentada en diferentes puntos (ver Tabla 4.1)

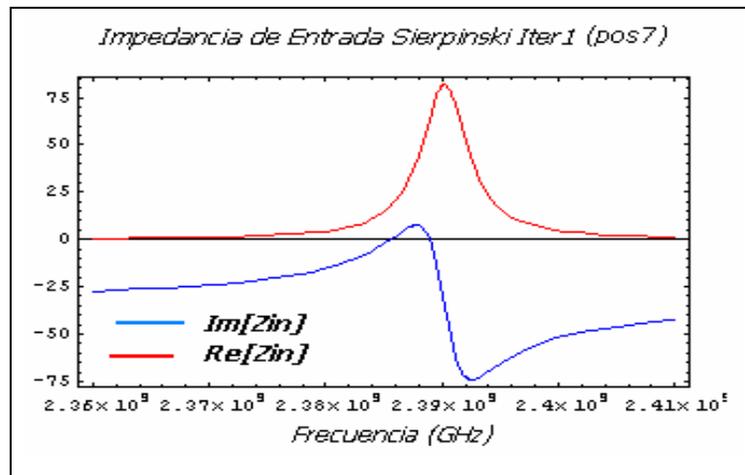
Posición	Frecuencia (GHz)	Re[Zin]	Im[Zin]	Im[ε]
1	2,3902	2448,9800	2,5895	0,0023
2	2,3902	2256,6400	-0,2673	0,0022
3	2,3901	1762,3700	-1,0593	0,0022
4	2,3901	1202,6700	-1,2394	0,0021
5	2,3900	655,6840	1,8373	0,0021
6	2,3899	280,1880	-0,5732	0,0021
7	2,3889	63,4000	0,8529	0,0020
8	nr	nr	nr	nr

En la tabla se observa que la frecuencia en el modelo teórico es un poco mayor a la del simulador y se acerca a la frecuencia de diseño 2.4GHz, el ajuste de la constante dieléctrica indica que este valor es aproximadamente 0.0021.

A continuación se observa en la gráfica 4.1 la impedancia de entrada obtenida con el simulador y en la gráfica 4.2 se observa la impedancia de entrada que se obtienen del Matemática® con el modelo teórico después de ajustar ϵ complejo.



Gráfica 4.1 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski iteración 1, obtenida con el simulador para la posición 7 de la tabla 4.1



Gráfica 4.2 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski iteración 1, obtenida con el Modelo de Cavidad para la posición 7 de la tabla 4.1

4.2.3 Análisis de la antena Triángulo de Sierpinski: Iteración 2.

4.2.3.1 Elección del punto de alimentación

En la figura 4.3 se observa la antena Triángulo de Sierpinski correspondiente a la iteración 2, allí se observan las dimensiones de la antena y el gráfico 3D en el

simulador, al igual que la iteración 1 la altura del sustrato es 1.5 mm y la constante dieléctrica es 4.3. Las dimensiones de plano de tierra son: $144 \times 144 \text{mm}^2$.

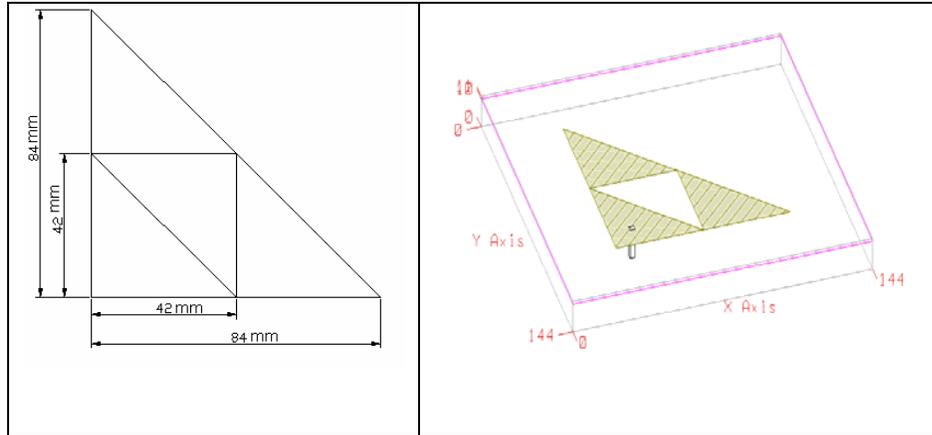


Figura 4.3 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Triángulo Sierpinski Iteración 2

En la tabla 4,4 se observan los resultados obtenidos al simular la iteración 2 de la antena Fractal Triángulo de Sierpinski.

Tabla 4.4. Resultados simulación Antena Sierpinski iteración 2, alimentada en puntos diferentes. (Ver Tabla 4.1)

Posición	Banda resonante	Frecuencia (GHz)	Re(ZIN)	Im(ZIN)	VSWR	S[1,1]
1	1	0.7040	123890.00	0.7048	2478.3000	0.9990
	2	2.3809	323.80	-0.0462	6.4761	0.7324
2	1	0.7100	22534.00	-0.455	2462.6000	0.9991
	2	2.3807	287.27	-0.3301	5.7454	0.7035
3	1	0.7100	22741.00	0.7042	2421.4000	0.9991
	2	2.3804	223.19	0.4919	4.4638	0.6339
4	1	0.7100	22237.00	0.0457	2359.6000	0.9991
	2	2.3807	144.57	0.3523	2.8913	0.4860
5	1	0.7100	21615.00	0.0915	2283.4000	0.9991
	2	2.3813	75.37	0.1728	1.5075	0.2023
6	1	0.7100	21093.00	-0.0228	2201.9000	0.9990
	2	2.3910	19.55	0.0268	2.5573	0.4377
7	1	0.7100	20243.00	0.1372	2122.8000	0.9990
	2	nr	nr	nr	nr	nr
8	1	0.8000	0.01	-0.575	6257.3000	0.9996
	2	nr	nr	nr	nr	nr

En la tabla 4.4 se observa dos bandas de frecuencia de resonancia una en 0.7GHz y la otra en 2.38GHz aproximadamente.

La frecuencia de 2.4GHz corresponde al triángulo de lado 42mm correspondiente a la iteración 1, la frecuencia 0.7GHz corresponde al triángulo externo de lado 84mm, se esperaría que esta frecuencia fuera aproximadamente la mitad de la anterior, sin embargo esto no ocurre debido al truncamiento del fractal.

En la tabla 4.4 también se observa que la primera banda correspondiente a la frecuencia de 0.7GHz posee un VSWR muy alto y no varía demasiado al cambiar el punto de alimentación, en cambio la banda correspondiente a la frecuencia de 2.4GHz disminuye la impedancia a medida que el punto de alimentación se aleja del vértice por lo tanto se acoplará la antena para la frecuencia de 2,4GHz.

La franja resaltada en verde indica el punto idóneo para alimentar la antena. Este punto corresponde a la posición 5, el modulo del coeficiente de reflexión en ese punto de alimentación es 0.2023, por lo general es recomendable que el coeficiente de reflexión sea menor que 0.2, en este caso está en limite de esta condición. Si el modulo del coeficiente de reflexión es menor que 0.2, se entrega a la carga aproximadamente el 96% de la potencia incidente.

4.2.3.2 Ajuste de la constante dieléctrica del modelo teórico

Los resultados obtenidos en la tabla 4.4 se usarán para ajustar el modelo teórico y determinar el valor imaginario de la constante dieléctrica compleja. En el capítulo II se explicó el modelo teórico para la iteración 2, los resultados obtenidos en Matemática fueron ajustados variando $\text{Im}[\epsilon_r]$ para cada posición de tal manera que coincidieran con los resultados de la tabla 4.4. Los resultados se encuentran en la tabla 4.5.

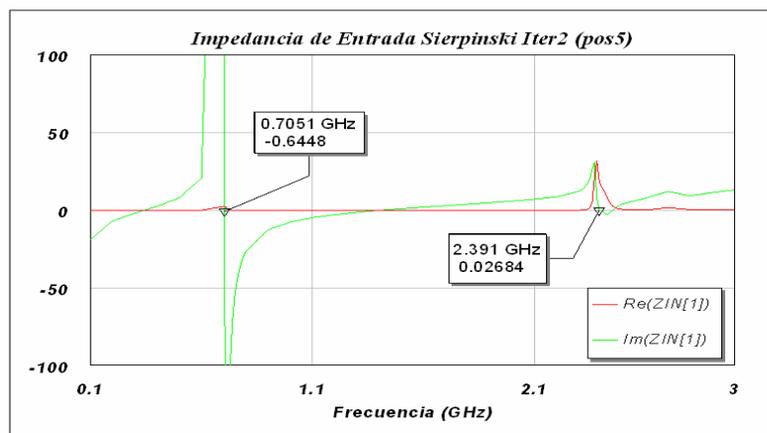
Tabla 4.5. Resultados Modelo Teórico Antena Sierpinski iteración 2, alimentada en diferentes puntos (Ver Tabla 4.1).

Posición	Frecuencia (GHz)	Re[Z_{in}]	Im[Z_{in}]	Im[ε]
1	0,9965	700,0	0,0113	0,0195
	2,0051	300,0	0,1830	0,0195
2	0,9970	650,0	0,2360	0,0200
	2,0050	254,0	0,0021	0,0200
3	0,9975	550,0	0,1783	0,0230
	2,0050	200,0	-1,5680	0,0230
4	0,9970	475,0	0,7340	0,0250
	2,0045	150,0	-2,7230	0,0250
5	0,9950	355,0	0,1410	0,0300
	2,0040	90,0	0,7290	0,0300
6	0,9950	320,0	-3,6460	0,0350
	2,0020	52,0	2,1280	0,0350
7	0,9950	250,0	0,3243	0,0400
	1,9980	27,5	-0,5560	0,0400
8	nr	nr	nr	nr

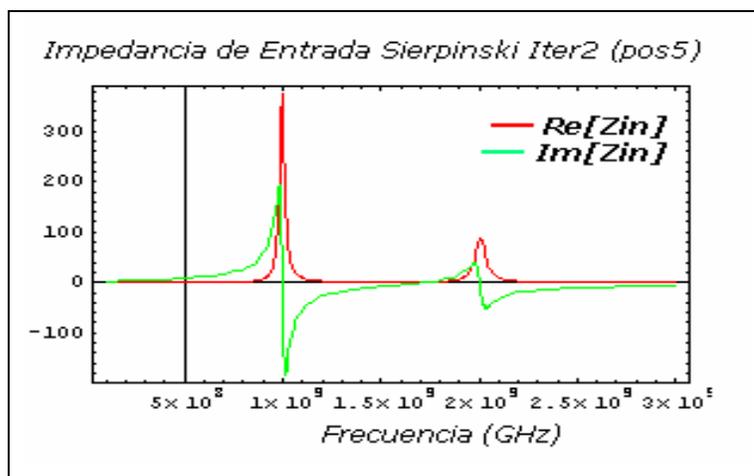
En la Tabla 4.5 se observa que la parte imaginaria de la constante dieléctrica compleja, se encuentra en el intervalo $0.0195 \leq \text{Im}[\epsilon_r] \leq 0.04$, y que a medida que el punto de alimentación se aleja del vértice este valor aumenta, a diferencia de la iteración 1, en la cual este valor se mantenía prácticamente constante.

Cabe destacar que la frecuencia de resonancia menor difiere un poco en el modelo teórico, en el simulador este valor es 0.7 GHz, sin embargo, en el modelo teórico es 1GHz. También difieren las impedancias, en el simulador estos valores son muy altos a diferencia de la teoría en la cual los valores de impedancia son mas pequeños. En todo caso no se debe olvidar que esta frecuencia corresponde al triángulo mayor y que allí se trunca el fractal por lo tanto este valor no se toma demasiado en cuenta para determinar las bandas de operación de la antena.

A continuación se observa en la gráfica 4.3 la impedancia de entrada obtenida con el simulador y en la gráfica 4.4 se observa la impedancia de entrada que se obtienen del Matemática® con el modelo teórico después de ajustar ϵ complejo.



Gráfica 4.3 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski iteración 2, obtenida con el simulador para la posición5 de la tabla 4.1



Gráfica 4.4 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski iteración 2, obtenida con el Modelo de Cavidad para la posición5 de la tabla 4.1

4.2.4 Análisis de la Antena Triángulo de Sierpinski: Iteración 3

4.2.4.1 Elección del punto de alimentación

En la figura 4.4 se observa la antena Triángulo de Sierpinski correspondiente a la iteración 3, se observan las dimensiones de la antena y el gráfico 3D en el simulador, la altura del sustrato es 1.5 mm y la constante dieléctrica es 4.3. Las dimensiones de plano de tierra son: $228 \times 228 \text{mm}^2$.

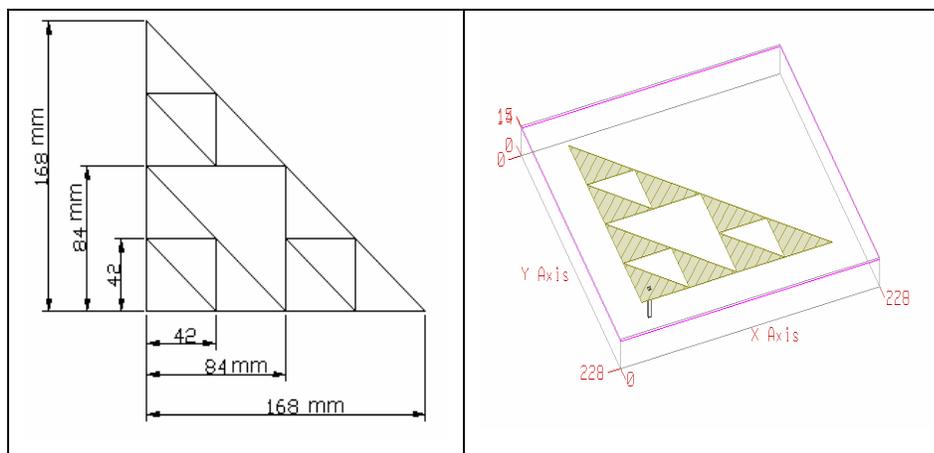


Figura 4.4 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Triángulo Sierpinski Iteración 3

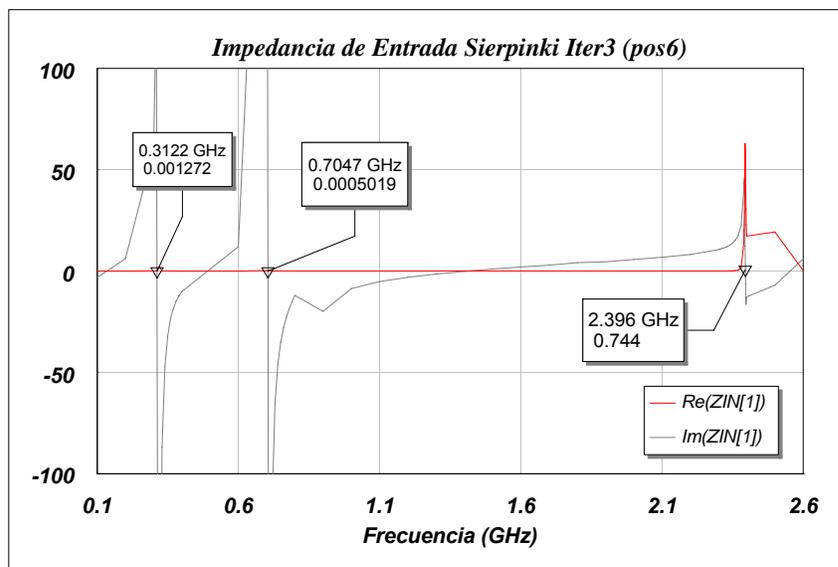
Tabla 4.6 Resultados simulación Antena Sierpinski iteración 3, alimentada en puntos diferentes (Ver Tabla 4.1).

