



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Estadísticas de Olas Stokes de Segundo Orden y de sus extremos aplicados al Huracán Camille

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad de Central de Venezuela por la **Br. Falnmir Mairin Muñoz Hermoso** como requisito para obtener el título de Licenciada en Matemáticas.

Tutor: MSc. José Benito Hernández

Caracas, julio 2011

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "Estadísticas de Olas Stokes de Segundo Orden y de sus extremos aplicados al Huracán Camille", presentado por la Bachiller Falnmir Mairin Muñoz Hermoso, titular de la cédula de identidad V-10.799.217, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar el título de Licenciada en Matemáticas.

MSc. José Benito Hernández Chaudary

Tutor

MSc. Angie Alexandra Pineda Centeno

Jurado

Dra. Mairene Yelitza Colina Cruz

Jurado

A mis padres César y Manuel, a mi madre Mirian, por su amor y apoyo incondicional; a mis hijos Gabriel y Miguel, por ser parte de mi vida y la razón de seguir adelante; a mi compañero de vida, Miguel por estar siempre a mi lado y por su constante estímulo; a mis seres queridos que ya no están físicamente conmigo, pero sé que me acompañan y me apoyan desde donde estén.

- Al profesor MSc. José Benito Hernández Chaudary, mi tutor, por su aporte académico, apoyo y tiempo empleado en el desarrollo de este trabajo.
 - A mis familiares y amigos por brindarme su amor, su confianza y el estímulo para concluir esta etapa en mi vida.
 - A todos los profesores, de quienes que he tenido el honor de recibir sus conocimientos.
 - Para el cálculo de todos los espectros y características espectrales se utilizó el software WAFO desarrollado por el grupo WAFO de la Universidad de Tecnología Lung, Suecia. Este software está disponible en <http://www.maths.lth.se/matstat/wafo>.
-

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	6
1.1. Conceptos básicos y notaciones utilizadas	6
1.2. Procesos Lineales	11
1.2.1. La representación espectral	13
1.2.2. Características de las Olas	16
2. Estadísticas de Olas Stokes	18
2.1. El Proceso Estocástico	18
2.2. Un análisis estadístico de olas aleatorias no lineales	19
2.3. Aproximación de Banda Estrecha	22
2.4. Modelo de Banda Estrecha	23
2.5. Distribuciones de las características de los parámetros de las olas	23
2.6. Procedimiento numérico	24
2.6.1. Cruces	24
2.6.2. La media de la intensidad de cruces hacia arriba	29
3. Análisis de datos y resultados	31
3.1. Huracán Camille	31
3.2. Análisis de datos	32
3.3. Resultados	33
3.4. Conclusiones	48
Bibliografía	50

Las tres cuartas partes de la superficie del planeta tierra están cubiertas por los océanos, los cuales almacenan el 97,26% del total de los recursos hídricos existentes. Eventos naturales como los sismos inducen la formación de unas olas conocidas como tsunamis o maremotos, los cuales han producido efectos catastróficos en diversas zonas costeras del mundo. Las magnitudes de los oleajes están asociados con las tormentas que se originan por la velocidad y la dirección de los vientos. En las zonas de latitud media las características de los vientos son influenciadas por las fuerzas centrípeta y de coriolis y ocasionan la formación de ciclones o huracanes durante algunos meses del año. Las mareas dependen de la relación sol-luna-tierra. El oleaje es una consecuencia del rozamiento del aire sobre la superficie del mar; la intensidad del oleaje depende de la intensidad del viento, de su duración y de la longitud sobre la cual éste transmite energía a la ola. Tiene como parámetros:

- La parte más alta de una ola es su cresta,
- la parte más profunda de la depresión entre dos olas consecutivas se llama valle,
- la distancia entre dos crestas se le denomina longitud de onda (λ),
- la diferencia de altura entre una cresta y un valle se le llama altura de la ola (H),
- la amplitud (A) es la distancia vertical desde la cresta hasta la línea media del agua. La amplitud vale la mitad de la altura,
- la pendiente (δ) es el cociente de la altura y la longitud de onda: $\delta = H/\lambda$,
- se llama período (τ) al tiempo que transcurre entre el paso de dos crestas consecutivas por el mismo punto,
- la velocidad de onda (también llamada velocidad de fase o celeridad), es decir la velocidad de propagación, se calcula dividiendo la longitud de onda por el período: $c = \lambda/\tau$.

En aguas profundas ($> \lambda/2$) la velocidad de onda es proporcional a la longitud de onda, en aguas muy superficiales ($< \lambda/2$) por el contrario depende sólo de la profundidad.

En los estudios de ingeniería que se realizan en el mar y en la costa es necesario predecir cuál será el comportamiento del oleaje durante las etapas de construcción y de operación de las obras, en playas, obras de protección del litoral, puertos o estructuras en mar adentro, entre otras. La predicción de las olas consiste en el pronóstico de los valores medios y extremos de amplitud, período, longitud y celeridad de las olas que pueden llegar a los sitios de influencia de los proyectos.

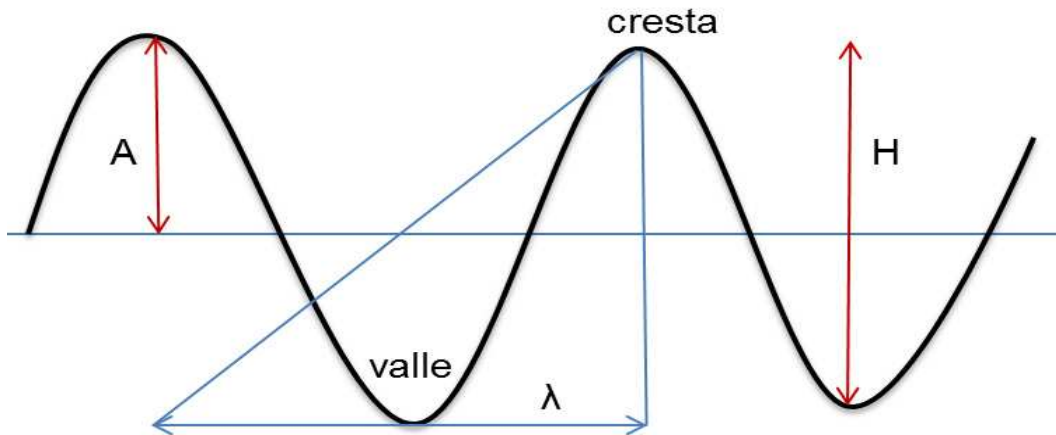


Figura 1: Parámetros de las Olas

Para realizar los pronósticos existen dos metodologías, en la primera se realizan los análisis estadísticos de los registros históricos de las olas que llegan al sitio del proyecto; la segunda utiliza métodos empíricos que tienen como referencia los estudios de investigadores de diferentes partes del mundo. Para que se pueda realizar el análisis estadístico de las olas es necesario tener un registro de olas en el sector de interés. Desafortunadamente estos registros existen en muy pocos lugares del mundo debido a los altos costos de los equipos de registro y procesamiento de datos. El registro de una variable del oleaje se realiza mediante instrumentos que registran el valor de dicha variable en un punto a intervalos constantes (intervalos de muestreo) del tiempo. Esta muestra puede ser tratada directamente como un proceso estocástico estacionario y ergódico para, directamente analizar sus propiedades estadísticas. Existen otras variables en el campo de la ingeniería marítima, como son la altura de la ola, H , o el período, T , que no son medidas directamente por los equipos, porque son consecuencia de una definición posterior realizada, en general sobre el registro del desplazamiento vertical de la superficie libre con respecto al nivel medio del mar (NMM), $\eta(t)$.