Posición	Banda resonante	Frecuencia (GHz)	Re(ZIN)	Im(ZIN)	VSWR	S[1,1]
1	1	0.3170	1680.3000	0.0457	2231.4000	0.9991
	2	0.7050	12239.0000	0.0453	7568.6000	0.9997
	3	2.9490	164.8800	-3.0986	3.2988	0.5347
2	1	0.3180	31966.0000	0.0457	2213.2000	0.9991
	2	0.7060	18803.0000	0.0914	7390.1000	0.9997
	3	2.3954	512.3000	1.2055	10.2410	0.8220
3	1	0.3180	37175.0000	0.2290	2205.6000	0.9990
	2	0.7060	16941.0000	0.6860	7268.9000	0.9997
	3	2.3950	416.5700	38.4600	8.4035	0.7873
4	1	0.3100	0.0172	0.1389	2535.3000	0.9992
	2	0.7060	16.9650	-0.2745	7090.1000	0.9997
	3	2.3954	266.1600	0.7530	5.3233	0.6837
5	1	0.3100	0.0171	0.0135	2526.8000	0.9992
	2	0.8000	0.0103	0.0554	5127.7000	0.9996
	3	2.3957	75.0750	-1.7810	1.5030	0.2009
6	1	0.3100	0.0160	0.0459	2523.6000	0.9992
	2	0.7100	0.0376	0.0458	6473.0000	0.9996
	3	2.3960	55.0380	-6.2253	1.1648	0.0761
7	1	0.3200	0.0220	-0.8170	2157.6000	0.9990
	2	0.7100	0.0376	0.2820	6265.3000	0.9996
	3	nr	nr	nr	nr	nr
8	1	0.4000	0.0023	0.2900	22326.0000	0.9999
	2	0.7100	0.0363	-0.1810	6091.5000	0.9996
	3	2.7280	40.9520	-9.8318	1.3421	0.1460

En la tabla 4.6 se observan la frecuencia de resonancia, la impedancia, el coeficiente de reflexión y la relación de onda estacionaria de la antena planar Fractal Triángulo de Sierpinski iteración 3, correspondientes a cada punto de alimentación.

En este caso se observan tres bandas de resonancia como era de esperarse, sin embargo las primeras bandas poseen un VSWR muy alto por lo tanto se acoplará la antena a las banda superior. La franja naranja indica el punto de alimentación conveniente para alimentar la antena.

A continuación en la gráfica 4.5 se observa la impedancia de entrada de la antena allí se notan las tres bandas de resonancia.



Gráfica 4.5 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski iteración 3, obtenida con el simulador para la posición 6 de la tabla 4.1

4.2.4.2 Ajuste de la constante dieléctrica del modelo teórico

En el capítulo II a partir de un modelo teórico se hizo una reducción de expresiones algebraicas para obtener una expresión equivalente de la impedancia de entrada, sin

embargo, la expresión hallada predice dos bandas y no tres como se esperaba, por lo tanto el análisis teórico que se realizó para esta iteración no coincide con la simulación así que no se realizará el ajuste en este caso.

4.3 ANALISIS DE LA ANTENA TRIÁNGULO DE SIERPINSKI MODIFICADO

Al igual que la configuración Triángulo de Sierpinski, se realizarán simulaciones con el fin de conocer la impedancia de entrada de la antenna para diferentes puntos de alimentación, con esta información se acoplará la antenna y se ajustará el modelo teórico.

4.3.1 Elección de la ubicación del punto de alimentación.

Al igual que la antenna triángulo de Sierpinski, se alimentará a lo largo de la diagonal, conservando la simetría en el segmento circular, en la figura 4.2, se observan los puntos de alimentación que se usarán para cada simulación. Al igual que la antenna anterior este esquema de alimentación se usará para la iteración 2 y 3.

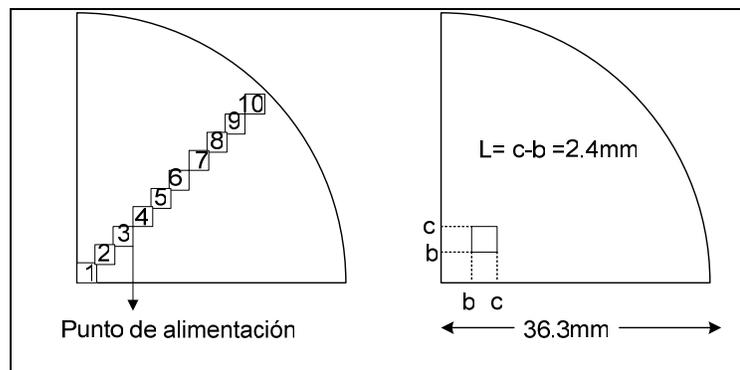


Figura 4.5 Variación de la ubicación del punto de alimentación de la antenna compuesta por segmentos circulares

En la tabla 4.7 se observa la ubicación de cada punto de alimentación, en este caso hay 10 posibles puntos de alimentación. Se observa en la figura 4.5 que el área de

alimentación es cuadrada, esto es debido a que esta área corresponde a la simulación, en realidad el área de alimentación es una circunferencia que corresponde a la sonda del conector coaxial. Para el modelo teórico el área es un segmento circular como lo indica la figura 3.3, sin embargo a pesar de que según el análisis la forma del área cambia el valor se mantiene constante 5.76mm^2 y corresponde a la del conector.

Tabla 4.7 Ptos. de alimentación de la antena Triángulo de Sierpinski Modificado.

Posición	b(mm)	c(mm)
1	0	2,4
2	2,4	4,8
3	4,8	7,2
4	7,2	9,6
5	9,6	12
6	12	14,4
7	14,4	16,8
8	16,8	19,2
9	19,2	21,6
10	21,6	24

4.3.2 Análisis de la Antena Triángulo de Sierpinski Modificado: Iteración 1

4.3.2.1 Elección del punto de alimentación

En la figura 4.6 se observa la antena Triángulo de Sierpinski Modificado correspondiente a la iteración 1, se observan las dimensiones de la antena y el gráfico 3D en el simulador, la altura del substrato es 1.5 mm y la constante dieléctrica es 4.3. Las dimensiones de plano de tierra son: $96 \times 96\text{mm}^2$.

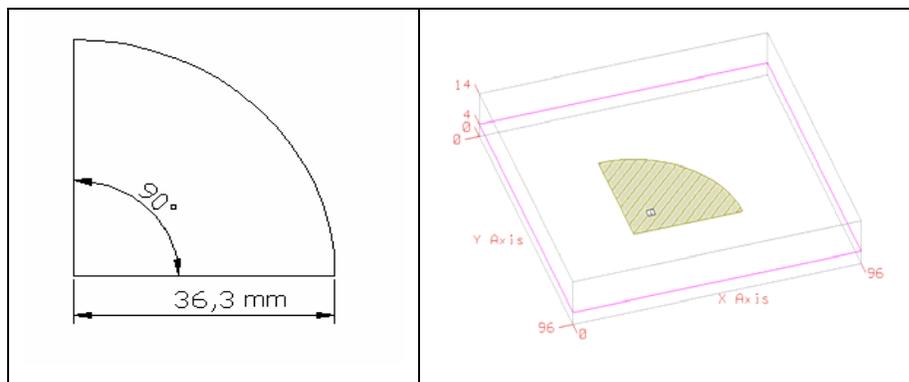


Figura 4.6 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Segmento Circular

Tabla 4.8. Resultados simulación Antena Sierpinski Modificada iteración 1, alimentada en puntos diferentes (Ver tabla 4.7)

Posición	Frecuencia (GHz)	Re(ZIN)	Im(ZIN)	VSWR	 S[1,1]
1	2,3861	1379,2000	-1,8031	27,5850	0,9300
2	2,3864	1220,4000	2,9394	24,4080	0,9212
3	2,3854	935,6800	-0,0154	18,7140	0,8985
4	2,3856	598,7200	-1,4654	11,9740	0,8458
5	2,3853	293,8500	1,1900	5,8770	0,7091
6	2,3870	83,0860	-3,5219	1,6664	0,2499
7	nr	nr	nr	nr	nr
8	2,3890	30,4190	0,5302	1,6440	0,2435
9	2,3870	131,8000	-2,0904	2,6369	0,4500
10	2,3870	239,4200	-3,2244	4,7893	0,6545

En la tabla 4.8 se observan los resultados que arrojó la simulación de la antena Segmento Circular para diez puntos de alimentación diferentes. Se observa una banda resonante cercana a 2.4GHz, a medida que el punto de alimentación se aleja del vértice la impedancia se reduce para la frecuencia de diseño.

Las bandas azules, en la tabla indican los puntos de alimentación idóneos para la antena. Se puede notar que en este caso existen dos posibles puntos de alimentación, para efectos de corroborar estos resultados se implementarán dos antenas alimentadas en estos dos puntos resaltados. En todo es importante notar que el acoplamiento no va a ser óptimo ya que el coeficiente de reflexión es un poco mayor a lo recomendable.

4.3.2.2 Ajuste de la constante dieléctrica del modelo teórico

Los resultados obtenidos en la tabla 4.8 se usarán para ajustar el modelo teórico y determinar el valor imaginario de la constante dieléctrica compleja. En el capítulo III se explicó el modelo teórico para analizar la antena segmento circular, en la tabla 4.3 se encuentran los resultados teóricos, los cálculos se realizaron en Matemática[®], y se

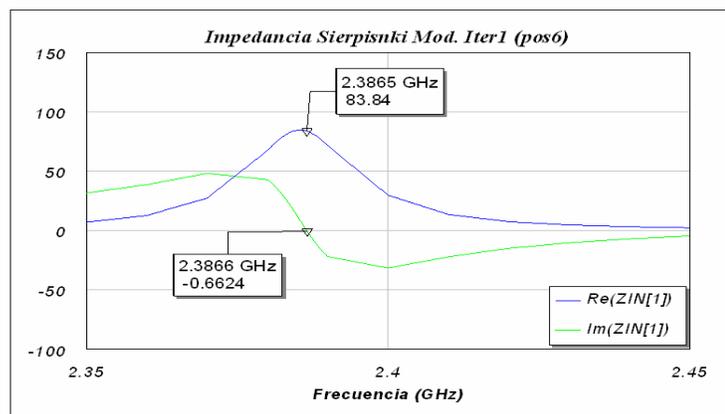
varió el valor de $\text{Im}[\epsilon_r]$ hasta que coincidiera con los valores del simulador. A continuación los resultados.

Tabla 4.9. Resultados Modelo Teórico Antena Sierpinski Modificada iteración 1, alimentada en diferentes puntos (ver Tabla 4.7)

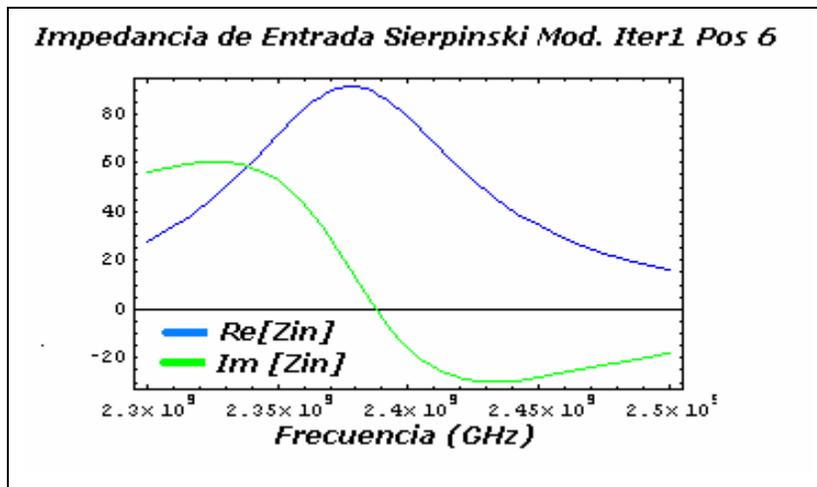
Posición	Frecuencia (GHz)	Re[Zin]	Im[Zin]	Im[ε]
1	2,38	1240,0	0,017	0,045
2	2,38	1150,0	-0,330	0,045
3	2,38	920,0	-1,126	0,045
4	2,38	550,0	-0,132	0,045
5	2,38	290,0	3,730	0,045
6	2,38	90,0	0,719	0,045
7	nr	nr	nr	nr
8	2,40	15,5	1,980	0,045
9	2,39	100,0	-0,391	0,040
10	2,39	178,0	2,630	0,040

Se observa que la frecuencia de resonancia que se obtiene con el modelo teórico coincide con la del simulador, el ajuste de la constante dieléctrica indica que este valor es aproximadamente 0.045.

A continuación se observa en la gráfica 4.6 la impedancia de entrada obtenida con el simulador y en la gráfica 4.7 se observa la impedancia de entrada que se obtienen del Matemática® con el modelo teórico después de ajustar ϵ complejo.



Gráfica 4.6 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski Modificada iteración 1, obtenida con el simulador para la posición 6 (Ver tabla 4.7)



Gráfica 4.7 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski Modificada iteración 1, obtenida con el Modelo de Cavidad para la posición 6 de la tabla 4.7

4.3.3 Análisis de la Antena Triángulo de Sierpinski Modificado: Iteración 2

4.3.3.1 Elección del punto de alimentación

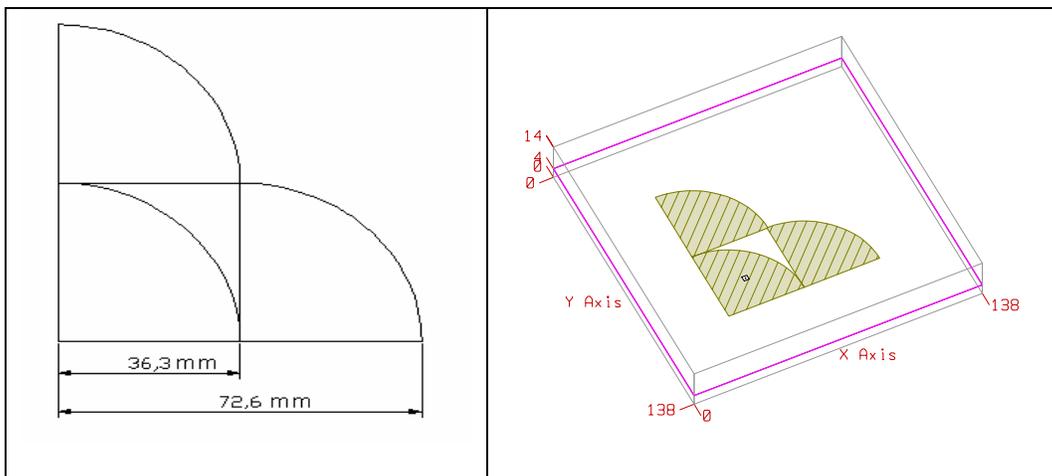


Figura 4.7 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Triángulo de Sierpinski Modificado Iteración 2.

En la figura 4.7 se observa la antena Triángulo de Sierpinski Modificada correspondiente a la iteración 2, se observan las dimensiones de la antena y el gráfico

3D en el simulador, la altura del sustrato es 1.5 mm y la constante dieléctrica es 4.3. Las dimensiones de plano de tierra son: $138 \times 138 \text{mm}^2$.

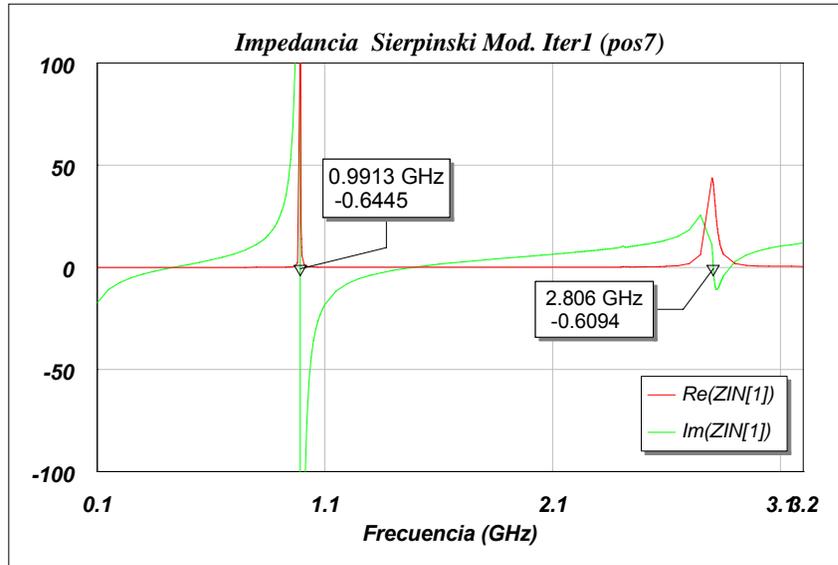
Tabla 4.10. Resultados simulación Antena Sierpinski Modificada iteración 2, alimentada en puntos diferentes

Posición	Banda resonante	Frecuencia (GHz)	Re(ZIN)	Im(ZIN)	VSWR	 S[1,1]
1	1	0,9910	4455,8000	0,9912	383,7700	0,9948
	2	2,8000	109,9780	-1,7194	2,1966	0,3743
2	1	0,9910	6220,7000	2,3691	376,2500	0,9947
	2	2,7980	88,9130	0,0579	1,7783	0,2801
3	1	1,0000	2,9940	0,0260	354,3900	0,9943
	2	2,7970	55,7450	-0,6017	1,1156	0,0546
4	1	1,0000	2,8200	-0,3781	336,9500	0,9940
	2	2,7960	22,2500	-0,0291	2,2472	0,3840
5	1	0,9910	4701,0000	2,5402	320,6000	0,9937
	2	2,4123	801,8700	-7,7615	16,0390	0,8826
6	1	1,0000	2,2466	0,0891	291,6000	0,9932
	2	2,4126	209,2400	-1,4052	4,1849	0,6142
7	1	0,9910	4373,1000	21701,0000	272,8000	0,9927
	2	2,8060	40,4940	-0,7088	1,2355	0,1053
8	1	0,9910	3508,3000	0,6346	252,1800	0,9921
	2	2,8020	110,2200	0,4239	2,2045	0,3758
9	1	0,9910	3072,9000	-0,0219	235,4500	0,9915
	2	2,8010	193,5400	3,2529	3,8719	0,5894
10	1	0,9910	2701,8000	0,3202	223,3100	0,9910
	2	2,8010	268,1200	3,0160	5,3630	0,6853

En la tabla 4.10 se observan los resultados de la simulación obtenidos para la iteración 2 para diferentes puntos de alimentación, es importante resaltar dos aspectos de la tabla, al igual que la configuración triangular se observan dos bandas de frecuencia de resonancia, pero esta vez aunque la antena fue diseñada para resonar a 2.4GHz, la antena resuena a una frecuencia ligeramente superior (2.7GHz).

La franja verde resalta el punto indicado para alimentar. Como en los casos anteriores es imposible acoplar para la frecuencia inferior a 2.4 GHz.

En la gráfica 4.8 se observan las dos frecuencias de resonancia de la antena obtenida con el simulador.



Gráfica 4.8 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski Modificada iteación2, obtenida con el simulador para la posición 7 (Ver tabla 4.7)

4.3.3.2 Ajuste de la constante dieléctrica del modelo teórico

En el capítulo III se realizó el análisis teórico de la antena Triángulo de Sierpinski modificado, sin embargo, a diferencia del Triángulo de Sierpinski los resultados difieren de los resultados del simulador, por lo tanto no se realizará un ajuste para este caso.

4.3.4 Análisis de la Antena Triángulo de Sierpinski Modificado: Iteración 3

4.3.4.1 Elección del punto de alimentación

En la figura 4.8 se observa la antena Triángulo de Sierpinski Modificada correspondiente a la iteración 3, se observan las dimensiones de la antena y el gráfico

3D en el simulador, la altura del substrato es 1.5 mm y la constante dieléctrica es 4.3. Las dimensiones de plano de tierra son: $204 \times 204 \text{mm}^2$.

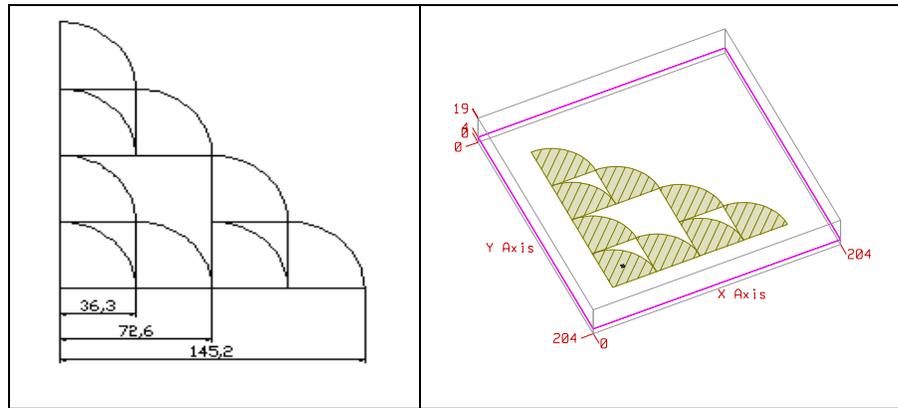


Figura 4.8 Dimensiones y gráfico 3D de la antena Triángulo de Sierpinski Mod. Iter3.

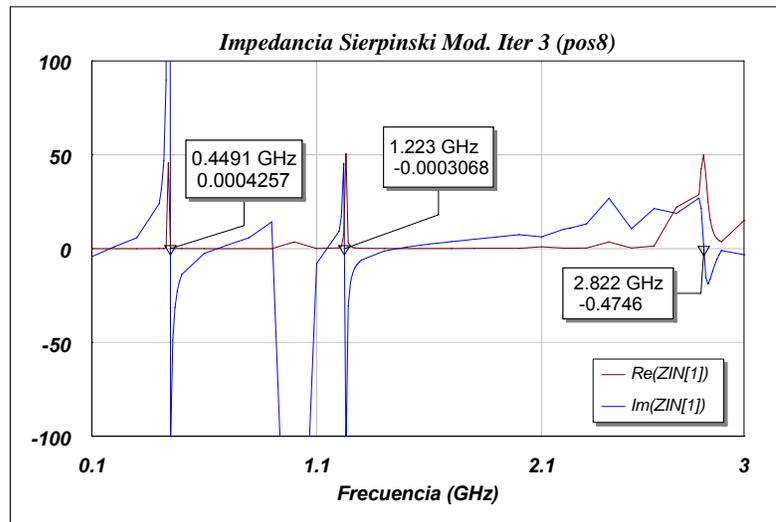
Tabla 4.11. Resultados simulación Antena Sierpinski Mod. Iter. 3 (ver tabla 4.7)

Posición	Banda resonante	Frecuencia (GHz)	Re(ZIN)	Im(ZIN)	VSWR	S[1,1]
1	1	0,4411	0,0381	-0,0086	2017,5000	0,9990
	2	1,2270	585,0100	0,4639	12,1780	0,8482
	3	2,8060	32,1340	0,0630	1,5560	0,2175
2	1	0,4500	0,0458	-0,0015	661,2200	0,9969
	2	0,9950	466,6000	0,5944	821,8200	0,9975
	3	2,4256	2097,7000	10,1514	41,9540	0,9534
3	1	0,4400	0,0030	-0,8223	581,1800	0,9965
	2	1,2272	554,6800	15,5410	11,1020	0,8347
	3	2,6500	38,3530	0,7640	1,3044	0,1321
4	1	0,4400	0,0287	1,3710	575,1700	0,9965
	2	1,2272	507,8900	10,4380	10,1620	0,8208
	3	2,6400	6,7543	-0,6483	7,4040	0,7620
5	1	0,4500	0,0423	0,0464	658,3500	0,9969
	2	1,2272	453,7600	-1,2445	9,0752	0,8014
	3	2,4246	465,2000	-0,0171	9,3041	0,8059
6	1	0,5000	0,0081	-0,2947	6646,4000	0,9997
	2	1,2272	396,5700	11,0830	7,9376	0,7762
	3	nr	nr	nr	nr	nr
7	1	0,4401	0,0224	-0,6856	552,9200	0,9963
	2	1,2273	343,1600	-13,6600	6,8742	0,7460
	3	2,8400	9,8509	-0,0012	5,0757	0,6708
8	1	0,4500	4,3430	0,1374	635,2500	0,9968
	2	1,2230	7,2766	45,4440	12,6140	0,8530
	3	2,8210	50,0510	2,2646	1,0463	0,0226
9	1	0,4492	0,0416	-0,3199	625,6800	0,9968
	2	1,2270	248,9600	53,5170	5,2185	0,6783
	3	2,8200	86,2730	-6,0196	1,7381	0,2695
10	1	0,4492	4,0590	-0,8686	615,1400	0,9967
	2	1,2270	223,2300	49,8000	4,6980	0,6490
	3	2,8180	118,4300	-1,5744	2,3692	0,4063

En la tabla 4.11 se resumen los resultados obtenidos de la simulación, como se esperaba existen tres frecuencias de resonancia, a 2.8GHz, 1.2GHz y 0.4 GHz. La franja naranja indica el punto idóneo para alimentar, en ese punto la impedancia es 50.05Ω esto implica un acoplamiento donde prácticamente no hay onda reflejada.

Es importante destacar que a diferencia de la antena cuya configuración es el triángulo de Sierpinski esta antena tiene un desplazamiento de las frecuencias de resonancia. Sin embargo al igual que las antenas anteriores solo es posible acoplar para la frecuencia mayor.

En la gráfica 4.9 se observa la impedancia de entrada en función de la frecuencia para el punto de alimentación seleccionado.



Gráfica 4.9 Impedancia de Entrada de la antena Sierpinski Modificada iteración 3, obtenida con el simulador para la posición 8 de la tabla 4.7

4.3.4.2 Ajuste de la constante dieléctrica del modelo teórico

Al igual que la configuración Triángulo de Sierpinski iteración 3 no se realizará el ajuste debido a que el análisis teórico no proporcionó el resultado esperado.

CAPITULO V

5.1 IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DE LAS ANTENAS Y RESULTADOS EXPERIMENTALES

En este capítulo se implementarán las antenas Triángulo de Sierpinski, Triángulo de Sierpinski Modificado y se realizarán pruebas experimentales, los resultados obtenidos serán comparados con los resultados teóricos obtenidos en los capítulos anteriores.

Para analizar el desempeño de una antena en general son tomados en cuenta parámetros tales como: impedancia de entrada, eficiencia, ganancia, patrón de radiación, ancho de banda y directividad. Sin embargo, este trabajo está enfocado principalmente a deducir un modelo teórico que permita analizar la antena Fractal Triángulo de Sierpinski, la principal motivación para deducir este modelo teórico es que los estudios sobre estas antenas son relativamente recientes y los resultados que se observan en la bibliografía son principalmente cualitativos. Por lo anterior es de nuestro interés verificar experimentalmente los resultados obtenidos con el modelo teórico, por lo tanto el parámetro que se medirá será el coeficiente de reflexión, conociendo el coeficiente de reflexión indirectamente se puede intuir la frecuencia de resonancia y si el sistema está debidamente acoplado.

Las pruebas experimentales también nos permitirán conocer las bandas de resonancia de las antenas verificando así el comportamiento multibanda de este tipo de antenas.

5.1.1 Construcción de las antenas Triángulo de Sierpinski y Triángulo de Sierpinski Modificado

Las antenas se realizaron sobre láminas FR4, esta lámina está conformada por tres capas o substratos, la capa superior e inferior son de material conductor en este caso cobre, y la capa intermedia es de material dieléctrico cuya constante dieléctrica es

$\epsilon_r = 4.3$. La capa inferior es el plano de tierra y en la capa superior se delinea la geometría de la antena a implementar.

Para construir la antena se utilizó Cloruro Férrico, para moldear la geometría en la capa superior, se protegió el área de la figura geométrica con una lámina adhesiva, luego se sumergió la lámina FR4 en el Cloruro, esta sustancia hace una reacción química retirando el material conductor que rodea la figura geométrica.

El conector que se usará es tipo N con chasis para soldadura, el cual se puede observar en la figura 3.1



Ilustración 5.1 Conector Tipo N con chasis

A continuación se pueden observar las antenas construidas:

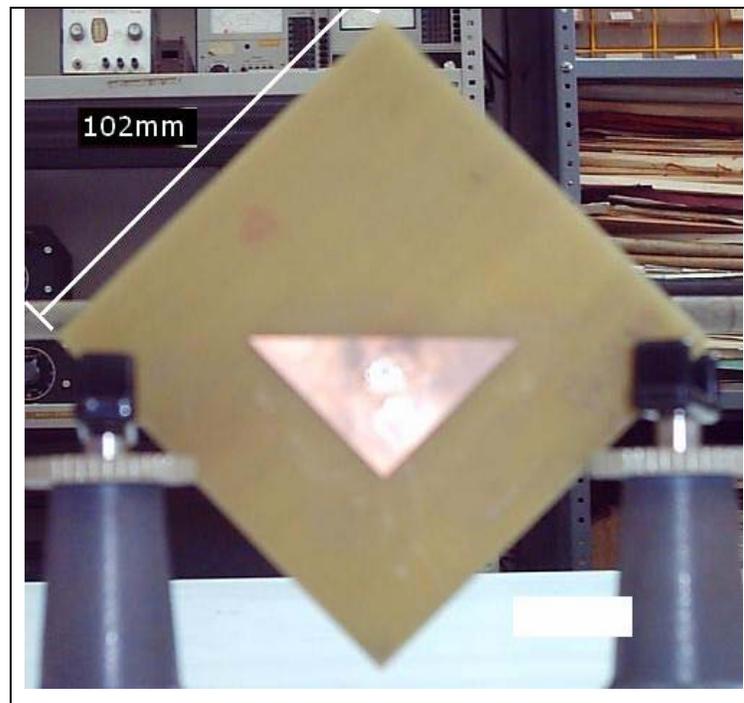


Ilustración 5.2 Antena Triangular

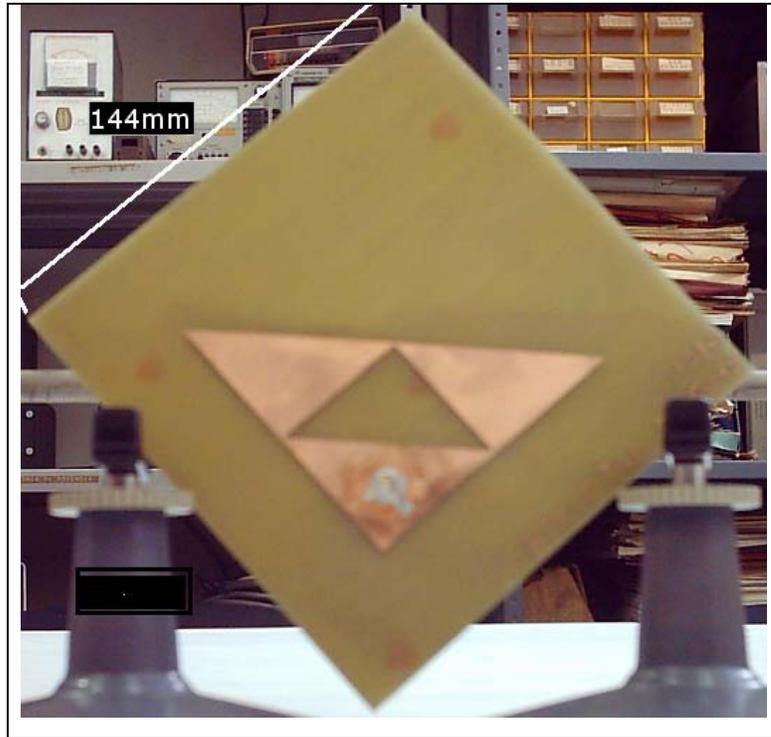


Ilustración 5.3 Antena Triángulo de Sierpinski Iteración 2

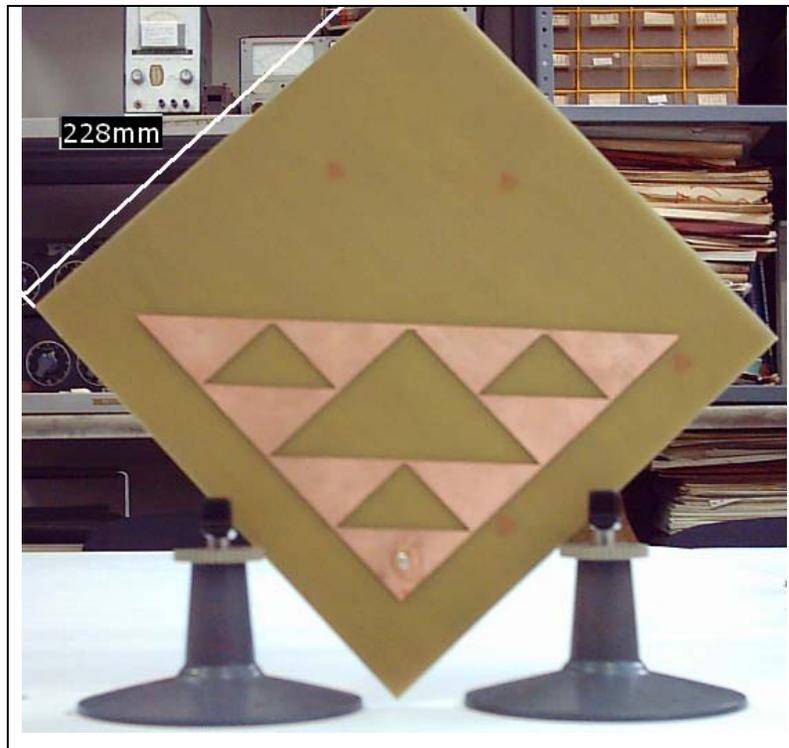


Ilustración 5.4 Antena Triángulo de Sierpinski Iteración 3

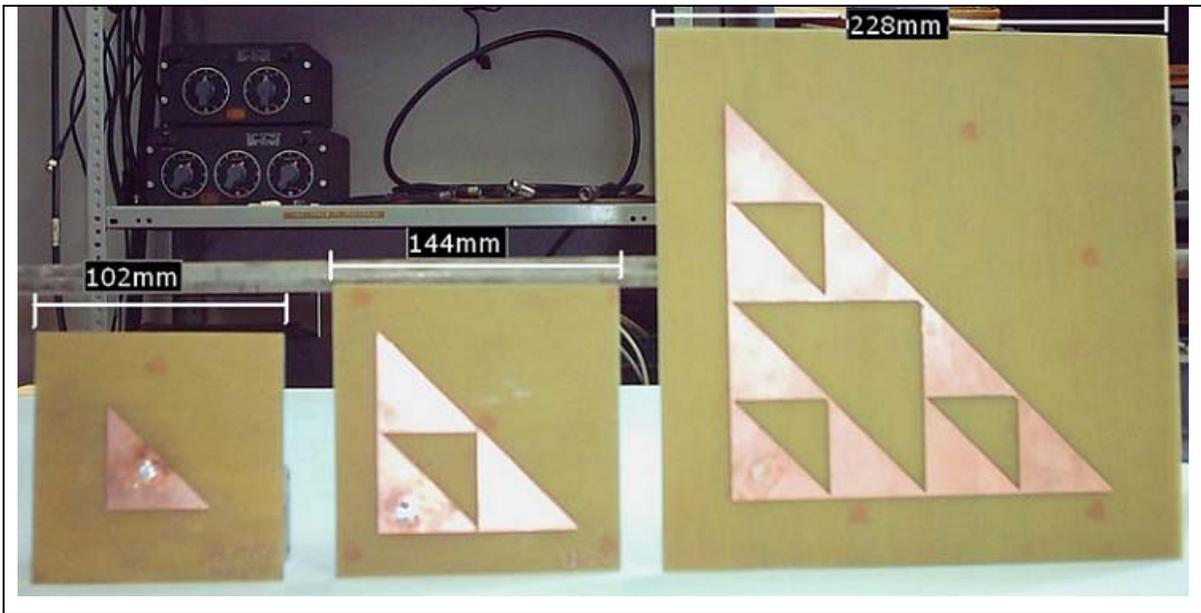


Ilustración 5.5 Antena Fractal Triángulo Sierpinski con tres iteraciones

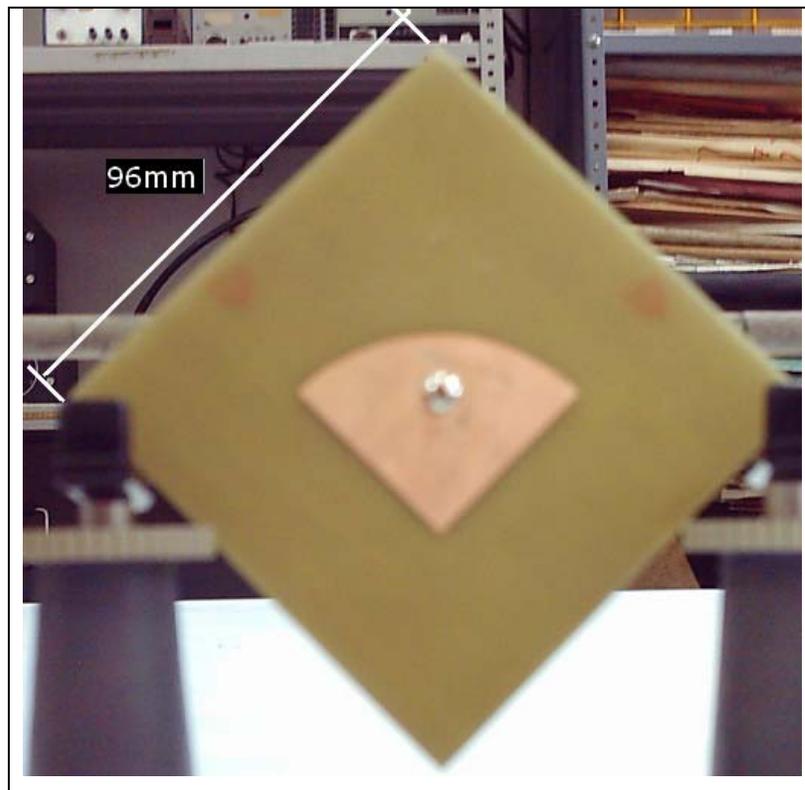


Ilustración 5.6 Antena Segmento Circular

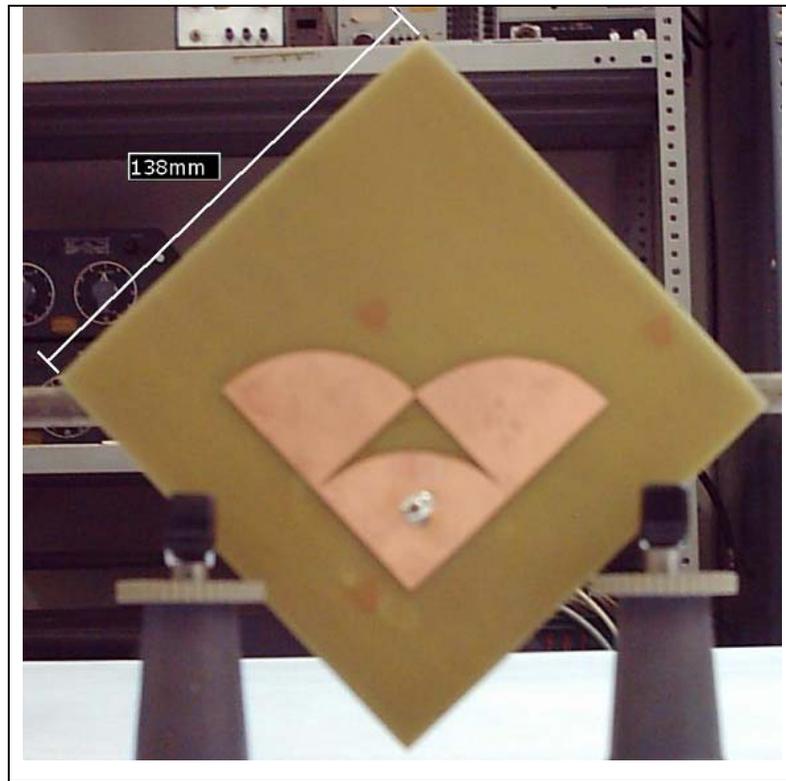


Ilustración 5.7 Antena Triángulo de Sierpinski Modificado Iteración 2

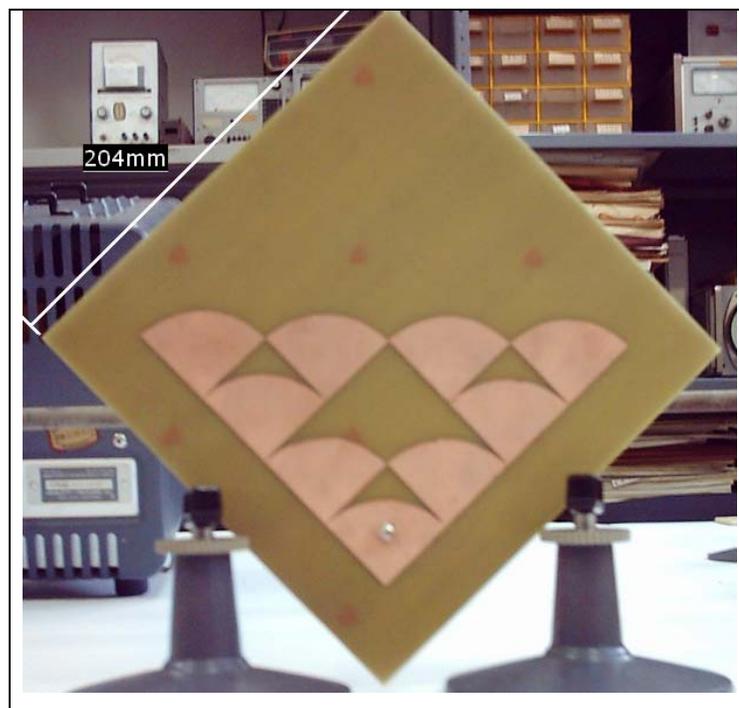


Ilustración 5.8 Antena Triángulo de Sierpinski Modificado Iteración 3

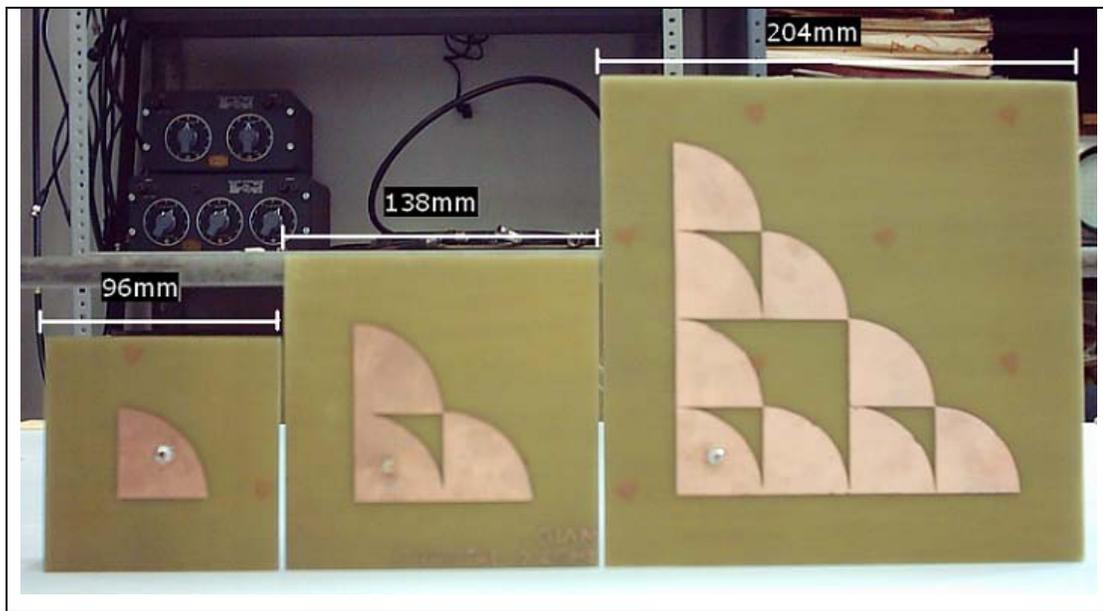


Ilustración 5.9 Antena Fractal Triángulo Sierpinski Modificado con tres iteraciones

5.2 MEDICIONES EXPERIMENTALES

5.2.1 Mediciones experimentales haciendo uso de un analizador de espectro.

La primera medición se realizó usando un analizador de espectro Anritsu Site Master S332B, el cual nos proporciona las frecuencias de resonancia, y el VSWR en un rango de frecuencias específico, en este caso el rango de análisis fue de 0.1GHz a 3GHz, a continuación se observan los resultados obtenidos.

Tabla 5.1 Mediciones obtenidas con el analizador de espectro Anritsu Site Master

ANTENA TRIÁNGULO DE SIERPINSKI			
	Pos. Alim.	Frecuencia	ROE
Iteración 1	7	2,3311	65,54
Iteración 2	5	0,7418	5,78
		2,3711	2,55
Iteración 2	6	0,7475	5,45
		2,3768	12,07
Iteración 3	5	0,3301	5,64
		0,8847	1,14
		2,4512	5,02

En la tabla 5.1 se resumen los resultados obtenidos con el analizador de espectro, se construyeron en total 4 antenas de la configuración 1 (Triángulo de Sierpinski), se construyeron dos antenas de la iteración dos y se alimentaron en puntos diferentes, por ello en la tabla una de las columnas indica la posición del punto de alimentación, la segunda columna indica las frecuencias de resonancia de cada antena en el punto de alimentación pertinente.

El valor de las frecuencias de resonancia coincide con los valores de la simulación, y difieren ligeramente de los valores del modelo teórico, se corrobora que el número de iteraciones es igual al número de frecuencias de resonancia.

Se observa que las antenas no están debidamente acopladas en discrepancia con la teoría, esto se debe probablemente al conector ya que el área de alimentación es muy grande comparada con el tamaño de triángulo.

La antena correspondiente a la iteración 1 esta totalmente desacoplada si analizamos los resultados teóricos y del simulador se observa que el punto de alimentación de acoplamiento de esta antena es muy cercano al punto en el cual la antena no resuena para la frecuencia de diseño, por lo tanto este tipo de antena no se puede acoplar apropiadamente con un conector N.

Tabla 5.2 Mediciones obtenidas con el analizador de espectro Anritsu Site Master

ANTENA TRIÁNGULO DE SIERPINSKI MODIFICADO			
	Pos. Alim.	Frecuencia	ROE
Iteración 1	6	2,2282	5,53
Iteración 1	8	2,291	3,89
Iteración 2	6	0,981	3,85
		2,714	5,78
Iteración 2	8	0,867	4,01
		2,645	5
Iteración 3	7	0,473	4,21
		1,327	3,63
		2,736	2,01

La tabla 5.2 resume los resultados proporcionados por el analizador de espectro para la configuración 2 (Triángulo de Sierpinski Modificado), se construyeron 5 antenas

de esta configuración en la tabla se observan los puntos de alimentación, las frecuencias de resonancia y el valor de ROE.

Al igual que la configuración anterior las frecuencias de resonancia son cercanas a las frecuencias que predice la teoría.

Existen discrepancias con los valores de ROE, las antenas presentan desacoplamiento probablemente se debe al conector ya que el área de alimentación es grande en proporción al tamaño de la antena, además se pierde precisión ya que si se desplaza un milímetro se puede alterar los resultados.

5.2.2 Mediciones experimentales obtenidas en el laboratorio

Se realizó el siguiente montaje en el laboratorio para obtener el coeficiente de reflexión de cada antena:

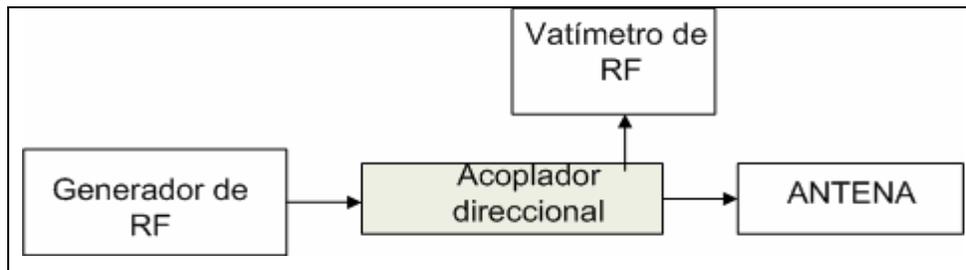


Figura 5.1 Esquema de medición para obtener el coeficiente de reflexión de las antenas

Para conocer el coeficiente de reflexión se realizó en el laboratorio el esquema de la figura 5.1, la lectura del vatímetro nos da la potencia de la onda reflejada, a este valor le restamos la onda incidente (la que viene del generador) esta diferencia nos da la potencia entregada a la carga en este caso la antena. En realidad el valor que se obtiene es el modulo del coeficiente de reflexión en este caso se desconoce la fase. En el anexo 8 se encuentran los valores obtenidos de las mediciones en el laboratorio, a continuación se presentan los resultados obtenidos de forma gráfica.