Cuando se tienen los datos históricos se seleccionan los trenes de olas que han ocurrido a lo largo de varios años, se determinan las amplitudes y los períodos de las olas y se aplican los métodos estadísticos que se describen en la literatura especializada (Longuet-Higgins, Ippen, Wiegel) para determinar la magnitud y el período de la Ola Significativa y de las Olas Máximas esperadas. Para su estudio, las olas se clasifican en olas de pequeña amplitud y olas de amplitud finita. Las primeras representan alteraciones pequeñas en la superficie del agua y no ocasionan problemas notables a las estructuras que están localizadas en alta mar o en la costa. Las olas de amplitud finita son las olas que interesan en los diseños de puertos, estructuras marinas y obras de

protección de playas. El estudio de las olas de pequeña amplitud se basa en la Teoría Lineal en la forma como fue desarrollada por Stokes. Es una aplicación simplificada de la ecuación general del flujo no permanente. Supone que el flujo es irrotacional y utiliza solamente el primer término de la ecuación de Navier-Stokes¹. El resultado es una Ola Sinusoidal que se puede apreciar en la figura 2, con las siguientes características:

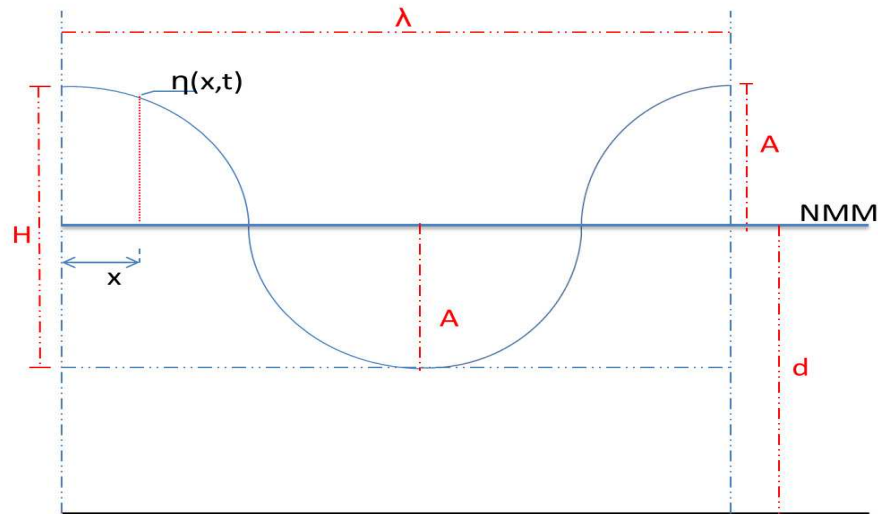


Figura 2: Ola Sinusoidal

donde:

d = es la profundidad del mar;

$H = 2A$ altura de la ola;

$\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$;

k = número de la ola = $2\pi/\lambda$;

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ = frecuencia angular;

T = período de la ola.

Para el análisis de las Olas de Amplitud Finita, Stokes añade a las ecuaciones de la Teoría Lineal los términos de orden superior de la ecuación de Navier Stokes. A continuación se observan las características de la Ola de Stokes de Segundo Grado (figura 3):

donde:

¹ $\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u = -\nabla p + \nu \Delta u + f_e(x, t)$ Ec. de Navier Stokes; con $\nu = \mu/\rho$ siendo $\rho(x, t)$ la densidad; $u(x, t)$ la función de velocidad instantánea; f_e fuerzas debido a campos externos

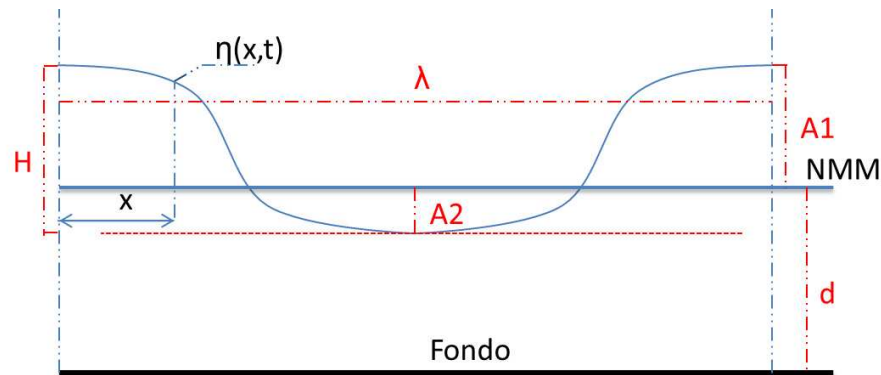


Figura 3: Ola de Stokes de Segundo Grado

A_1 = amplitud superior de la ola;

A_2 = amplitud inferior de la ola;

$H = A_1 + A_2$ altura de la ola;

$\eta(x, t) = n_1 + k_1 k_2 k_3$;

$n_1 = 0,5H \cos(kx - \omega t)$;

$k_1 = \pi H / 4\lambda$

$k_2 = H(1 + 3/2 \sinh kd)$

$k_3 = \coth kd \cos 2(kx - \omega t)$

Se puede decir que el oleaje es un conjunto de ondas que se propagan en el medio marino. Una onda es una perturbación de la superficie libre de un fluido y como tal, puede representarse como la serie de Fourier:

$$\eta = \sum A_n \cos n(kx - \omega t)$$

donde $(kx - \omega t)$ es la fase de la onda;

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ = número de la ola;

λ = longitud de la ola;

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ = frecuencia angular;

T = período de la ola.

Si se mantiene únicamente el primer término de la serie, $\eta = A_1 \cos(kx - \omega t)$, se obtiene una onda simétrica en el espacio y en el tiempo. Dicha onda tiene carácter lineal, puesto que su forma es independiente del valor de la amplitud.

Si se añade el siguiente término de la serie, $\eta = A_1 \cos(kx - \omega t) + A_2 \cos 2(kx - \omega t) = \eta_1 + \eta_2$, la onda deja de tener simetría de eje horizontal, puesto que el segundo término provoca un incremento de las crestas y un decremento de los senos.

En este estudio, consideramos los procesos no lineales de la descripción de segundo orden del mar, llamadas *Olas Stokes*. Aplicamos la fórmula de Rice para estimar la intensidad media de cruces hacia arriba de diferentes niveles del mar. Las intensidades calculadas numéricamente son usadas para determinar aproximadamente las distribuciones de las características de los parámetros de las olas en mares no gaussianos.

En el capítulo 1 se enunciarán los conceptos básicos, lemas y teoremas que serán utilizados en el desarrollo del presente trabajo; también se verán las propiedades estadísticas de los procesos lineales y sus principales características.

En el capítulo 2 se trabajará el estudio de las olas que no se adecúan a un sistema lineal, las *Olas Stokes*. Se dará un análisis estadístico de las olas aleatorias no lineales. Los modelos de ancho espectral a estudiar corresponden a banda estrecha. Se verán algunas características para este modelo de ancho espectral. Se realizará el procedimiento numérico para el calcular el número de cruces hacia arriba. A través de la fórmula de Rice, se mostrarán las fórmulas que permiten calcular el valor esperado para el número de cruces en un intervalo.

En el capítulo 3 se hará una breve reseña de lo que fue el huracán Camille y sus principales características. También se hace mención de la herramienta de análisis estadístico que se utilizó para obtener las características básicas de los registros del huracán Camille (altura significativa, período de pico, número de cruces de cero, período de la cresta, entre otros), así como también los gráficos de la densidad espectral y la distribución conjunta del período y la amplitud de la cresta. Se mostrarán los resultados obtenidos. El conjunto de datos del huracán Camille fueron facilitados por el Profesor Joaquín Ortega² y ha sido considerado previamente por diversos autores (véase por ejemplo Forristall (1978)[1] y Guedes Soares et al. (2004)[2]).

²Investigador Titular "B". Área de Probabilidad y Estadística del Cimat.

Capítulo 1

Preliminares

Como se dijo en la introducción, las olas de pequeña amplitud se basan en la teoría lineal, puesto que su forma es independiente del valor de la amplitud, A , que es únicamente un factor de escala. La teoría que describe este tipo de ondas, supone que A es tal que el valor de Ak es muy pequeño, $Ak \ll 1$, lo que permite despreciar los términos de orden $\circ((Ak)^2)$. La velocidad es independiente de la profundidad del mar, pero depende de la propia longitud de onda. Ondas de este estilo son las olas de viento, es decir, las olas corrientes que estamos acostumbrados a observar sobre la superficie marina.

Para poder definir los procesos lineales y no lineales, es necesario enunciar algunas definiciones, notaciones, lemas, teoremas, entre otros, que se darán a continuación.

1.1. Conceptos básicos y notaciones utilizadas

La superficie del mar se puede ver como una superficie aleatoria que evoluciona en el tiempo; es decir, como un proceso aleatorio η que depende de la posición en el espacio x , del tiempo t y, por supuesto, de un parámetro aleatorio ω que pertenece a un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, donde Ω es el espacio muestral, formado por el conjunto de sucesos elementales del experimento; \mathfrak{F} es la σ -álgebra, que es la colección de todos los sucesos aleatorios y P la función de probabilidad que asigna una probabilidad a todo suceso. La mayoría de los datos estadísticos sobre la altura del mar se obtienen de boyas, barcos, plataformas estacionarias o de observaciones satelitales. En el primer caso la información que se obtiene es la evolución a lo largo del tiempo de la ola *en un punto fijo x del espacio*. En este caso usaremos la notación $\eta(t)$ para la altura del nivel del mar en un punto fijo como función del tiempo. Consideraremos que estamos observando al mar desde una posición

fija, una boya por ejemplo, y registramos la altura del mar en ese punto como función del tiempo.

Las definiciones que a continuación se presentan, son necesarias para definir procesos ergódicos que enunciaremos posteriormente.

Definición 1.1.1 Una transformación T medible de (Ω, \mathfrak{F}) sobre él mismo es una función definida sobre Ω tal que la imagen inversa bajo T de todos los conjuntos en \mathfrak{F} , son de \mathfrak{F} ; esto es, $T^{-1}A = \{\omega; T\omega \in A\} \in \mathfrak{F}$.

Definición 1.1.2 a) Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Una transformación T de $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ sobre él mismo se dice que preserva la medida si

$$P(T^{-1}A) = P(A) \quad \text{para todo } A \in \mathfrak{F}. \quad (1.1)$$

b) Dado un espacio medible (Ω, \mathfrak{F}) y una transformación T de (Ω, \mathfrak{F}) , sobre él mismo, una medida de probabilidad P se dice invariante si se cumple (1.1).

Definición 1.1.3 Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Sea una transformación T que preserva la medida de Ω en sí misma.

a) Una variable aleatoria x sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ se dice invariante bajo T si $x(\omega) = x(T\omega)$ para casi todo $\omega \in \Omega$.

b) Un conjunto $A \in \mathfrak{F}$ se dice invariante bajo T si $T^{-1}A = A$.

La siguiente definición es muy importante para describir las propiedades estadísticas de los procesos que describen el mar.

Definición 1.1.4 Una transformación T que preserva la medida sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ es llamada ergódica si todo conjunto invariante $A \in \mathfrak{F}$ tiene $P(A) = 0$ ó $P(A) = 1$; es decir, todo conjunto invariante es trivial. Algunas veces el término “métricamente transitivo” es utilizado en lugar de “ergódico”.

Teorema 1.1.1 Sea T una transformación que preserva la medida sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Entonces T es ergódico si y sólo si toda variable aleatoria invariante x es casi siempre una constante. Es suficiente que toda variable aleatoria acotada invariante sea casi siempre constante.

Demostración. Primero asumimos que toda variable aleatoria invariante acotada es constante y tomamos un conjunto A invariante. Su función indicatriz $\mathcal{X}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ es entonces una variable aleatoria invariante y por suposición es casi siempre constante. Esto significa que el conjunto donde es 0 y 1, respectivamente, tiene probabilidad 0 ó 1; es decir, $P(A) = 0$ ó 1. Así T es ergódica.

Por otro lado, tomamos T ergódico y consideramos una variable aleatoria arbitraria invariante x , probaremos que x es casi siempre constante.

Definimos para x_0 real,

$$A_{x_0} = \{\omega; x(\omega) \leq x_0\}$$

entonces $T^{-1}A_{x_0} = \{\omega; T\omega \in A_{x_0}\} = \{\omega; x(T\omega) \leq x_0\} = A_{x_0}$, ya que x es invariante. Pero entonces, por ergodicidad, $P(A_{x_0}) = 0$ ó 1 , dependiendo de x_0 , y es fácil ver que entonces hay un \tilde{x}_0 tal que $P(x = \tilde{x}_0) = 1$, por lo tanto, x es constante. \square

Definición 1.1.5 (Identidad de Parseval) . Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , continua a trozos y sean A_k y B_k sus coeficientes de Fourier, entonces

$$\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 + B_k^2 = \|f\|_2^2.$$

Antes de enunciar el teorema de Bochner, el cual es imprescindible para el estudio de las propiedades de las olas del mar, es necesario dar la siguiente definición y lema.

Definición 1.1.6 Una función a valores complejos $r(t)$ definida en $(-\infty, \infty)$ se dice que es **positiva definida** si para cada entero $n \geq 1$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ y complejos z_1, \dots, z_n se tiene que

$$\sum_{j,k=1}^n r(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geq 0. \quad (1.2)$$

En particular, se asume que la suma en (1.2) es un número real.

Lema 1.1.1 Sea $r(t)$ una función continua positiva definida. Entonces

- I. $r(t) \geq 0$.
- II. $\bar{r}(t) = r(-t)$, $|r(t)| \leq r(0)$ y en particular, $r(t)$ es una función acotada.
- III. Si $\int_{-\infty}^{\infty} |r(t)| dt < \infty$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} r(t) dt \geq 0$.
- IV. Para cada $x \in \mathbb{R}$, la función $e^{itx} r(t)$, como función de t , es positiva definida.

Demostración. I. Se sigue de la definición de función positiva definida para funciones a valores complejos con $n = 1, z = 1$.

IV. También es trivial de (1.2) si reemplazamos z_k con $z_k e^{it_k x}$.

Para demostrar II., tomemos $n = 2, t_1 = t, t_2 = 0, z_1 = z, z_2 = \lambda$, donde λ es real. Entonces (1.2) se convierte en

$$r(0)(|z|^2 + \lambda^2) + \lambda r(t)z + \lambda r(-t)\bar{z} \geq 0 \quad (1.3)$$

se sigue inmediatamente que $r(t)z + r(-t)\bar{z}$ es real para cada complejo z . Más aún, dado que $r(-t)\bar{z} + \bar{r}(-t)z = 2\mathbf{Re}r(-t)\bar{z}$ es real, el número $(r(t) - \bar{r}(-t))z$ es real para cada complejo z , lo cual es solo posible cuando $r(t) - \bar{r}(-t) = 0$.

Por lo tanto, de (1.2) con $z = \bar{r}(t)$ obtenemos

$$r(0)|r(t)|^2 + r(0)\lambda^2 + 2\lambda|r(t)|^2 \geq 0$$

para todo real λ . Se sigue que $|r(t)|^4 - r^2(0)|r(t)|^2 \leq 0$. Esto demuestra la parte II.

Para la parte III., recordando que r es continua y su integral es el límite de sumas apropiadas. Viendo dt y ds como z_j y \bar{z}_k respectivamente, de (1.2) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-N}^N \int_{-N}^N r(t-s) dt ds &\sim \sum_{i,j} r(t_i - t_j) \Delta t_i \Delta t_j \geq 0, \\ 0 &\leq \frac{1}{N} \int_{-N}^N \int_{-N}^N r(t-s) dt ds = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \left(2 - \frac{|t|}{N}\right) I_{|t| \leq 2N} dt \end{aligned}$$

donde la igualdad se sigue cambiando variables $t - s = t', t + s = s'$. Por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue la última integral converge a $2 \int_{-\infty}^{\infty} r(t) dt$. Esto demuestra la parte III. y finaliza la demostración del lema. \square

Ahora procederemos a demostrar el teorema de Bochner, la demostración que aquí seguimos se debe a Cramer¹.

Teorema 1.1.2 [Teorema de Bochner]. *Sea $r(t)$ una función continua positiva definida. Entonces existe una única medida no negativa P sobre \mathbb{R} tal que $P(\mathbb{R}) = r(0)$ y*

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP(x), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Demostración. La unicidad se sigue inmediatamente de la teoría de funciones características. Probemos entonces la existencia. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $r(0) \neq 0$, incluso que $r(0) = 1$.

Asumiendo que $r(0) = 1$, primero demostremos para el caso particular en el cual

$$\int_{\mathbb{R}} |r(t)| dt < \infty. \quad (1.5)$$

¹On the representation of a function by certain fourier integrals, Trans. Amer. Math. Soc. 46 (1939) pp. 191-201.

Entonces por el Lema 1.1.1, parte II, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} |r(t)|^2 dt < \infty.$$

Ahora, definamos f como la transformada de Fourier de r

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} r(t) dt.$$

Por el Lema 1.1.1, parte III. y IV, tenemos que $f(x) \geq 0$. De la teoría de transformadas de Fourier obtenemos que $f \in L^2(\mathbb{R}, P)$ y

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx \quad (1.6)$$

para casi todo t , donde la última integral es entendida en el sentido L^2 (como el límite en L^2 de $\int_{|x| \geq N} e^{itx} f(x) dx$). Para terminar la demostración en nuestro caso particular, demostremos que f es integrable, de modo que la integral en (1.6) existe en el sentido usual y es una función continua de t , lo cual junto con la continuidad de r implica que (1.6) vale para todo t en vez de para casi todo t .

Por la identidad de Parseval, para $s > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-sx^2/2} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/(2s)} r(t) dt.$$

Tomando en cuenta que la función $\sqrt{s/(2\pi)} e^{-sx^2/2}$ es la transformada de Fourier de $e^{-t^2/(2s)}$, se tiene que la última integral se puede reescribir como $E[r(\sqrt{s}\xi)]$ donde $\xi \sim N(0, 1)$, y se ve que, debido a la acotación y continuidad de r , esta integral converge a $r(0)$ cuando $s \searrow 0$. Ahora, el teorema de convergencia monótona ($f \geq 0$) muestra que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = r(0) < \infty.$$

Esto demuestra el teorema bajo la condición (1.5).

En el caso general, para $\varepsilon > 0$, definimos

$$r_\varepsilon(t) = r(t) e^{-\varepsilon^2 t^2/2} = E[r(t) e^{it\varepsilon\xi}].$$

Por el Lema 1.1.1, parte IV se muestra que r_ε es positiva definida. Dado que $r_\varepsilon(0) = 1$ y $\int_{\mathbb{R}} |r_\varepsilon| dt < \infty$, entonces existe una distribución para la cual r_ε es la función característica.