5.2.2.1 Resultados experimentales de la antena Triángulo de Sierpinski para la tres primeras iteraciones

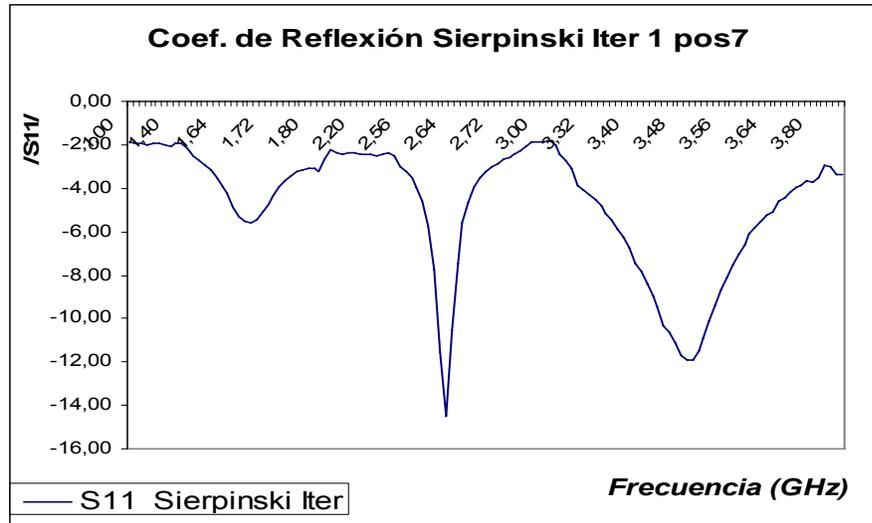


Gráfico 5.1 Modulo del coeficiente de reflexión de la antena triangular

En la figura 5.1 se observan tres resonancias, sin embargo, cabe destacar que esta antena no se comporta de la manera esperada debido a que el punto de alimentación está muy cercano al borde de la antena, esto hace que no resuene a la frecuencia de diseño.

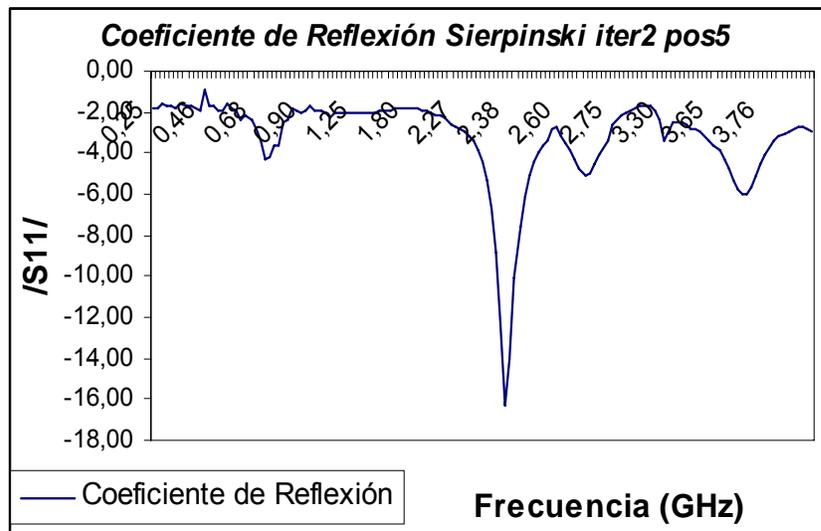


Gráfico 5.2 Modulo del coeficiente de reflexión de la antena Sierpinski Iter2

El gráfico 5.2 corresponde a la iteración dos de la configuración Triángulo de Sierpinski, allí se observan las dos frecuencias de interés, una cercana a 0.9GHz y la otra cercana a 2.4GHz, por lo tanto esta medición es similar a la medición con el Anritsu, también notamos en el gráfico que la antena esta mejor acoplada para la frecuencia de 2.4GHz.

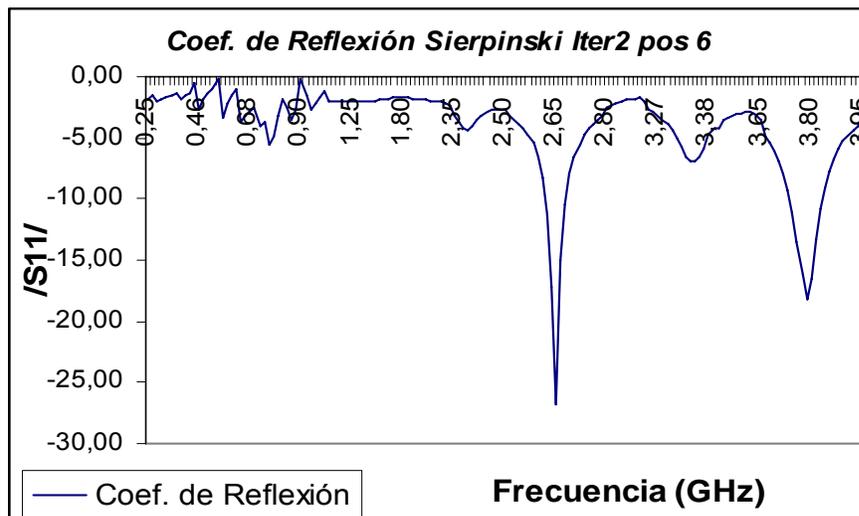


Gráfico 5.3 Modulo del coeficiente de reflexión de la antena Sierpinski Iter2

En el gráfico 5.3 se observa el modulo del coeficiente de reflexión para la iteración dos del triángulo de Sierpinski, pero alimentada en la posición 6, (Ver tabla 4.1) es decir fue desplazado el punto de alimentación en comparación con el caso anterior, aunque se observan igualmente dos frecuencias de resonancia estas están desplazadas, en este caso la antena no resuena en 2.4GHz sino en 2.65GHz, lo cual no es lo deseado.

Cabe destacar que el punto seleccionado como idóneo para alimentar la antena es el correspondiente a la posición 5.

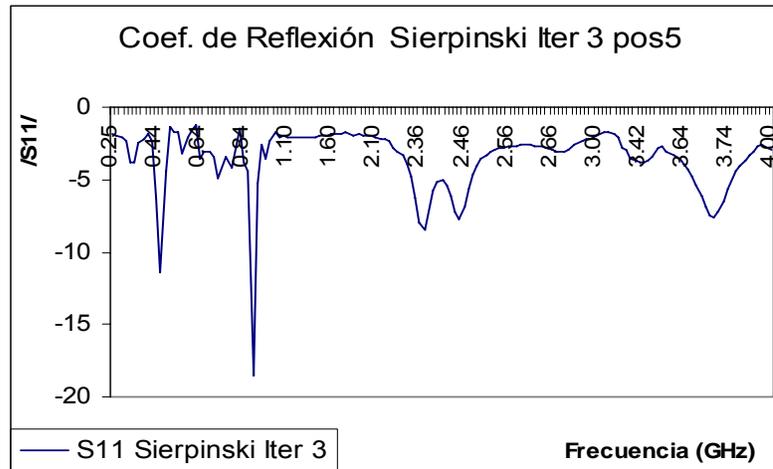


Gráfico 5.4 Módulo del coeficiente de reflexión de la antena Sierpinski Iter3

En el gráfico 5.4 se observan las tres resonancias esperadas en 0.44GHz, 0.84GHz y 2.4 GHz. La frecuencia con mejor acoplamiento es la segunda correspondiente a la frecuencia de 0.84GHz, Este resultado coincide con el resultado dado por el Anritsu. Pero difiere con los cálculos teóricos, estas discrepancias como se ha indicado anteriormente pueden deberse al conector elegido para la implementación.

5.2.2.2 Resultados experimentales de la antena Triángulo de Sierpinski Modificado para la tres primeras iteraciones

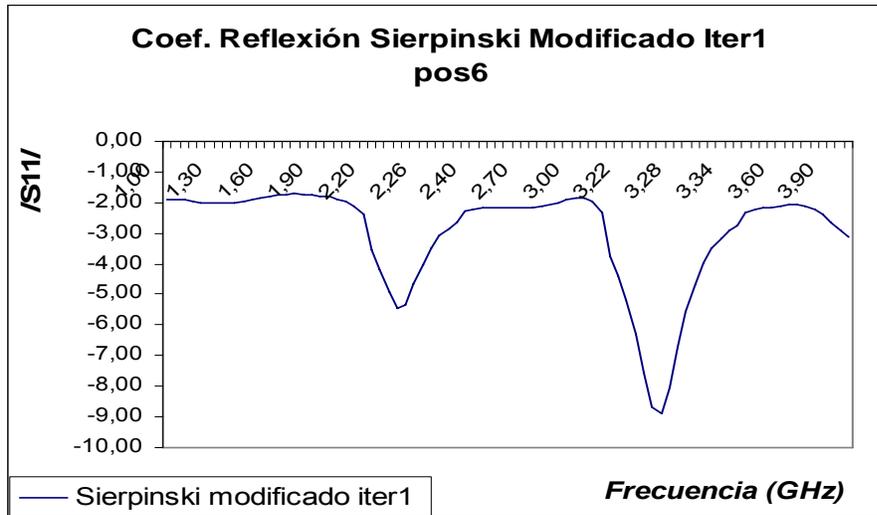


Gráfico 5.5 Modulo del coeficiente de reflexión de la antena Segmento circular

En el gráfico 5.5 se observa la resonancia cercana a 2.26GHz, este valor coincide con el valor del Anritsu y con el valor teórico, a pesar que la antena fue diseñada para resonar en 2.4GHz, los resultados teóricos y experimentales dan como frecuencia de resonancia un valor ligeramente menor.

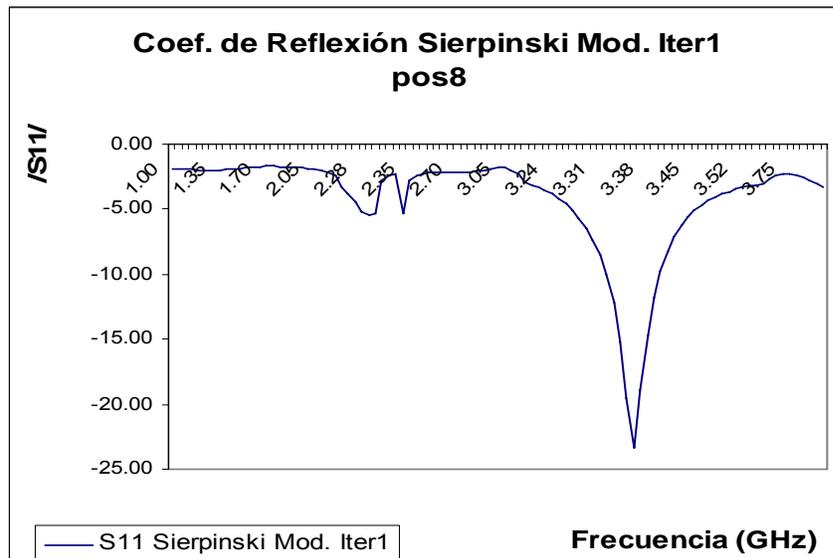


Gráfico 5.6 Modulo del coeficiente de reflexión de la antena Segmento Circular

El gráfico 5.6 corresponde al igual que el anterior al modulo del coeficiente de reflexión de la antena segmento circular. En el capítulo 4 se concluyó que esta antena era posible alimentarla de dos maneras distintas por eso se realizaron dos antenas y las pruebas experimentales evidencian que es equivalente usar la posición 6 o la posición 8 para alimentarlas.

En el gráfico 5.5 y 5.6 se observa una resonancia cercana a 2.4 GHz, también se observa una cercana a 3.4GHz sin embargo la de interés es la cercana a 2.4GHz.

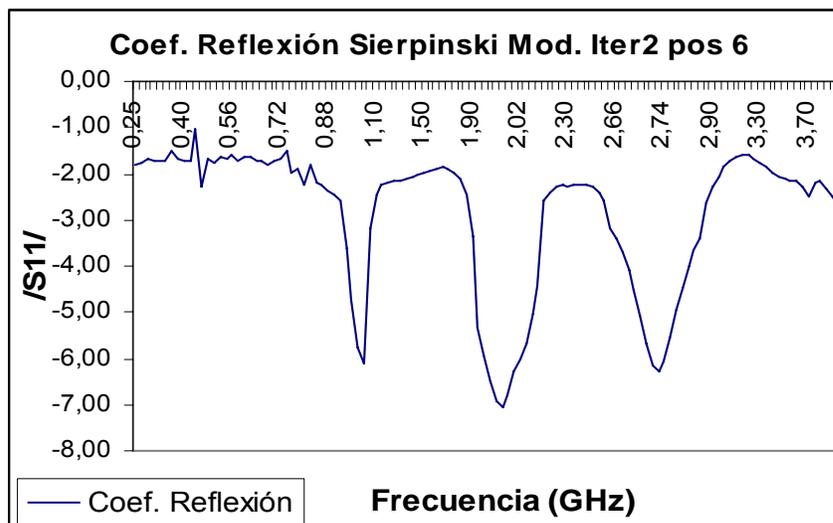


Gráfico 5.7 Modulo del coeficiente de reflexión de la antena Sierpinski Modificada iter2

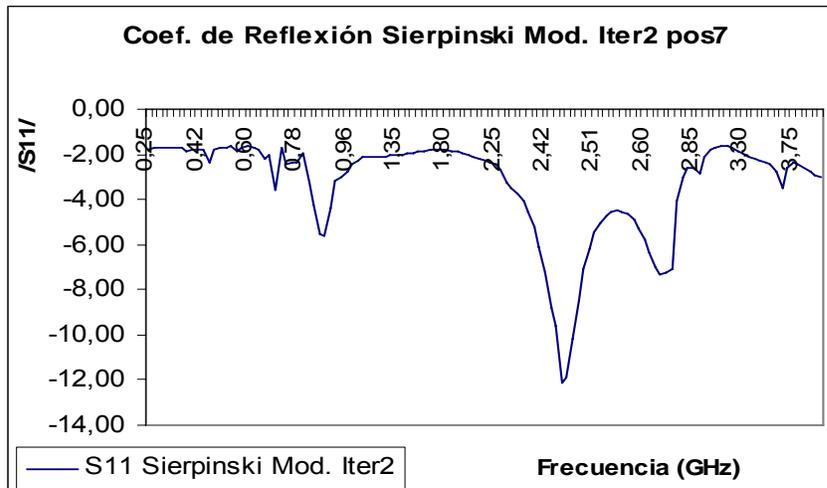


Gráfico 5.8 Modulo del coeficiente de reflexión de la antena Sierpinski Modificada iter2

Los gráficos 5.7 y 5.8 corresponden a la misma antena pero alimentada en puntos diferentes, la posición elegida en el capítulo 4 para alimentar la antena fue la posición 7, y efectivamente notamos que en el gráfico 5.8 correspondiente a esa posición las dos frecuencias de resonancia están mejor delimitadas que en el gráfico 5.7.

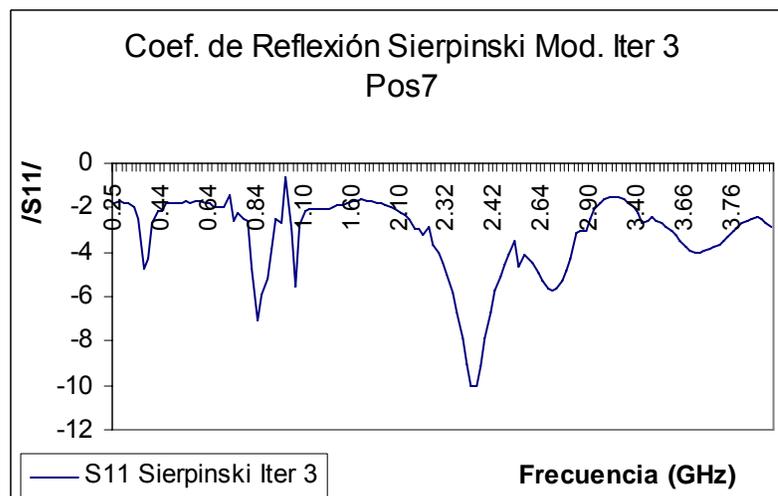


Gráfico 5.9 Módulo del coeficiente de reflexión de la antena Sierpinski Modificada iter3

Finalmente en la iteración 3 del gráfico 5.7 se observa las tres frecuencias de resonancia en los puntos esperados.

Aunque los valores de ROE no fueron los esperados, las mediciones experimentales corroboraron la aparición de nuevas bandas inferiores a medida que se aumenta la iteración como efectivamente se había determinado en la teoría.

Conclusiones

El modelo de cavidad es una teoría sencilla que nos ha permitido analizar la antena Fractal Triángulo de Sierpinski y una variante de ésta denominada Triángulo de Sierpinski Modificado. Inicialmente concebido para analizar antenas de formas geométricas simples como cuadrados, triángulos, círculos, se ha utilizado este modelo junto a la teoría de redes para analizar esta forma fractal constituida por triángulos. Aunque la metodología elegida no generó resultados satisfactorios para la iteración 3, no pierde validez ya que continua siendo una herramienta teórica útil que nos da una idea del comportamiento físico de una estructura microstrip. Y en este caso particular a pesar de las limitaciones el método predijo las dos bandas de resonancia de la iteración dos del Fractal Triángulo de Sierpinski.