De la teoría de probabilidad se tiene que si una sucesión de funciones características converge a una función que es continua en cero, entonces esta función es también una función característica de la función de distribución. Dado que es obvio que $r_\varepsilon \rightarrow r$ cuando $\varepsilon \searrow 0$, este hecho nos da la demostración del teorema. \square

Teorema 1.1.3 (Lema de Fatou) . Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles, $f_n \geq 0 \forall n$. Entonces se tiene que

$$\int (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx.$$

Demostración.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k.$$

Sea $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$, entonces $g_n \geq 0 \forall n$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente. Además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n. \quad (1.7)$$

Como se tiene que, para todo n , $f_n \geq g_n$, entonces

$$\int f_n dx \geq \int g_n dx \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.8)$$

Utilizando (1.7), (1.8) y el teorema de la convergencia monótona (aplicado a la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$) obtenemos:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

□

1.2. Procesos Lineales

Antes de considerar los procesos no lineales, veamos las propiedades estadísticas de los procesos lineales. Para poder obtener un modelo manejable que nos permita estudiar esta situación, es necesario hacer algunas suposiciones:

1. La estacionaridad; es decir, la permanencia en el tiempo de las condiciones del mar. En nuestro caso (y para procesos aleatorios en general) el término se refiere no a las olas sino a sus propiedades estadísticas. Por supuesto, las condiciones del mar cambian con el tiempo, y con ellas, los parámetros de las distribuciones estadísticas de la altura de las olas, su longitud, período, etc., de modo que esta hipótesis sólo se cumple parcialmente. Sin embargo, durante un intervalo de tiempo suficientemente largo de condiciones meteorológicas estables, podemos suponer que la distribución de las olas en un punto específico no cambia con el tiempo. Tiene sentido entonces hablar de altura media, longitud media, período medio y otras características estadísticas en ese punto del espacio. Decimos en este caso que el mar está *completamente desarrollado*. Supondremos entonces que el proceso que sirve de modelo es estacionario. Esto quiere decir

que la distribución de $\eta(t+h)$ es la misma para cualquier valor de h , y en particular, es siempre igual a la de $\eta(0)$. Más aún, para cualquier n y cualesquiera instantes de tiempo t_1, t_2, \dots, t_n la distribución del vector $(\eta(t_1+h), \eta(t_2+h), \dots, \eta(t_n+h))$ es independiente del valor de h .

2. El nivel medio del mar es 0 y mediremos las variaciones respecto a él. Esto quiere decir que el proceso que consideramos es centrado; es decir, $E[\eta(t)] = 0$.
3. Las trayectorias del proceso η son continuas. η es en realidad una función sobre el espacio producto $[0, \infty) \times \Omega$ con la propiedad de que para cada $t \in [0, \infty)$ fijo, $\eta(t, \cdot)$ es medible. Si fijamos $\omega \in \Omega$ obtenemos una función

$$\eta(\cdot, \omega) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

que se conoce como una trayectoria del proceso. Pedimos que para casi todo $\omega \in \Omega$ (es decir, con probabilidad 1) esta función sea continua.

4. El proceso es ergódico. El hecho de que el proceso sea ergódico, nos permite sustituir los valores esperados (teóricos) por promedios temporales (empíricos), teniéndose así que

$$\begin{aligned} E(\eta(t)) &\equiv \int_{\Omega} \eta(t, \omega) dP(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \eta(u) du \\ \text{Cov}(\eta(t), \eta(t+h)) &\equiv \int_{\Omega} \eta(t, \omega) \eta(t+h, \omega) dP(\omega) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \eta(u) \eta(u+h) du. \end{aligned}$$

5. El proceso que representa la altura de las olas es gaussiano; es decir, la distribución de la altura de la ola en un punto dado y en un instante de tiempo t tiene la siguiente función de distribución:

$$P(\eta(t) \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} dx$$

donde σ^2 es la varianza de la distribución. Aún más, para cualquier valor de n y cualesquiera instantes de tiempo t_1, t_2, \dots, t_n la distribución del vector $(\eta(t_1+h), \eta(t_2+h), \dots, \eta(t_n+h))$ tiene densidad gaussiana:

$$f_{t_1, t_2, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{u}' \Sigma^{-1} \mathbf{u}\right\}$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ y $\Sigma = \text{Cov}(\eta(t_i), \eta(t_j))$.

Lema 1.2.1 Sea $\eta(t)$ un proceso gaussiano estacionario y sea $r(t)$ su función de covarianza. Entonces la función de covarianza satisface

$$r(s, t) = \text{Cov}(\eta(s), \eta(t)) = E[\eta(s)\eta(t)] = r(|s - t|).$$

En particular, si $s = t$

$$r(s, s) = \text{Var}(\eta(s)) = E[\eta^2(s)] = r(0).$$

La función de covarianza r es par y por lo tanto, si es diferenciable en 0, la derivada debe ser nula. Más aún, si r tiene dos derivadas en el origen, la segunda derivada debe ser negativa: $r''(0) < 0$.

1.2.1. La representación espectral

La función de covarianza de cualquier proceso estacionario es positiva definida: Para cualquier n y cualesquiera z_1, \dots, z_n ,

$$\sum_{i,j=1}^n r(t_i - t_j) z_i z_j = \sum_{i,j=1}^n E(\eta(t_i)\eta(t_j)) z_i z_j = E\left(\sum_{i=1}^n \eta(t_i) z_i\right)^2 \geq 0$$

y por el teorema 1.1.2 es la Transformada de Fourier de una función de distribución que llamaremos S , es decir, r tiene una representación espectral de la forma:

$$r(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau h} dS(\tau) \quad (1.9)$$

donde S se conoce como la función de distribución espectral. Su derivada s , si existe, es la densidad espectral y se conoce también como el espectro.

Si la función de covarianza es integrable, entonces (1.9) es invertible

$$S(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\tau h) r(h) dh. \quad (1.10)$$

Usando la representación espectral tenemos

$$\begin{aligned} r'(h) &= \int_{-\infty}^{\infty} -\tau \sin(\tau h) dS(\tau) \\ r''(h) &= \int_{-\infty}^{\infty} -\tau^2 \cos(\tau h) dS(\tau) \end{aligned}$$

y en particular

$$r''(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 dS(\tau)$$

La integral anterior se conoce como el segundo momento espectral, y la denotamos

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 dS(\tau) = -r''(0) \quad (1.11)$$

Si r no es dos veces diferenciable en 0, entonces

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 dS(\tau) = \infty.$$

La existencia del segundo momento espectral está asociada a la regularidad de las trayectorias del proceso. Cuando $m_2 < \infty$ la función de covarianza tiene el siguiente desarrollo cerca del origen:

$$r(h) = \sigma^2 - \frac{m_2 h^2}{2} + o(h^2).$$

Teorema 1.2.1 Sea $\eta(t)$ un proceso gaussiano estacionario y sea $r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} f(\tau) d\tau$ su función de covarianza, donde $f(\tau)$ es la densidad espectral. Definimos $m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 f(\tau) d\tau = -r''(0)$. Entonces $m_2 < \infty$ si y solo si η es diferenciable en media cuadrática, es decir, si y solo si hay un proceso $\eta'(t)$ tal que

$$\frac{\eta(t+h) - \eta(t)}{h} \rightarrow \eta'(t) \quad \text{en } L^2. \quad (1.12)$$

Demostración. Veamos que $\eta'(t)$ existe en L^2 si y solo si $m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 f(\tau) d\tau < \infty$

Si η' existe en L^2 entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left[\frac{\eta(t+h) - \eta(t)}{h} \right]^2 = E[\eta'(t)]^2$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $r(0) = 1$, ya que $r(0) \neq 0$. Supongamos que η' existe en L^2 , entonces

$$\begin{aligned} \infty > E[\eta'(t)]^2 &= \lim_{h \rightarrow 0} E \left[\frac{\eta(t+h) - \eta(t)}{h} \right]^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} 2(1 - r(h)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{ih\tau}}{h^2} f(\tau) d\tau \stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(h\tau)}{h^2} f(\tau) d\tau \\ &\geq \int_{-\infty}^{\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} 2 \frac{1 - \cos(h\tau)}{h^2} f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

La igualdad (1) se debe a que la función es real; la desigualdad es por el lema de Fatou, es importante señalar, para poder aplicar este lema que $\frac{1 - \cos(h\tau)}{h^2} > 0$.

Por otra parte, supongamos que $\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 f(\tau) d\tau < \infty$. Esto permite definir, vía la representación espectral, el proceso gaussiano estacionario

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} i\tau \sqrt{f(\tau)} dW(\tau)$$

donde dW es el mismo ruido blanco que permite definir al proceso

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t} \sqrt{f(\tau)} dW(\tau)$$

El proceso $\xi(t)$ es el candidato a ser la derivada de $\eta(t)$.

Ahora, debemos demostrar que

$$E \left[\frac{\eta(t+h) - \eta(t)}{h} - \xi(t) \right]^2 \rightarrow 0.$$

Desarrollando el cuadrado y calculando covarianzas se obtiene el resultado. En efecto, todo se resume a mostrar que

$$2E \left[\left(\frac{\eta(t+h) - \eta(t)}{h} \right) \xi(t) \right] \rightarrow 2(-r''(0))$$

pero,

$$E[\eta(t+h)\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau h} (-i)\tau f(\tau) d\tau = -r'(h)$$

y además,

$$E[\eta(t)\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (-i)\tau f(\tau) d\tau = -r'(0) = 0$$

por la paridad de f

Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow 0} 2E \left[\left(\frac{\eta(t+h) - \eta(t)}{h} \right) y(t) \right] = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-r'(h)}{h} = 2(-r''(0)).$$

□

Como consecuencia del Teorema 1.2.1, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.2.1 *Sea $\eta(t)$ un proceso gaussiano estacionario tal que $m_2 < \infty$, entonces*

$$E(\eta'(t)) = 0, \quad \text{Var}(\eta'(t)) = -r''(0) = m_2.$$

Este proceso $\eta'(t)$ es gaussiano, independiente de $\eta(t)$ y tiene función de covarianza

$$\text{Cov}(\eta'(t), \eta(t+h)) = -r''(h) \tag{1.13}$$

La densidad conjunta de η y η' es

$$p(u, z) = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{m_2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{\sigma^2} + \frac{z^2}{m_2} \right) \right\}} \tag{1.14}$$

La ecuación (1.14) es una distribución de Rayleigh de parámetros σ^2 y m_2 .

En el estudio de las olas el espectro juega un papel fundamental y se interpreta como es usual, como la distribución de la energía por frecuencia. Observamos que $r(0) = \text{Var}(\eta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) d\tau$, de modo que la varianza del proceso representa la energía total. El espectro es simétrico y normalmente sólo se considera la parte positiva, y se renormaliza multiplicándola por 2. Por lo general se usa la misma notación s para el espectro renormalizado.

1.2.2. Características de las Olas

A continuación definiremos varias características de las olas del mar, las cuales serán utilizadas en los capítulos siguientes.

Altura significativa

La medida más importante de la severidad del mar es la altura significativa. Esta medida trata de indicar la altura de las olas más altas que uno puede encontrarse durante un período razonable de tiempo. Significativa quiere decir que es suficientemente alta como para tener efecto sobre un barco o sobre una estructura colocada en el océano. Una de las definiciones generalmente aceptadas es la siguiente:

Definición 1.2.1 *La altura significativa de un estado del mar se define como*

$$H_{m_0} = 4\sqrt{\text{Var}(\eta(t))}. \quad (1.15)$$

Características basadas en cruces del nivel medio

Otras características importantes también tienen más de una definición. La definición usual está basada en los cruces del cero. Sea $\eta(t)$ el proceso que modela las olas en un punto del espacio; $\eta(t)$ representa la altura sobre el nivel medio del mar. Supongamos que $\eta(t)$ cruza el nivel medio hacia abajo en los instantes t_1, t_2, \dots, t_n . El tiempo entre dos cruces sucesivos del nivel medio hacia abajo definen el período de la ola. Usaremos la notación $T_{d,k}$:

$$T_{d,k} = t_{k+1} - t_k$$

La distancia vertical entre el máximo y el mínimo valor del proceso en este intervalo se define como la altura de la ola. Usaremos la notación $H_{d,k}$.

Una cresta, a_C , es el máximo valor de η para t en un intervalo entre dos cruces sucesivos hacia abajo del nivel medio: $t_k < t < t_{k+1}$. De manera similar un seno, a_S , es el (valor absoluto del) valor mínimo en el mismo

intervalo de tiempo. Para distinguir diferentes crestas y senos en los intervalos sucesivos ponemos un índice k en cada valor: $(a_{C,k}, a_{S,k})$. De esta forma se tiene que

$$H_{d,k} = a_{C,k} - a_{S,k}.$$

Características basadas en extremos sucesivos

Otra definición posible considera todos los extremos de la ola. Supongamos que la ola tiene una sucesión de mínimos locales $(\eta_{m,k})$ y máximos locales consecutivos $(\eta_{M,k})$. Una ola min-max es el par $(\eta_{m,k}, \eta_{M,k})$ de valores mínimo y máximo consecutivos. La altura de la ola min-max es la diferencia entre estos valores; esto es $H_k = \eta_{M,k} - \eta_{m,k}$, mientras que el período min-max es la diferencia de tiempos correspondiente. De manera similar se define las olas max-max y min-min.

Momento espectral de orden n

El momento espectral de orden n se define como

$$m_n = \int_0^\infty \tau^n s(\tau) d\tau \quad (1.16)$$

En la sección 1.2.1 definimos el segundo momento espectral y vimos que para un proceso Gaussiano, su existencia está relacionada con la regularidad de las trayectorias. Esto es cierto en general: la existencia de momentos de orden superior está asociada a una mayor regularidad de las trayectorias.

Los momentos espectrales no son los únicos parámetros asociados a la densidad espectral de interés en el estudio del mar. Ya vimos que la altura significativa es otro de ellos. En términos de los momentos espectrales la altura significativa es

$$H_{m_0} = 4\sqrt{\text{Var}(\eta(t))} = 4\sqrt{m_0}. \quad (1.17)$$

A partir del espectro vemos que la frecuencia media está dada por

$$\frac{m_1}{m_0}$$

Si el espectro está concentrado alrededor de una frecuencia dominante, la frecuencia media da el período medio.

Capítulo 2

Estadísticas de Olas Stokes

El comportamiento de las olas no lineales se puede describir mediante la teoría de Stokes.

2.1. El Proceso Estocástico

Nos aproximamos a la altura aleatoria por las *Olas Stokes* de segundo orden, $\eta(t)$. Desde el punto de vista probabilístico, esto es un proceso estocástico, el cual se puede expresar como una suma de una parte lineal (proceso gaussiano) y una parte no lineal (transformación cuadrática de un proceso gaussiano). Más precisamente,

$$\eta(t) = \eta_g(t) + \eta_{so}(t) = \sum_{j=1}^{2N} \beta_j Z_j(t) + \lambda_j Z_j(t)^2 \quad (2.1)$$

donde los Z_j son procesos gaussianos independientes y β_j y λ_j son coeficientes calculados, basados en la información proporcionada por el espectro del mar $S(\omega_n)$, los cuales son escogidos de un estado dado del mar (H_s, T_z) , donde H_s es la altura significativa y T_z es el período de pico de los procesos Z_j . Más precisamente, esos coeficientes β_j y λ_j se obtienen siguiendo un procedimiento propuesto por Langley en [3], el cual desarrollaremos a continuación.

2.2. Un análisis estadístico de olas aleatorias no lineales

Para procesos lineales en general, la altura de las olas del mar, $\eta(t)$ se puede representar en un intervalo de tiempo T por la siguiente serie de Fourier:

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \quad (2.2)$$

donde los a_n y b_n son los coeficientes de Fourier y $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$. Si suponemos que $\eta(t)$ es estacionario y gaussiano, entonces a_n b_n son variables aleatorias gaussianas. Además:

$$E[a_n^2] = E[b_n^2] = S_{\eta\eta}(\omega_n) d\omega \quad (2.3)$$

$$E[a_n b_m] = 0; n \neq m \quad (2.4)$$

$$E[a_n a_m] = E[b_n b_m] = 0; n \neq m \quad (2.5)$$

donde $S_{\eta\eta}(\omega_n)$ es el espectro de un lado de la ola y $d\omega = 2\pi/T$. El espectro del proceso $\eta(t)$ dado en (2.2) tiende al espectro $S_{\eta\eta}(\omega_n)$ cuando $N, T \rightarrow \infty$

La ecuación (2.2) la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^N c_n \cos(\omega_n t + \epsilon_n) = \text{Re} \sum_{n=1}^N c_n e^{i(\omega_n t + \epsilon_n)} \quad (2.6)$$

donde $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$ y $\epsilon = \arctan(-b_n/a_n)$.

La ecuación (2.6) es la base de la ecuación de segundo orden de $\eta(t)$ que será desarrollada a continuación.

Usando la notación de la ecuación (2.6), la correspondiente altura de la ola de segundo orden es como sigue:

$$\eta(t) = \text{Re} \sum_{n=1}^N c_n e^{i\phi_n} + \text{Re} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n c_m [E_{n,m}^+ e^{i(\phi_n + \phi_m)} + E_{n,m}^- e^{i(\phi_n - \phi_m)}] \quad (2.7)$$

donde $\phi_n = \omega_n t + \epsilon_n$ y los términos $E_{n,m}^+$ y $E_{n,m}^-$ son funciones de ω_n, ω_m y la profundidad del agua.