El Fractal Triángulo de Sierpinski es una forma útil para ser implementada en aplicaciones de antenas, es una forma sencilla de grabar en la lámina microstrip, también es sencilla de graficar en herramientas gráficas y en los simuladores, y es simétrica lo cual es muy útil para efectos de análisis y alimentación. A medida que las iteraciones aumentan en este fractal se observa la aparición de frecuencias de resonancia menores a la frecuencia correspondiente al triángulo inferior (iteración 1). Lo cual indica que el comportamiento electromagnético está relacionado con las características propias del fractal especialmente con la propiedad de auto similitud.

Una de los mayores desafíos de las antenas fractales Triángulo de Sierpinski y Triángulo de Sierpinski Modificado (conformada por segmentos circulares), implementadas en este trabajo fue el acoplamiento, se observó que cada iteración posee una alta impedancia de entrada, lo cual imposibilitó el uso de algunas técnicas de alimentación. En este caso se usó alimentación coaxial, sin embargo, aunque la técnica fue adecuada el conector utilizado no fue el mas apropiado ya que el tamaño del conector es grande en comparación con el área del elemento radiante. Un conector

SMA podría ser más indicado debido a que disminuye el área de alimentación introduciendo así menos efectos indeseables a la antena.

Todas las antenas implementadas resonaron a una frecuencia cercana a la de diseño, y en el caso de la iteración 2 y 3, se observaron frecuencias de resonancia menores a la frecuencia de diseño, corroborando así la aparición de bandas adicionales en este tipo de antenas. Por ello el Triángulo de Sierpinski es la forma fractal que tiene como característica propia el comportamiento multibanda en una antena.

La antena derivada del Triángulo de Sierpinski ideada para este trabajo y conformada por segmentos circulares mostró un comportamiento similar a la antena conformada por triángulos, las frecuencias de resonancia fueron muy parecidas y el análisis fue semejante, demostrando así que el fractal triángulo de Sierpinski es una forma versátil que puede ser perturbada para experimentar y mejorar características inherentes a ella.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] Talanquer, Vicente. *Fractus, Fracta, Fractal, Fractales de Laberintos y Espejos.*, (Libro).—Mexico D.F: Mexico: Fondo de Cultura Económica, 1996. p. 25

[2] Cohen, Nathan. *Fractal Antenas: Part 1.* —**EN:** Communications Quarterly. -- (1995), p.p 7-22.

[3] Puente-Baliarda, Carles.; Romeo, Jordi. *On the Behavior of the Sierpinski Multiband Fractal Antenna.*—**EN:** IEEE Trans. on Antennas and Propagation.— Vol.46, N° 4(1998), p.p 517-524.

[4] Vinoy K.J. *Fractal Shaped Antenna Elements for Wide- and Multi-Band Wireless Applications*, (Tesis). — The Pennsylvania State University, 2002.

[5] Puente, C; Romeu, J; Pous, R; Garcia, X; Benitez, F. *Fractal Multiband Antenna based on The Sierpinski Gasket.*—**EN:** Electronics Letters.— Vol.32, N° 1 (1996), p.p 1-2.

[6] Romeu, Jordi; Soler Jordi. *Generalized Sierpinski Fractal Multiband Antenna.*— **EN:** IEEE Trans. on Antennas and Propagation. — Vol.49, N° 8 (2001), p.p 1237-1239.

[7] Puente, Carles; Romeu, Jordi; Navarro, Monica; Borja, Carmen. *Antenas Fractales Duales para GSM/DCS.* —**EN:** Mundo Electrónico. — N° 298 (1999).

[8] Puente, C; Romeu, J; Bartolemé, R; Pous, R. *Perturbation of the Sierpinski Antenna to allocate operating bands.*—**EN:** Electronics Letters.— Vol.32, N° 24 (1996), p.p 2186-2188.

[10] Lee, Kai-Fong; Luk, Kwai-Man; Dahele, Jashwant S. *Characteristics of the Equilateral Triangular Patch Antenna.*—**EN:** IEEE Trans. on Antennas and Propagation. — Vol.36, N° 11(1988), p.p 1510-1518.

[11] Helszajn, Joseph; James, David S. *Planar Triangular Resonators with Magnetic Walls.*—**EN:** IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. — Vol. MTT-26, N°2 (1978), p.p 95-100.

[12] Helszajn, Joseph; James, David S; Terence Nisbet, W. *Circulators using Planar Triangular Resonators.*—**EN:** IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. — Vol. MTT-27, N°2 (1979), p.p 188-193.

[9] Lo, Y.T; Solomon, D; Richards, W.F. *Theory and Experiment on Microstrip Antennas.*—**EN:** IEEE Trans. on Antennas and Propagation. — Vol.AP-27, N° 2(1979), p.p 137-145.

[13] Elliott, Robert S. *Antenna theory and design.*, (Libro).—Englewood Cliffs, New Jersey: USA: Prentice-Hall, Inc., 1981. p. 99.

[14] Al-Charchafchi, S.H; Wan Ali, W.K; Ibrahim, M.R; Barnes, S.R. *Design of a Dual Patch Triangular Microstrip Antenna.*—**EN:** Applied Microwave & Wireless. — (1998), p.p 60-67.

[15] Dahele, J.S.,Lee, K.F. *On the Resonant Frequencies of the Triangular Patch Antenna.*—**EN:** IEEE Trans. on Antennas and Propagation. — Vol.AP-35, N° 1(1987), p.p 100-101.

[16] Puente Baliarda, Carles; Borja Borau, Carmen; Navarro Rodero, Monica; Romeu, Jordi. *An Iterative Model for Fractal Antennas: Application to the Sierpinski*

Gasket Antenna.—**EN:** IEEE Trans. on Antennas and Propagation. — Vol.48, N° 5(2000), p.p 713-719.

[17] Borja, C; Puente, C; Medina, A. *Iterative network Model to predict the behavior of a Sierpinski fractal network*.—**EN:** Electronics Letters.— Vol.34, N° 15 (1998), p.p 1443-1445.

[18] Adrover, A; Arriguetti, W; Baccarelli, P; Burghignoli, P; De Cupis, P. *Circuit Models of Fractal-Geometry Antennas*.—European Commission FET project IST-2001-33055, Università degli Studi di Roma ‘La Sapienza’.

[19] Watkins, J. *Circular Resonant Structures in Microstrip*.—**EN:** Electronics Letters. — Vol.5, N° 21(1969), p.p 524-525.

[Archivo Matemática@ cálculo impedancia de entrada Triángulo Sierpinski Iteración 1]

```

ClearAll["a", "b", "c", "h", "E0", "Er", "U0", "m", "mmax", "f00", "f0", "f1", "f2", "f3", "f4", "f5", "Z1", "Z2", "Z22", "Zin", "x"]
<< Graphics`PlotField3D`
<< Graphics`Graphics3D`
<< Graphics`PlotField`
<< Calculus`VectorAnalysis`
<< Graphics`Colors`
a = 4.2 * 10^(-2)
b = 9.2 * 10^(-3)
c = 11.8 * 10^(-3)
h = 1.55
E0 = 8.85 * 10^(-12)
Er = 4.4
U0 = 1.26 * 10^(-6)
mmax = 50
m1 = 5
Ez = Cos[m1 * Pi * x / a] * Cos[m1 * Pi * y / a]
hx = D[Ez, y]
hx[x, y]
hy = -D[Ez, x]
hy[x, y]
ContourPlot[Ez, {x, 0, a}, {y, 0, a}];
Plot3D[Ez, {x, 0, a}, {y, 0, a}, PlotRange -> {0, 1}, AxesLabel -> {"Time", "Depth", "Value"}];
Plot3D[Ez, {x, 0, a}, {y, 0, a}, PlotRange -> {0, h}, AxesLabel -> {"Time", "Depth", "Value"}];
Plot3D[Ez, {x, 0, a}, {y, 0, a}, PlotRange -> {0, h}, AxesLabel -> {"Time", "Depth", "Value"}, ViewPoint -> {0, -2, 2}, PlotPoints -> 30];
PlotVectorField[{hx, hy}, {x, 0, a}, {y, 0, a}, PlotPoints -> 20]

```

0.042

0.0092

0.0118

1.55

 8.85×10^{-12}

4.4

 1.26×10^{-6}

50

5

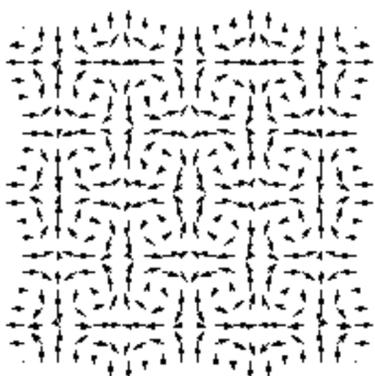
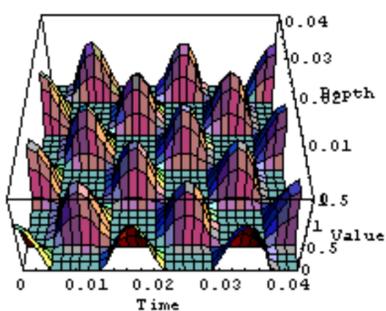
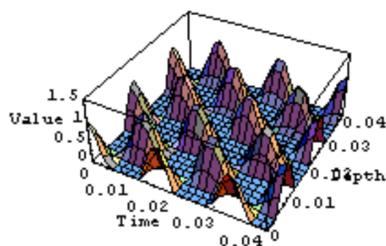
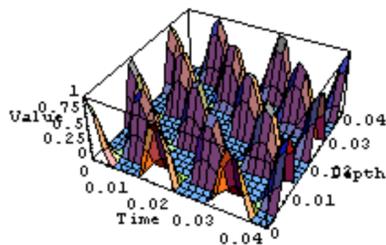
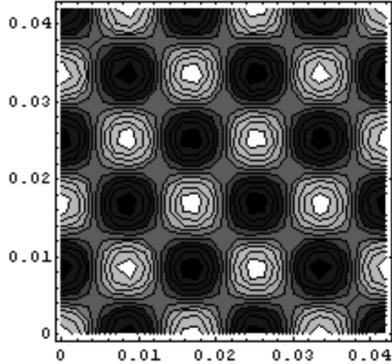
Cos[373.999 x] Cos[373.999 y]

-373.999 Cos[373.999 x] Sin[373.999 y]

(-373.999 Cos[373.999 x] Sin[373.999 y])[x, y]

373.999 Cos[373.999 y] Sin[373.999 x]

(373.999 Cos[373.999 y] Sin[373.999 x])[x, y]



- Graphics -

[Archivo Matemática@ cálculo impedancia de entrada Triángulo Sierpinski Iteración 1]

```

ClearAll["a", "b", "c", "h", "E0", "Er", "U0", "m", "mmax", "f00", "f0", "f1", "f2",
  "f3", "f4", "f5", "Z1", "Z2", "Z22", "Zin", "x"]
a = 4.2723 * 10^(-2)
b = 2.4 * 10^(-3)
c = 4.8 * 10^(-3)
h = 1.5 * 10^(-3)
E0 = 8.85 * 10^(-12)
Er = 4.3
U0 = 1.26 * 10^(-6)
mmax = 30
x = 2.39015 * 10^ (9)
f00 = E0 * Er * (1 - 0.0022 * I)
f0[x_] := Module[{y}, y = 2 * Pi * x]
f0[x]
f1[x_] := Module[{y}, y = f0[x] * Sqrt[U0 * f00]]
f1[x]
f2[m_] := Module[{y}, y = Sqrt[2] * (m * Pi / a)]
f2[m]
f3[m_] := Module[{y}, y = (Sin[(m * Pi * c) / a] - Sin[(m * Pi * b) / a])^4]
f3[m]
f4[m_] := Module[{y}, y = (4 * a^2) / (m^4 * Pi^4 * (c - b)^4)]
f4[m]
f5[x_, m_] := Module[{y}, y = h / ((f1[x])^2 - (f2[m])^2)]
f5[x, m]
Z1[x_] := Module[{y}, y = ((-I * U0 * f0[x] * 24 * h * a^2 * ((Pi * c / a) - (Pi * b / a))^4)
  / (Pi^4 * (f1[x])^2 * (c - b)^4))]
Z1[x]
Z2[x_, m_] := Module[{y}, y = (-I * f0[x] * U0 * f4[m] * f5[x, m] * f3[m])]
Z2[x, m]
Z22[x_, mmax_] := Module[{y}, y = Sum[Z2[x, m], {m, 1, mmax}]]
Zin[x_, mmax_] := Module[{y}, y = Z1[x] + Z22[x, mmax]]
p1 = Plot[Re[Zin[x, 30]], {x, 2.36 * 10^ (9), 2.41 * 10^ (9)}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}]
p2 = Plot[Im[Zin[x, 30]], {x, 2.36 * 10^ (9), 2.41 * 10^ (9)}, PlotRange -> All,
  Frame -> True, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0]}]
p3 = Plot[Re[Zin[x, 30]], {x, 2.388 * 10^ (9), 2.39 * 10^ (9)}, PlotRange -> All]
p4 = Plot[Im[Zin[x, 30]], {x, 2.388 * 10^ (9), 2.39 * 10^ (9)}, PlotRange -> All]
Show[{p1, p2}, Axes -> Automatic, Frame -> True];

```

0.042723

0.0024

0.0048

0.0015

 8.85×10^{-12}

4.3

 1.26×10^{-6}

30

 2.39015×10^9 $3.8055 \times 10^{-11} - 8.3721 \times 10^{-14} i$ 1.50178×10^{10}

103.991 - 0.11439 i

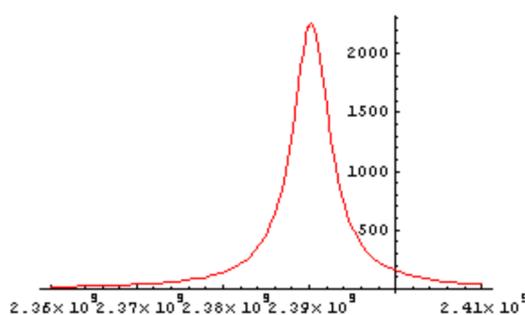
103.993 m

 $(-\text{Sin}[0.176482 \text{ m}] + \text{Sin}[0.352963 \text{ m}])^4$ 2.25912×10^6

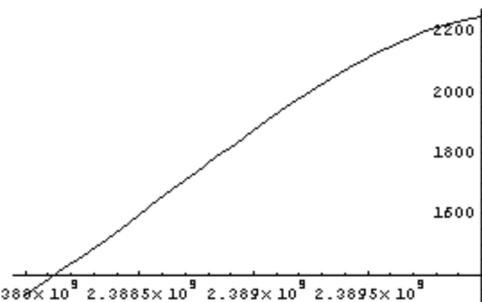
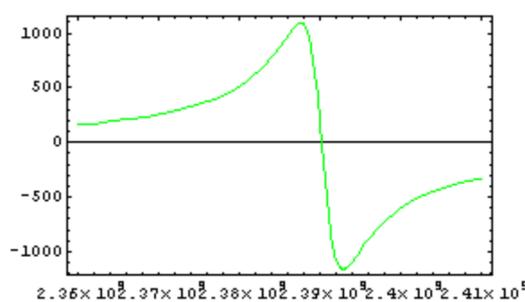
0.0015

 $(10814.1 - 23.7911 i) - 10814.5 \text{ m}^2$

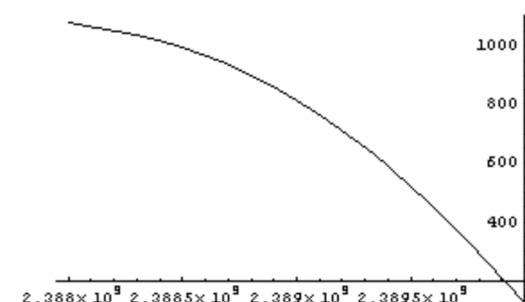
0.0759247 - 34.5112 i

$$\frac{6.41218 \times 10^7 i (-\text{Sin}[0.176482 \text{ m}] + \text{Sin}[0.352963 \text{ m}])^4}{\text{m}^4 ((10814.1 - 23.7911 i) - 10814.5 \text{ m}^2)}$$