El coeficiente $E_{n,m}^+$ lo podemos escribir como:

$$E_{n,m}^+ = -\left(\frac{1}{g}\right) \left(\frac{g_{nm}}{d_{nm}}\right) (\omega_n + \omega_m) \cosh(k_n + k_m) d - \left(\frac{1}{4g\omega_n\omega_m}\right) (k_n k_m g^2 - \omega_n^2 \omega_m^2) + \left(\frac{1}{4g}\right) (\omega_n^2 + \omega_m^2) \quad (2.8)$$

donde:

$$g_{nm} = \left(\frac{1}{4\omega_n\omega_m}\right) [2(\omega_n + \omega_m)(\omega_n^2 \omega_m^2 - k_n k_m g^2) + \omega_n(\omega_m^4 - g^2 k_m^2) + \omega_m(\omega_n^4 - g^2 k_n^2)] \quad (2.9)$$

$$d_{nm} = (\omega_n + \omega_m)^2 \cosh(k_n + k_m) d - g(k_n + k_m) \sinh(k_n + k_m) d \quad (2.10)$$

d representa la profundidad del agua y k_n es el número de olas asociado con la frecuencia ω_n , dado por la solución de la relación de dispersión:

$$\omega_n^2 = k_n g \tanh k_n d. \quad (2.11)$$

El coeficiente $E_{n,m}^-$ está dado por:

$$E_{n,m}^- = - \left(\frac{1}{g} \right) \left(\frac{f_{nm}}{s_{nm}} \right) (\omega_n - \omega_m) \cosh |k_n - k_m| d - \left(\frac{1}{4g\omega_n\omega_m} \right) (k_n k_m g^2 + \omega_n^2 \omega_m^2) + \left(\frac{1}{4g} \right) (\omega_n^2 + \omega_m^2) \quad (2.12)$$

donde:

$$f_{nm} = \left(\frac{1}{4\omega_n\omega_m} \right) [2(\omega_m - \omega_n)(k_n k_m g^2 + \omega_n^2 \omega_m^2) - \omega_n(\omega_m^4 - k_m^2 g^2) + \omega_m(\omega_n^4 - g^2 k_n^2)] \quad (2.13)$$

$$s_{nm} = (\omega_n - \omega_m)^2 \cosh |k_n - k_m| d - g |k_n - k_m| \sinh |k_n - k_m| d. \quad (2.14)$$

Para aguas profundas en las cuales $\tanh(k_n d) \neq 1$, las expresiones (2.8) y (2.12) se reducen a:

$$E_{n,m}^+ = \left(\frac{1}{4g} \right) (\omega_n^2 + \omega_m^2) \quad (2.15)$$

$$E_{n,m}^- = \left(\frac{1}{4g} \right) (\omega_n^2 - \omega_m^2) \operatorname{sgn}(\omega_n - \omega_m) \quad (2.16)$$

donde $\operatorname{sgn}(x)$ representa el signo de x . De las ecuaciones anteriores se deduce fácilmente que $E_{n,m}^+ = E_{m,n}^+$ y $E_{n,m}^- = E_{m,n}^-$

En la ecuación (2.6) podemos reescribir el término complejo de la siguiente forma:

$$c_n e^{i(\omega_n t + \epsilon_n)} = \sqrt{S_{\eta\eta}(\omega_n)} d\omega (x_n + iy_n) \quad (2.17)$$

donde en comparación con la ecuación (2.2), se muestra que:

$$x_n \sqrt{S_{\eta\eta}(\omega_n)} d\omega = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \operatorname{sen}(\omega_n t) \quad (2.18)$$

$$y_n \sqrt{S_{\eta\eta}(\omega_n)} d\omega = a_n \operatorname{sen}(\omega_n t) - b_n \cos(\omega_n t) \quad (2.19)$$

como a_n y b_n son variables aleatorias gaussianas, entonces para cada tiempo t fijo, x_n y y_n también son variables aleatorias gaussianas. Además, las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5) implican que:

$$E[x_n^2] = E[y_n^2] = 1 \quad (2.20)$$

$$E[x_n y_m] = 0; n \neq m \quad (2.21)$$

$$E[x_n x_m] = E[y_n y_m] = 0; n \neq m \quad (2.22)$$

La ecuación (2.7) representa los dos primeros términos en una solución de perturbación de la ecuación no lineal. Usando la ecuación (2.17), la ecuación (2.7) se puede reescribir como:

$$\eta(t) = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^N S_n(x_n + iy_n) + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N [(E_{n,m}^+)'(x_n + iy_n)(x_m + iy_m) + (E_{n,m}^-)'(x_n + iy_n)(x_m - iy_m)] \quad (2.23)$$

donde:

$$s_n = \sqrt{S\eta\eta(\omega_n)d\omega} \quad (2.24)$$

$$(E_{n,m}^+)' = s_n s_m E_{n,m}^+ \quad (2.25)$$

$$(E_{n,m}^-)' = s_n s_m E_{n,m}^- \quad (2.26)$$

Uniendo las partes reales, la ecuación (2.23) se puede escribir de forma matricial como:

$$\eta(t) = s^T X(t) + X(t)^T (Q + R) X(t) + Y(t)^T (Q - R) Y(t) \quad (2.27)$$

donde Q y R son matrices simétricas cuyos nm -ésimos componentes son $(E_{n,m}^+)'$ y $(E_{n,m}^-)'$ y s , X y Y son vectores, cuyos n -ésimos componentes son s_n , x_n y y_n , respectivamente.

Sea A cualquiera de las dos matrices que aparecen en la ecuación (2.27), los autovalores μ_i y autovectores u_i de A satisfacen la ecuación:

$$A u_i = \mu_i u_i. \quad (2.28)$$

Si los autovalores y los autovectores son conocidos, entonces podemos escribir A como sigue:

$$A = P^T \Lambda P \quad (2.29)$$

donde Λ es una matriz diagonal que contiene los autovalores μ_i , y P es una matriz cuyas filas son los autovectores u_i . Además, la matriz P tiene la siguiente propiedad:

$$P^T P = I. \quad (2.30)$$

Así, las dos matrices que aparecen en la ecuación (2.27), se pueden escribir como:

$$Q + R = P_1^T \Lambda_1 P_1 \quad (2.31)$$

$$Q - R = P_2^T \Lambda_2 P_2 \quad (2.32)$$

obteniendo así:

$$\eta(t) = s^T X(t) + X(t)^T P_1^T \Lambda_1 P_1 X(t) + Y(t)^T P_2^T \Lambda_2 P_2 Y(t) \quad (2.33)$$

Introduciendo un nuevo conjunto de variables aleatorias gaussianas $Z_j(t)$, tales que:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

podemos escribir el proceso estocástico $\eta(t)$ como en la ecuación (2.2) con coeficientes:

$$\beta = \begin{bmatrix} P_1 s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} (\Lambda_1)^d \\ (\Lambda_2)^d \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

donde $(\Lambda_i)^d$ denota un vector columna formado por los elementos de la diagonal de Λ_i .

2.3. Aproximación de Banda Estrecha

En el caso de la aproximación de banda estrecha los coeficientes de interacción $E_{n,m}^-$ y $E_{n,m}^+$, son

$$E_{n,m}^+ \approx \frac{\omega_p^2}{2g} \quad \text{y} \quad E_{n,m}^- \approx 0 \quad (2.37)$$

donde ω_p es la frecuencia del pico. Introduciendo esta información dentro de la formulación presentada en la sección anterior, verificamos que la ecuación (2.1) es mucho más simple:

$$\eta(t) = \beta_1 Z_1(t) + \lambda_1 Z_1(t)^2 + \lambda_2 Z_2(t)^2 \quad (2.38)$$

donde

$$\beta_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^N S(\omega_i) d\omega}, \quad \lambda_1 = \frac{\omega_p^2}{2g} \sum_{i=1}^N S(\omega_i) d\omega, \quad \lambda_2 = -\lambda_1 \quad (2.39)$$

En general, cuando se habla de aproximación de banda estrecha, el proceso se escribe como:

$$\eta(t) = X(t) + \frac{\omega_p^2}{2g} (X(t)^2 - Y(t)^2) \quad (2.40)$$

donde $X(t)$ es un proceso gaussiano de media cero con densidad espectral de un lado $S(\omega)$ y $Y(t)$ la transformada de Hilbert de $X(t)$. Es fácil ver que las ecuaciones (2.38) y (2.40) son equivalentes.

2.4. Modelo de Banda Estrecha

Usando la ecuación (2.6), podemos reescribir el proceso que representa la altura de la ola como:

$$\eta(t) = a(t)\cos(\omega_0 t + \epsilon(t))$$

donde $a(t)$ es la amplitud, $\epsilon(t)$ es la fase y ω_0 es la frecuencia donde se concentra el espectro. Tanto $a(t)$ como $\epsilon(t)$ varían aleatoriamente con t pero lentamente: la velocidad es mucho menor que ω_0 . Así

$$\eta'(t) = a'(t)\cos(\omega_0 t + \epsilon(t)) - a(t)(\omega_0 + \epsilon'(t))\sin(\omega_0 t + \epsilon(t)) \approx -a(t)\omega_0 \sin(\omega_0 t + \epsilon(t))$$

Por lo tanto la distribución conjunta de η y de η'/ω_0 es

$$f\left(\eta, \frac{\eta'}{\omega_0}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\eta^2 + \left(\frac{\eta'}{\omega_0}\right)^2\right)\right\}$$

A partir de aquí podemos obtener la densidad conjunta de a y ϵ . Sustituimos η y η' por sus valores respectivos:

$$\begin{aligned} f(a, \epsilon) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(a\cos(\omega_0 t + \epsilon))^2 + \left(\frac{-a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \epsilon)}{\omega_0}\right)^2\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(a^2 \cos^2(\omega_0 t + \epsilon) + a^2 \sin^2(\omega_0 t + \epsilon))\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \text{con} \quad 0 \leq a < \infty \quad 0 \leq \epsilon \leq 2\pi. \end{aligned}$$

y la marginal de la amplitud es una distribución de Rayleigh con parámetro $2\sigma^2$.

Recordemos que σ^2 es el área bajo la densidad espectral, de modo que si conocemos la densidad espectral podemos hacer predicción sobre la altura de las olas.

2.5. Distribuciones de las características de los parámetros de las olas

Con el fin de desarrollar modelos prácticos y ser utilizados en las industrias de mar adentro, es necesario obtener las estadísticas de las olas. Existen distintas formas de obtener estas estadísticas, puede ser con mediciones directas o con diferentes modelos que toman el espectro de la ola como dato de entrada. Aunque las mediciones directas tienen grandes desventajas: las mediciones nunca son lo suficientemente grandes para proporcionar información válida concerniente a los extremos. A ello se le suma que los datos no son limpios; es decir, necesita ser procesada, lo cual conduce a pérdida de información, incrementando costos y tiempo. Así, que existe la necesidad de que los modelos matemáticos sean capaces de obtener estadísticas de las olas desde un espectro de mar seleccionado.

Podemos decir que existen principalmente dos tipos de modelos: modelos basados en la técnica Monte Carlo y desarrollo de simuladores, y modelos derivados de consideraciones teóricas. Aquí usamos un modelo del segundo tipo, más precisamente, el *Método de Proceso de Transformación Gaussiana*, el cual fue presentado por primera vez por Rychlik en [11]. La idea principal es: Una vez escrito el proceso de altura del mar como en la ecuación (2.1), y calculada la intensidad de los cruces hacia arriba para diferentes alturas de las olas $\mu^+(u)$, consideramos un proceso de transformación gaussiano, el cual tiene la misma intensidad de cruces hacia arriba que nuestro proceso inicial. Para este último proceso, calculamos las diferentes distribuciones de las características de los parámetros de las olas (estadísticas de las olas).

De esta manera, el problema de estimación de distribuciones de las características de los parámetros de las olas del proceso $\eta(t)$ se reduce a la estimación de distribuciones de las características de los parámetros de las olas de un proceso gaussiano como en la ecuación (2.40). Más precisamente, esas distribuciones se obtienen usando la herramienta de Matlab, WAFO-Wave Analysis in Fatigue and Oceanography¹, el cual fue desarrollado por el departamento de Estadísticas Matemáticas de la Universidad de Lund, en Suecia y contiene un paquete amigable de subrutinas numéricas y programas para análisis estadísticos de olas aleatorias.

2.6. Procedimiento numérico

2.6.1. Cruces

Para funciones muestrales de un proceso continuo $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$, decimos que $\eta(t)$ tiene cruce hacia arriba al nivel u en t_0 si, para algún $\epsilon > 0$, $\eta(t) < u$ para todo $t \in (t_0 - \epsilon, t_0]$ y $\eta(t) \geq u$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \epsilon)$. Para cada intervalo $I = [a, b]$, escribimos $N_I^+(\eta, u)$ para el número de cruces hacia arriba por $\eta(t)$ en I .

$$N_I^+ = N_I^+(\eta, u) = \text{número de } u\text{-cruces hacia arriba por } \eta(t), t \in I$$

Para procesos continuos con solo un número finito de u -valores, deben existir intervalos a la izquierda y derecha de cada punto de cruce hacia arriba tales que $\eta(t)$ es estrictamente menor que u a la izquierda y estrictamente mayor que u a la derecha del punto de cruce.

También definimos

$$N_I = N_I(\eta, u) = \text{número de } t \in I \text{ tal que } \eta(t) = u.$$

¹Disponible en la página web <http://www.maths.lth.se/matstat/wafo/>

Por intensidad de cruce hacia arriba se entiende cada función μ_t^+ tal que

$$\int_{t \in I} \mu_t^+(u) dt = \mathbb{E}(N_I^+(\eta, u)).$$

Similarmente, definimos la intensidad de los cruces como $\mu_t(u)$ si

$$\int_{t \in I} \mu_t(u) dt = \mathbb{E}(N_I(\eta, u)).$$

Para un proceso estacionario, $\mu_t^+(u) = \mu^+(u)$ y $\mu_t(u) = \mu(u)$ son independientes de t . En general, la intensidad es el número medio de eventos por unidad de tiempo, calculado en tiempo t .

Fórmula de Rice para procesos absolutamente continuos

Lema 2.6.1 (Banach) Para cada función continua $f(t)$, $t \in I$, la variación total es igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_I(f, u) du$$

Más aún, si $f(t)$ es absolutamente continua con derivada $f'(t)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_I(f, u) du = \int_I |f'(t)| dt$$

Similarmente, si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto medible Borel y 1_A es su función indicatriz, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1_A(u) N_I(f, u) du = \int_I 1_A(f(t)) |f'(t)| dt \quad (2.41)$$

Donde, por definición, la variación total de $f(t)$, con $t \in I$ es el $\sup \sum |f(t_{k+1}) - f(t_k)|$, donde el supremo se toma sobre todas las particiones de $I = [a, b] \subset [0, 1]$.

Teorema 2.6.1 (Fórmula de Rice) Para cada proceso estacionario $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ con densidad $f_{\eta(0)}(u)$, las intensidades de cruces y cruces hacia arriba están dadas por

$$\mu(u) = \mathbb{E}(N_{[0,1]}(\eta, u)) = \int_{-\infty}^{\infty} |z| f_{\eta(0), \eta'(0)}(u, z) dz = f_{\eta(0)}(u) \mathbb{E}(|\eta'(0)| \mid \eta(0) = u) \quad (2.42)$$

$$\mu^+(u) = \mathbb{E}(N_{[0,1]}^+(\eta, u)) = \int_0^{\infty} z f_{\eta(0), \eta'(0)}(u, z) dz = f_{\eta(0)}(u) \mathbb{E}(\eta'(0)^+ \mid \eta(0) = u) \quad (2.43)$$

Estas expresiones valen para casi todo u , siempre que las densidades envueltas existan.

Demostración. Demostraremos (2.42) aplicando el Teorema de Banach sobre el proceso estacionario $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ con continuidad absoluta, y por consiguiente diferenciable casi siempre. Si $\eta(t)$ tiene función muestral absolutamente continua casi siempre, entonces (2.41) vale para casi todo desarrollo, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1_A(u) N_I(\eta, u) du = \int_I 1_A(\eta(t)) |\eta'(t)| dt$$

Tomando esperanza y aplicando el Teorema de Fubini para cambiar el orden de integración y esperanza, tenemos

$$\begin{aligned} |I| \int_{u \in A} \mu(u) du &= \int_{-\infty}^{\infty} 1_A(u) \mathbb{E}(N_I(\eta, u)) du \\ &= \mathbb{E} \left(\int_I 1_A(\eta(t)) |\eta'(t)| dt \right) = |I| \mathbb{E}(1_A(\eta(0)) |\eta'(0)|) \\ &= |I| \int_{u \in A} f_{\eta(0)}(u) \mathbb{E}(|\eta'(0)| \mid \eta(0) = u) du \end{aligned}$$

Aquí usamos también que $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ es estacionario.