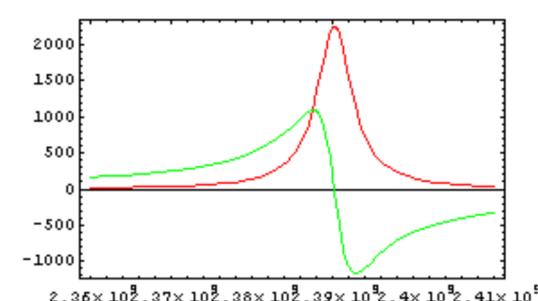
- Graphics -



- Graphics -



- Graphics -

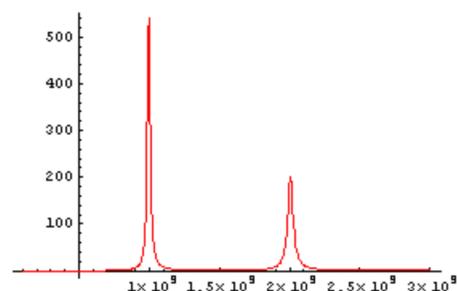


[Archivo Matemática@ cálculo impedancia de entrada Triángulo Sierpinski Iteración 2]

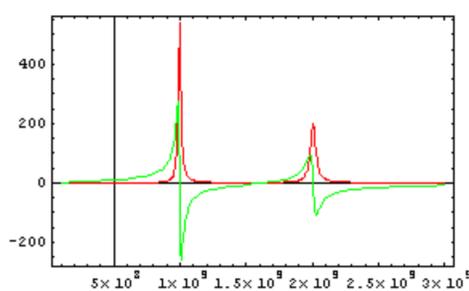
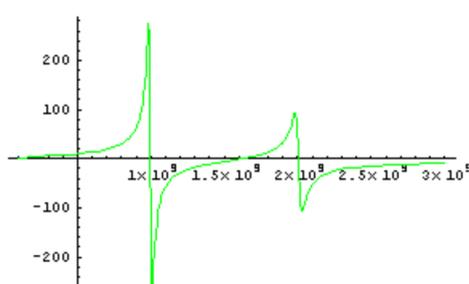
```

ClearAll["a", "b", "h", "x", "y", "U0", "Er", "E0", "m", "mmax", "f0", "f1", "f2", "f3", "f4", "f5", "f6", "f7", "Z1",
"Z2", "Z4", "Z44", "Z5", "Z55", "Z6", "Z66", "Z7", "Z77", "Z8", "Z88", "Z11", "Z12", "Z13", "Z21", "Z22", "Z23", "Z31",
"Z32", "Z33", "Z11prim", "Z12prim", "Z13prim", "Z21prim", "Z22prim", "Z23prim", "Z31prim", "Z32prim", "Z33prim",
"Zc", "I2", "I3", "Zequi", "Z21prima"]
a = 4.2723*10^(-2)
b = 4.8*10^(-3)
c = 7.2*10^(-3)
h = 1.5*10^(-3)
E0 = 8.85*10^(-12)
Er = 4.3
U0 = 1.26*10^(-6)
f00 = E0*Er*(1 - 0.023*I)
f0[x_] := Module[{y}, y = 2*Pi*x]
f0[x]
f1[x_] := Module[{y}, y = f0[x]*sqrt[U0*f00]]
f1[x]
f2[m_] := Module[{y}, y = (sqrt[2]*m*Pi)/a]
f2[m]
f3 = 4/(a^2)
f4[x_, m_] := Module[{y}, y = h/((f1[x])^2 - (f2[m])^2)]
f4[x, m]
f5[m_] := Module[{y}, y = a/((c - b)*m*Pi)]
f5[m]
f6[m_] := Module[{y}, y = Sin[(m*Pi*c)/a] - Sin[(m*Pi*b)/a]]
f6[m]
f7[m_] := Module[{y}, y = Cos[m*Pi]]
f7[m]
t3[x_] := Module[{y}, y = (-I*f0[x]*U0*f3*h)/(f1[x]^2)]
t3[x]
Z4[x_, m_] := Module[{y}, y = (-I*f0[x]*U0*f3*f4[x, m]*f5[m]^4*f6[m]^4)]
Z44[x_, mmax_] := Module[{y}, y = Sum[Z4[x, m], {m, 1, mmax}]]
Z11[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z44[x, mmax]]
Z5[x_, m_] := Module[{y}, y = (-I*f0[x]*U0*f3*f4[x, m]*f5[m]^2*f6[m]^2*f7[m])]
Z55[x_, mmax_] := Module[{y}, y = Sum[Z5[x, m], {m, 1, mmax}]]
Z12[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z55[x, mmax]]
Z13[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z55[x, mmax]]
Z21[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z55[x, mmax]]
Z31[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z55[x, mmax]]
Z6[x_, m_] := Module[{y}, y = (-I*f0[x]*U0*f3*f4[x, m]*f7[m]^2)]
Z66[x_, mmax_] := Module[{y}, y = Sum[Z6[x, m], {m, 1, mmax}]]
Z22[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z66[x, mmax]]
Z33[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z66[x, mmax]]
Z32[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z66[x, mmax]]
Z23[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z66[x, mmax]]
Z7[x_, m_] := Module[{y}, y = (-I*f0[x]*U0*f3*f4[x, m])]
Z77[x_, mmax_] := Module[{y}, y = Sum[Z7[x, m], {m, 1, mmax}]]
Z8[x_, m_] := Module[{y}, y = (-I*f0[x]*U0*f3*f4[x, m]*f7[m])]
Z88[x_, mmax_] := Module[{y}, y = Sum[Z8[x, m], {m, 1, mmax}]]
Z11prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z77[x, mmax]]
Z22prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z77[x, mmax]]
Z23prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z77[x, mmax]]
Z32prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z77[x, mmax]]
Z33prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z77[x, mmax]]
Z12prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z88[x, mmax]]
Z21prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z88[x, mmax]]
Z13prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z88[x, mmax]]
Z31prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z88[x, mmax]]
Zc[x_, mmax_] :=
Module[{y},
y =
((Z11prim[x, mmax]*Z33prim[x, mmax]) - (Z13prim[x, mmax]*Z31prim[x, mmax]) + (Z11prim[x, mmax]*Z22prim[x, mmax]) -
(Z12prim[x, mmax]*Z21prim[x, mmax]))/(Z33prim[x, mmax] + Z22prim[x, mmax])
I2[x_, mmax_] :=
Module[{y}, y = (-Z21[x, mmax]*Zc[x, mmax]) - (Z21[x, mmax]*Z33[x, mmax]) + (Z23[x, mmax]*Z31[x, mmax])/
(Zc[x, mmax]^2 + (Z33[x, mmax]*Zc[x, mmax]) + (Z22[x, mmax]*Zc[x, mmax]) + (Z22[x, mmax]*Z33[x, mmax]) - (Z23[x, mmax]*Z32[x, mma
I3[x_, mmax_] := Module[{y}, y = (Z31[x, mmax] + (Z32[x, mmax]*I2[x, mmax]))/(-Zc[x, mmax] - Z33[x, mmax])
Zequi[x_, mmax_] := Module[{y}, y = Z11[x, mmax] + (Z12[x, mmax]*I2[x, mmax]) + (Z13[x, mmax]*I3[x, mmax])
8888
Zequi[2000000000.0, 10]
xmin = 0.5*10^9)
xmax = 4*10^9)
ejex[1_] := Module[{y}, y = xmin + (1)*(xmax - xmin)]
impei = Table[{ejex[1], Im[Zequi[ejex[1], 20]}], {1, 0, 1, 0.05}}
ListPlot[impei, PlotJoined -> True, PlotRange -> All]
imper = Table[{ejex[1], Re[Zequi[ejex[1], 20]}], {1, 0, 1, 0.05}}
ListPlot[imper, PlotJoined -> True, PlotRange -> All]
p1 = Plot[Re[Zequi[x, 30]], {x, 0.1*10^9), 3*10^9)}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}]
p2 = Plot[Im[Zequi[x, 30]], {x, 0.1*10^9), 3*10^9)}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0]}]
Plot[Re[Zequi[x, 30]], {x, 0.98*10^9), 1.02*10^9)}, PlotRange -> All]
Plot[Im[Zequi[x, 30]], {x, 0.98*10^9), 1.02*10^9)}, PlotRange -> All]
Plot[Re[Zequi[x, 30]], {x, 1.95*10^9), 2.05*10^9)}, PlotRange -> All]
Plot[Im[Zequi[x, 30]], {x, 1.95*10^9), 2.05*10^9)}, PlotRange -> All]
Show[{p1, p2}, Axes -> Automatic, Frame -> True];

```



- Graphics -



[Archivo Matemática@ cálculo impedancia de entrada Triángulo Sierpinski Iteración 3]

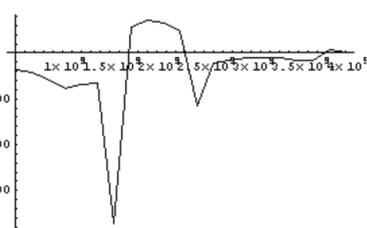
```

ClearAll["a", "b", "h", "x", "y", "U0", "Er", "E0", "m", "mmax", "f0", "f1", "f2", "f3", "f4", "f5", "f6", "f7", "Z1",
"Z2", "Z4", "Z44", "Z5", "Z55", "Z6", "Z66", "Z7", "Z77", "Z8", "Z88", "Z11", "Z12", "Z13", "Z21", "Z22", "Z23", "Z31",
"Z32", "Z33", "Z11prim", "Z12prim", "Z13prim", "Z21prim", "Z22prim", "Z23prim", "Z31prim", "Z32prim", "Z33prim",
"Zc", "I2", "I3", "Zequi", "Z21prima"]
a = 4.2723*10^(-2)
b = 4.8*10^(-3)
c = 7.2*10^(-3)
h = 1.5*10^(-3)
E0 = 8.85*10^(-12)
Er = 4.3
U0 = 1.26*10^(-6)
f00 = E0*Er*(1 - 0.01*I)
f0[x_] := Module[{y}, y = 2*Pi*x]
f0[x]
f1[x_] := Module[{y}, y = f0[x]*sqrt[U0*f00]]
f1[x]
f2[m_] := Module[{y}, y = (sqrt[2]*m*Pi)/a]
f2[m]
f3 = 4/(a^2)
f4[x_, m_] := Module[{y}, y = h/((f1[x])^2 - (f2[m])^2)]
f4[x, m]
f5[m_] := Module[{y}, y = a/((c - b)*m*Pi)]
f5[m]
f6[m_] := Module[{y}, y = Sin[(m*Pi*c)/a] - Sin[(m*Pi*b)/a]]
f6[m]
f7[m_] := Module[{y}, y = Cos[m*Pi]]
f7[m]
t3[x_] := Module[{y}, y = (-I*f0[x]*U0*f3*h)/(f1[x]^2)]
t3[x]
Z4[x_, m_] := Module[{y}, y = (-I*f0[x]*U0*f3*f4[x, m]*f5[m]^4*f6[m]^4)]
Z44[x_, mmax_] := Module[{y}, y = Sum[Z4[x, m], {m, 1, mmax}]]
Z11[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z44[x, mmax]]
Z5[x_, m_] := Module[{y}, y = (-I*f0[x]*U0*f3*f4[x, m]*f5[m]^2*f6[m]^2*f7[m])]
Z55[x_, mmax_] := Module[{y}, y = Sum[Z5[x, m], {m, 1, mmax}]]
Z12[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z55[x, mmax]]
Z13[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z55[x, mmax]]
Z21[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z55[x, mmax]]
Z31[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z55[x, mmax]]
Z6[x_, m_] := Module[{y}, y = (-I*f0[x]*U0*f3*f4[x, m]*f7[m]^2)]
Z66[x_, mmax_] := Module[{y}, y = Sum[Z6[x, m], {m, 1, mmax}]]
Z22[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z66[x, mmax]]
Z33[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z66[x, mmax]]
Z32[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z66[x, mmax]]
Z23[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z66[x, mmax]]
Z7[x_, m_] := Module[{y}, y = (-I*f0[x]*U0*f3*f4[x, m])]
Z77[x_, mmax_] := Module[{y}, y = Sum[Z7[x, m], {m, 1, mmax}]]
Z8[x_, m_] := Module[{y}, y = (-I*f0[x]*U0*f3*f4[x, m]*f7[m])]
Z88[x_, mmax_] := Module[{y}, y = Sum[Z8[x, m], {m, 1, mmax}]]
Z11prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z77[x, mmax]]
Z22prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z77[x, mmax]]
Z23prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z77[x, mmax]]
Z32prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z77[x, mmax]]
Z33prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z77[x, mmax]]
Z12prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z88[x, mmax]]
Z21prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z88[x, mmax]]
Z13prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z88[x, mmax]]
Z31prim[x_, mmax_] := Module[{y}, y = t3[x] + Z88[x, mmax]]
Zc[x_, mmax_] :=
Module[{y},
y =
((6*(Z11prim[x, mmax])^2) + (6*(Z11prim[x, mmax])^5) - (3*(Z11prim[x, mmax])^2*(Z12prim[x, mmax])^2) -
(14*(Z11prim[x, mmax])^3*(Z12prim[x, mmax]) + (5*(Z11prim[x, mmax])*(Z12prim[x, mmax])^4)) /
((6*(Z11prim[x, mmax])^3) + (6*(Z11prim[x, mmax])^4) - (5*(Z11prim[x, mmax])^2*(Z12prim[x, mmax])^2) - (Z12prim[x, mmax])^4)]
I2[x_, mmax_] :=
Module[{y}, y = (-Z21[x, mmax]*Zc[x, mmax]) - (Z21[x, mmax]*Z33[x, mmax]) + (Z23[x, mmax]*Z31[x, mmax]) /
(Zc[x, mmax]^2 + (Z33[x, mmax]*Zc[x, mmax]) + (Z22[x, mmax]*Zc[x, mmax]) + (Z22[x, mmax]*Z33[x, mmax]) - (Z23[x, mmax]*Z32[x, mmax])
I3[x_, mmax_] := Module[{y}, y = (Z31[x, mmax] + (Z32[x, mmax]*I2[x, mmax])) / (-Zc[x, mmax] - Z33[x, mmax])
Zequi[x_, mmax_] := Module[{y}, y = Z11[x, mmax] + (Z12[x, mmax]*I2[x, mmax]) + (Z13[x, mmax]*I3[x, mmax])]
8888
Zequi[2000000000.0, 10]
xmin = 0.5*10^(-9)
xmax = 4*10^(-9)
ejex[l_] := Module[{y}, y = xmin + (l)*(xmax - xmin)]
impei = Table[{ejex[l], Im[Zequi[ejex[l], 20]]}, {l, 0, 1, 0.05}]
ListPlot[impei, PlotJoined -> True, PlotRange -> All]
imper = Table[{ejex[l], Re[Zequi[ejex[l], 20]]}, {l, 0, 1, 0.05}]
ListPlot[imper, PlotJoined -> True, PlotRange -> All]
Plot[Re[Zequi[x, 30]], {x, 0.1*10^(-9), 3*10^(-9)}, PlotRange -> All]
Plot[Im[Zequi[x, 30]], {x, 0.1*10^(-9), 3*10^(-9)}, PlotRange -> All]

```

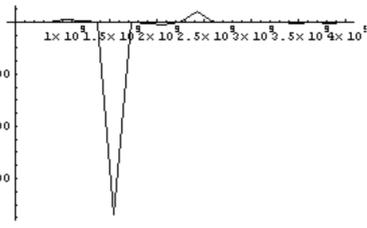
0.042723
0.0048
0.0072
0.0015
 8.85×10^{-12}
4.3
 1.26×10^{-6}
 $3.8055 \times 10^{-11} - 3.8055 \times 10^{-13} i$
 $2\pi x$
 $(4.35087 \times 10^{-8} - 2.17538 \times 10^{-10} i) x$
103.993 m
2191.47
 $\frac{0.0015}{-10814.5 \text{ m}^2 + (1.89296 \times 10^{-15} - 1.89296 \times 10^{-17} i) x^2}$
 $\frac{5.66631}{m}$
 $-\text{Sin}[0.352963 \text{ m}] + \text{Sin}[0.529445 \text{ m}]$
 $\text{Cos}[m\pi]$
 $\frac{1.37465 \times 10^8 - 1.37465 \times 10^{10} i}{x}$
8888
 $-12.4475 + 78.3684 i$
 $5. \times 10^8$
4000000000

{ {5. × 10⁸, -37.8762}, {6.75 × 10⁸, -41.1835}, {8.5 × 10⁸, -57.671}, {1.025 × 10⁹, -76.7644}, {1.2 × 10⁹, -69.1451}, {1.375 × 10⁹, -64.6399},
{1.55 × 10⁹, -371.62}, {1.725 × 10⁹, 57.725}, {1.9 × 10⁹, 71.0634}, {2.075 × 10⁹, 64.8452}, {2.25 × 10⁹, 47.4201},
{2.425 × 10⁹, -114.297}, {2.6 × 10⁹, -23.1493}, {2.775 × 10⁹, -14.7685}, {2.95 × 10⁹, -11.7062}, {3.125 × 10⁹, -10.383},
{3.3 × 10⁹, -11.0796}, {3.475 × 10⁹, -16.726}, {3.65 × 10⁹, -14.8429}, {3.825 × 10⁹, 6.20289}, {4. × 10⁹, 2.38681}}

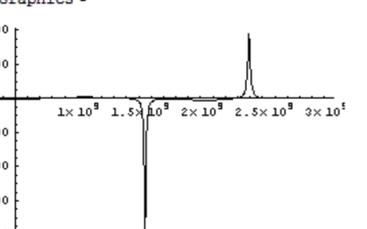


- Graphics -

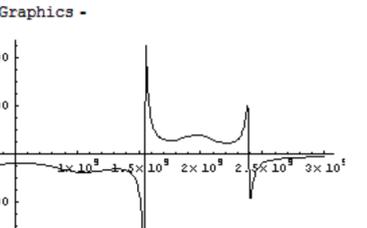
{ {5. × 10⁸, -0.912357}, {6.75 × 10⁸, -0.553377}, {8.5 × 10⁸, 2.21706}, {1.025 × 10⁹, 7.93548}, {1.2 × 10⁹, 5.67778}, {1.375 × 10⁹, 1.23792},
{1.55 × 10⁹, -737.548}, {1.725 × 10⁹, -1.40258}, {1.9 × 10⁹, -5.16223}, {2.075 × 10⁹, -12.651}, {2.25 × 10⁹, -1.35325},
{2.425 × 10⁹, 40.2731}, {2.6 × 10⁹, 1.05866}, {2.775 × 10⁹, 0.272558}, {2.95 × 10⁹, 0.0475695}, {3.125 × 10⁹, -0.295054},
{3.3 × 10⁹, -1.8717}, {3.475 × 10⁹, -3.56107}, {3.65 × 10⁹, -0.270217}, {3.825 × 10⁹, -3.46121}, {4. × 10⁹, 1.23068}}



- Graphics -



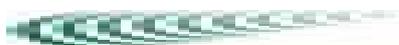
- Graphics -



- Graphics -

[ANEXO N°5]

[Hoja de datos FR4]



FR4 Estándar ED130UV

PROPERTY	UNITS	IPC 4101	ED130UV VALUE	CONDITIONING
Thickness	inches	0.059	0.059	-----
	mm	(>0.78)	1.5	-----
Construction	-----	-----	8-7628	-----
Retained Resin	%	-----	44	-----
THERMAL				
Tg (min) DSC	°C	110	135	-----
CTE - x axis	ppm/°C	-----	14	ambient to Tg
- y axis	ppm/°C	-----	13	ambient to Tg
- z axis	ppm/°C	-----	175	ambient to 288°C
Thermal Stress (288°C)	seconds	-----	>120	Condition A
ELECTRICAL				
Permittivity (Dk), max @				
1 MHz	-----	5.4	4.7	C-24/23/50
500 MHz	-----	-----	4.35	C-24/23/50
1 GHz (HP4291)	-----	-----	4.34	C-24/23/50
Loss Tangent DF (max) @				
1 MHz	-----	0.035	0.020	C-24/23/50
500 MHz	-----	-----	0.017	C-24/23/50
1 GHz (HP4291)	-----	-----	0.016	C-24/23/50
Surface Resistivity (min)	megohms	1x10 ⁴	2x10 ⁵	Condition F
	megohms	1x10 ³	1x10 ⁸	E-24/125
Volume Resistivity (min)	megohms/cm	1x10 ⁴	8x10 ⁷	Condition F
	megohms/cm	1x10 ³	2x10 ⁷	E-24/125
Dielectric Breakdown	kV	40	55	D48/50

Arc Resistance (min)	seconds	60	100	-----
Comparative Tracking Index	PLC-UL	-----	3	-----
PHYSICAL				
Peel Strength (min-1oz)	lbs/in (Kg/M)	-----	9.0 (161)	Condition A
		5.9 (105)	9.0 (161)	After thermal stress
		3.9 (70)	9.0 (161)	E-I/125
Flexural Strength (min)				
LW	psi (KG/M ²)	60,000	80,000	Condition A
		4.23x10 ⁷	5.63x10 ⁷	-----
CW	psi (KG/M ²)	50,000	60,000	Condition A
		3.52x10 ⁷	4.23x10 ⁷	-----
Warp and Twist	%	-----	0.5	Condition A
Flammability	-----	V-0	V-0	UL94
Moisture Absorption (max)	%	0.35	0.25	D-24/23
Tensil Strength				
LW	psi	-----	50,000	Condition A
CW	psi	-----	40,000	Condition A
Tensil Modulus (Young's)				
LW	psi	-----	3.5x10 ⁶	Condition A
CW	psi	-----	3.0x10 ⁶	Condition A
Flexural Modulus (Taylor's)				
LW	psi	-----	2.7x10 ⁶	Condition A
CW	psi	-----	2.4x10 ⁶	Condition A
Poisson's Ratio				
LW	-----	-----	0.136	Condition A
CW	-----	-----	0.118	Condition A

This chart produced courtesy Isola Laminate Systems

```

ClearAll["m", "n", "a", "h", "E0", "Er", "r2", "r1", "U0", "n", "x", "y", "z", "Smn", "S", "I1", "I2", "I3", "I4"]
<< NumericalMath`BesselZeros`
a = 3.63*10^(-2)
h = 1.5*10^(-3)
E0 = 8.85*10^(-12)
Er = 4.3
U0 = 1.26*10^(-6)
Ang2 = (5*Pi)/18
Ang1 = (2*Pi)/9
r2 = 19.8991*10^(-3)
r1 = 18.1651*10^(-3)
Smn[n_, m_] := Module[{y}, y = Part[BesselJPrimeZeros[2*n, {m, m}], 1]]
area = 1/2*(Ang2 - Ang1)*(r2^2 - r1^2)
Et = E0*Er*(1 - 0.005*I)
W[z_] := Module[{y}, y = 2*Pi*z]
W[z]
Kd[z_] := Module[{y}, y = W[z]*sqrt[U0*Et]]
Kd[z]
Km[n_, m_] := Module[{y}, y = Smn[n, m]/a]
I1[n_, m_] := Module[{y}, y = Integrate[(x BesselJ[2*n, ((Smn[n, m]/a)x)]^2), {x, 0, a}]]
I2 = Pi/4
I3[n_, m_] := Module[{y}, y = Integrate[(x BesselJ[2*n, ((Smn[n, m]/a)x)]), {x, r1, r2}]]
I4[n_] := Module[{y}, y = (1/(2*n))*Sin[2*n*Ang2] - Sin[2*n*Ang1]]
f[z_, n_, m_] := Module[{y}, y = 1/(Kd[z]^2 - Km[n, m]^2)]
Z0[z_, n_, m_] := Module[{y}, y = (-I*W[z]*U0*(h/area^2)*f[z, n, m]*2*(Ang2 - Ang1)^2*(I3[n, m])^2/(I2*I1[n, m])]
Zin1[z_, nfinal_, mmax_] := Module[{y}, y = Sum[Z0[z, n, m], {n, 0, 0}, {m, 1, 3}]]
Zin1[z, nfinal, mmax]
Z1[z_, n_, m_] := Module[{y}, y = (-I*W[z]*U0*(h/area^2)*f[z, n, m]*(I4[n])^2*(I3[n, m])^2/(I2*I1[n, m])]
Zin1[z, nfinal, mmax]
Z1[z_, n_, m_] := Module[{y}, y = (-I*W[z]*U0*(h/area^2)*f[z, n, m]*(I4[n])^2*(I3[n, m])^2/(I2*I1[n, m])]
Zin2[z_, nfinal_, mmax_] := Module[{y}, y = Sum[Z1[z, n, m], {n, 1, nfinal}, {m, 1, mmax}]]
Zin[z_, nfinal_, mmax_] := Module[{y},
  y1 = Zin1[z, nfinal, mmax];
  y2 = Zin2[z, nfinal, mmax];
  y = y1 + y2]
p1 = Plot[Re[Zin[z, 20, 20]], {z, 2.3*10^9, 2.5*10^9}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}]
p2 = Plot[Im[Zin[z, 10, 10]], {z, 2.3*10^9, 2.5*10^9}, PlotRange -> All, Frame -> True, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0]}]
Show[{p1, p2}, Axes -> Automatic, Frame -> True];

```

0.0363

0.0015

 8.85×10^{-12}

4.3

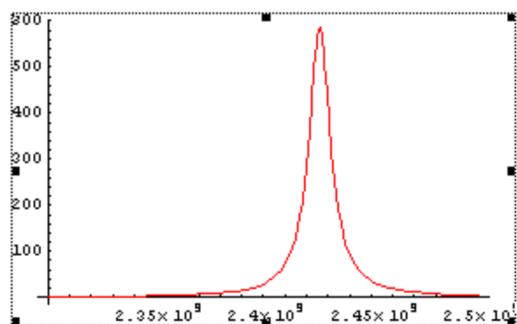
 1.26×10^{-6} $\frac{5\pi}{18}$ $\frac{2\pi}{9}$

0.0198991

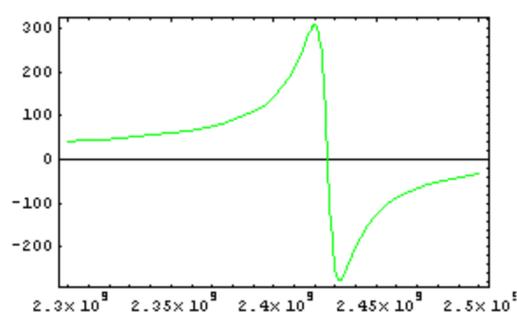
0.0181651

 5.75988×10^{-6} $3.8055 \times 10^{-11} - 1.90275 \times 10^{-13} i$ $2\pi z$ $(4.35083 \times 10^{-8} - 1.0877 \times 10^{-10} i) z$ $\frac{\pi}{4}$

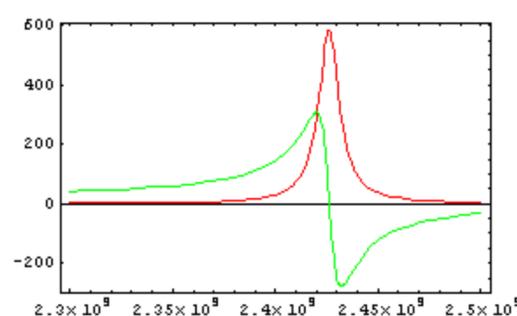
$$\frac{2.90217 \times 10^{-6} i z}{-78546.1 + (1.89296 \times 10^{-15} - 9.46481 \times 10^{-18} i) z^2} - \frac{0.0000799858 i z}{-37352.1 + (1.89296 \times 10^{-15} - 9.46481 \times 10^{-18} i) z^2} - \frac{0.0000134491 i z}{-11142.2 + (1.89296 \times 10^{-15} - 9.46481 \times 10^{-18} i) z^2}$$



- Graphics -



- Graphics -



```
ClearAll["m", "n", "a", "h", "E0", "Er", "r2", "r1", "U0", "n", "x", "y", "z", "Smn", "S", "I1", "I2", "I3", "I4"]
```

```
<< NumericalMath`BesselZeros`
```

```
a = 3.63*10^(-2)
```

```
h = 1.5*10^(-3)
```

```
E0 = 8.85*10^(-12)
```

```
Er = 4.3
```

```
U0 = 1.26*10^(-6)
```

```
Ang2 = (5*Pi)/18
```

```
Ang1 = (2*Pi)/9
```

```
r2 = 19.8991*10^(-3)
```

```
r1 = 18.1651*10^(-3)
```

```
Smn[n_, m_] := Module[{y}, y = Part[BesselJPrimeZeros[2*n, {m, m}], 1]]
```

```
area = 1/2*(Ang2 - Ang1)*(r2^2 - r1^2)
```

```
Et = E0*Er*(1 - 0.005*I)
```

```
W[z_] := Module[{y}, y = 2*Pi*z]
```

```
W[z]
```

```
Kd[z_] := Module[{y}, y = W[z]*sqrt[U0*Et]]
```

```
Kd[z]
```

```
Km[n_, m_] := Module[{y}, y = Smn[n, m]/a]
```

```
I1[n_, m_] := Module[{y}, y = Integrate[(x BesselJ[2*n, ((Smn[n, m]/a)x])^2], {x, 0, a}]]
```

```
I2 = Pi/4
```

```
I3[n_, m_] := Module[{y}, y = Integrate[(x BesselJ[2*n, ((Smn[n, m]/a)x)], {x, r1, r2}]]
```

```
I4[n_] := Module[{y}, y = (1/(2*n))*(Sin[2*n*Ang2] - Sin[2*n*Ang1])]
```

```
f[z_, n_, m_] := Module[{y}, y = 1/(Kd[z]^2 - Km[n, m]^2)]
```

```
Z0[z_, n_, m_] := Module[{y}, y = (-I*W[z]*U0*(h/area^2)*f[z, n, m]*2*(Ang2 - Ang1)^2*(I3[n, m])^2/(I2*I1[n, m])]
```

```
Zin1[z_, nfinal_, mmax_] := Module[{y}, y = Sum[Z0[z, n, m], {n, 0, 0}, {m, 1, 3}]]
```

```
Zin1[z, nfinal, mmax]
```

```
Z1[z_, n_, m_] := Module[{y}, y = (-I*W[z]*U0*(h/area^2)*f[z, n, m]*(I4[n])^2*(I3[n, m])^2/(I2*I1[n, m])]
```

```
Zin2[z_, nfinal_, mmax_] := Module[{y}, y = Sum[Z1[z, n, m], {n, 1, nfinal}, {m, 1, mmax}]]
```

```
Zin[z_, nfinal_, mmax_] := Module[{y},
```

```
  y1 = Zin1[z, nfinal, mmax];
```

```
  y2 = Zin2[z, nfinal, mmax];
```

```
  y = y1 + y2]
```

```
p1 = Plot[Re[Zin[z, 20, 20]], {z, 2.3*10^9, 2.5*10^9}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}]
```

```
p2 = Plot[Im[Zin[z, 10, 10]], {z, 2.3*10^9, 2.5*10^9}, PlotRange -> All, Frame -> True, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0]}]
```

```
Show[{p1, p2}, Axes -> Automatic, Frame -> True];
```

```
0.0363
```

```
0.0015
```

```
8.85*10^-12
```

```
4.3
```

```
1.26*10^-6
```

```
5*Pi
```

```
18
```

```
2*Pi
```

```
9
```

```
0.0198991
```

```
0.0181651
```

```
5.75988*10^-6
```

```
3.8055*10^-11 - 1.90275*10^-13 i
```

```
2*Pi*z
```

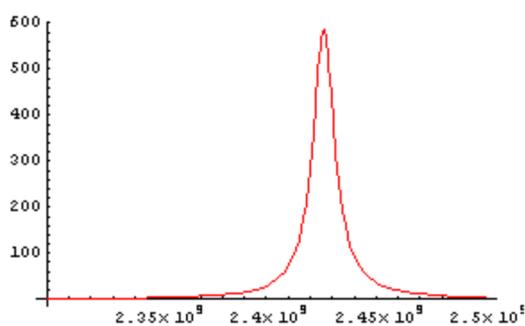
```
(4.35083*10^-8 - 1.0877*10^-10 i) z
```

```
pi
```

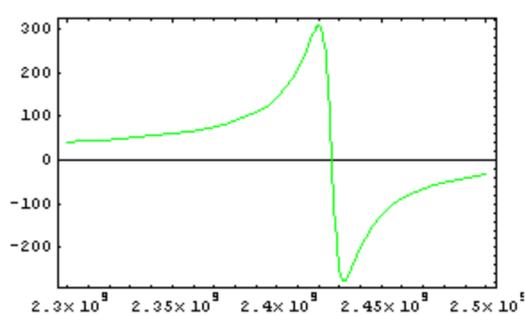
```
4
```

$$\frac{2.90217 \times 10^{-6} i z}{-78546.1 + (1.89296 \times 10^{-15} - 9.46481 \times 10^{-18} i) z^2}$$

$$-37352.1 + (1.89296 \times 10^{-15} - 9.46481 \times 10^{-18} i) z^2$$

$$\frac{0.0000134491 i z}{-11142.2 + (1.89296 \times 10^{-15} - 9.46481 \times 10^{-18} i) z^2}$$


- Graphics -



- Graphics -