Dado que A es un conjunto medible arbitrario, obtenemos el resultado deseado

$$\mu(u) = f_{\eta(0)}(u) \mathbb{E}(|\eta'(0)| \mid \eta(0) = u)$$

para casi todo u . La demostración de (2.43) es similar. \square

Teorema 2.6.2 *Para un proceso estacionario $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ con camino muestral continuo casi siempre, supóngase que $\eta(0)$ y $\xi_n = 2^n(\eta(\frac{1}{2^n}) - \eta(0))$ tienen densidad conjunta $g_n(u, z)$ la cual es continua en u para todo z y todo n suficientemente grande. También supóngase que $g_n(u, z) \rightarrow p(u, z)$ uniformemente en u para z fijo cuando $n \rightarrow \infty$ y que $g_n(u, z) \leq h(z)$ con $\int_{-\infty}^{\infty} zh(z) dz < \infty$. Entonces*

$$\mu^+(u) = \mathbb{E}(N_{[0,1]}(\eta, u)) = \int_0^{\infty} zp(u, z) dz. \quad (2.44)$$

Demostración. Primero ideamos una técnica para contar el número de cruces hacia arriba, dividiendo el intervalo $[0,1]$ en subintervalos diádicos $[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$, $k = 1, 2, \dots, 2^n$ y verificando los valores en los puntos extremos. Sea N_n el número de puntos $\frac{k}{2^n}$ tal que $\eta(\frac{k-1}{2^n}) < u < \eta(\frac{k}{2^n})$. Dado que $\eta(t)$ tiene camino muestral continuo casi siempre, existe al menos un u -cruce hacia arriba en cada intervalo tal que $\eta(\frac{k-1}{2^n}) < u < \eta(\frac{k}{2^n})$ y por lo tanto

$$N_n \leq N_{[0,1]}(\eta, u).$$

Aún más, dado que $\eta(t)$ tiene distribución continua, podemos suponer que $\eta(\frac{k}{2^n}) \neq u$ para todo n y $k = 1, \dots, 2^n$. Cuando n crece a $n+1$ el número de subintervalos se duplica, cada intervalo que contribuye un

cruce hacia arriba en N_n contribuirá al menos un cruce hacia arriba en N_{n+1} en al menos uno de los dos nuevos intervalos. Por lo tanto N_n es creciente y es fácil ver que, sin preocuparse, si $N_{[0,1]}(\eta, u) = \infty$ ó $N_{[0,1]}(\eta, u) < \infty$, $N_n \nearrow N_{[0,1]}(\eta, u)$ cuando $n \rightarrow \infty$. La convergencia monótona implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(N_n) = \mathbb{E}(N_{[0,1]}(\eta, u)).$$

Ahora definimos

$$J_n(u) = 2^n p\left(\eta(0) < u < \eta\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$$

de modo que, por estacionaridad

$$\mathbb{E}(N_{[0,1]}(\eta, u)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(N_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n(u).$$

Escribiendo el evento $\{\eta(0) < u < \eta\left(\frac{1}{2^n}\right)\}$ como

$$\{\eta(0) < u < \eta(0) + \xi_n/2^n\} = \{\eta(0) < u\} \cap \{\xi_n > 2^n(u - \eta(0))\}$$

tenemos que

$$J_n(u) = 2^n p(\eta(0) < u, \xi_n > 2^n(u - \eta(0))) = 2^n \int_{-\infty}^u \int_{2^n(u-\eta)}^{\infty} g_n(\eta, y) dy d\eta.$$

Cambiando variables, $\eta = u - zv/2^n$, $y = z$, ($v = 2^n(u - \eta)/y$), se tiene

$$\int_0^{\infty} z \int_0^1 g_n(u - zv/2^n, z) dv dz$$

donde $g_n(u - zv/2^n, z)$ tiende puntualmente a $p(u, z)$ cuando $n \rightarrow \infty$, por hipótesis. Dado que g_n es dominada por la función integrable $h(z)$ se sigue que la doble integral tiende a

$$\int_0^{\infty} zp(u, z) dz \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

□

Observación 1: La fórmula de Rice se puede extender a procesos no estacionarios, en cuyo caso la intensidad de cruces depende del tiempo. Entonces la función de densidad $f_{\eta(t), \eta'(t)}(u, z)$ en la integral depende de t

$$\mathbb{E}(N_{[a,b]}(\eta, u)) = \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} |z| f_{\eta(t), \eta'(t)}(u, z) dz dt$$

La integral

$$\mu_t(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |z| f_{\eta(t), \eta'(t)}(u, z) dz$$

es la intensidad de cruce local en tiempo t .

Fórmula de Rice para procesos gaussianos diferenciables

Sabemos que para un proceso estacionario gaussiano diferenciable $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$, el valor del proceso $\eta(t)$ y la derivada $\eta'(t)$ en el mismo punto son independientes y gaussianos, con media $\mathbb{E}(\eta(t)) = m$, $\mathbb{E}(\eta'(t)) = 0$, respectivamente, y varianza dada por los momentos espectrales $V(\eta(t)) = r(0) = m_0$, $V(\eta'(t)) = -r''(0) = m_2$

Entonces

$$f_{\eta(0),\eta'(0)}(u, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{m_0 m_2}} e^{-\frac{(u-m)^2}{2m_0}} e^{-\frac{z^2}{2m_2}}$$

Integrando (2.42) y (2.43) nos da que para un proceso estacionario gaussiano

$$\mu(u) = \mathbb{E}(N_{[0,1]}(\eta, u)) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} e^{-\frac{(u-m)^2}{2m_0}}$$

$$\mu^+(u) = \mathbb{E}(N_{[0,1]}^+(\eta, u)) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} e^{-\frac{(u-m)^2}{2m_0}}$$

las cuales son las fórmulas de Rice originales.

Observación 2: El número esperado de cruces hacia arriba del nivel medio por unidad de tiempo en un proceso estacionario gaussiano es

$$\mu^+(m) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\int \omega^2 f(\omega) d\omega}{\int f(\omega) d\omega}}$$

y es llamado la (raíz de) frecuencia media cuadrada del proceso. La inversa es igual a la longitud del tiempo promedio entre sucesivos niveles medios de cruces hacia arriba, $\frac{1}{\mu^+(m)} = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{m_2}}$ también llamado período medio.

Un extremo local, mínimo o máximo, para procesos estocásticos diferenciables $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ corresponde, respectivamente, a cruces hacia arriba y cruces hacia abajo de nivel cero para el proceso derivado $\{\eta'(t), t \in \mathbb{R}\}$. La fórmula de Rice aplicada a $\eta'(t)$ por lo tanto nos da el número esperado de extremos locales. Para un proceso gaussiano, la fórmula envuelve el cuarto momento espectral $m_4 = V(\eta''(t)) = \int \omega^4 f(\omega) d\omega$. Las expresiones general y gaussianas son, respectivamente

$$\mu_{min} = \int_0^\infty z f_{\eta',\eta''}(0, z) dz = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}$$

$$\mu_{max} = \int_{-\infty}^0 |z| f_{\eta',\eta''}(0, z) dz = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}.$$

Si combinamos estas expresiones con la observación 2, obtenemos el promedio de número de máximos locales por cruces hacia arriba de nivel medio

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}}{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}} = \sqrt{\frac{m_0 m_4}{m_2^2}}.$$

El parámetro α está siempre acotado, $0 < \alpha < 1$, y es usado como una medida de la irregularidad: Un α cercano a 1 indica un proceso bien regular con aproximadamente un máximo y un mínimo local entre cruces hacia arriba de nivel medio. Si α es cercano a cero se pueden esperar muchos extremos locales entre cruces hacia arriba.

2.6.2. La media de la intensidad de cruces hacia arriba

Para un nivel de agua dado u la media de la intensidad de cruces hacia arriba $\mu^+(u)$ de los procesos $\eta(t)$ están dados por la fórmula de Rice:

$$\mu^+(u) = \int_0^{+\infty} z p_{\eta\eta'}(u, z) dz \quad (2.45)$$

donde $p_{\eta\eta'}(u, z)$ denota la función de densidad conjunta de η y η' . Esta densidad es muy difícil (si es posible) de calcular. Pero, la función característica de η y η' , $M(\theta_1, \theta_2)$ puede evaluarse por una forma cerrada. Por definición $M(\theta_1, \theta_2) = E[e^{i\theta_1\eta + i\theta_2\eta'}]$ es la transformada de Fourier de $p_{\eta\eta'}(u, z)$. Usando este hecho y las propiedades de la transformada de Fourier, la fórmula de arriba se puede escribir de una forma más compacta (reemplazando la triple integración por una doble e introduciendo una derivada extra) mostrada por Naess en [5], (para procesos estacionarios):

$$\mu^+(u) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\theta_2} \frac{\partial M(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} e^{-iu\theta_1} d\theta_1 \right] d\theta_2 \quad (2.46)$$

donde la integral exterior se interpreta como la integral del valor principal en el sentido que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \right)$$

La función característica $M(\theta_1, \theta_2)$ en este caso se puede evaluar como:

$$M(\theta_1, \theta_2) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \ln(\det(\mathbf{A})) - \frac{1}{2} \theta_2^2 \beta' \mathbf{V} \beta + \frac{1}{2} t' \mathbf{A}^{-1} t \right\} \quad (2.47)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \mathbf{I} - 2i\theta_1\mathbf{\Lambda} - 2i\theta_2(\mathbf{\Lambda}\Sigma_{21} + \Sigma_{12}\mathbf{\Lambda}) + 4\theta_2^2\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda} \\
 t &= (i\theta_1\mathbf{I} + i\theta_2\Sigma_{12} - 2\theta_2^2\mathbf{\Lambda}\mathbf{V})\beta \\
 \mathbf{V} &= \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{12}
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

y $\mathbf{\Lambda}$ es una matriz diagonal con los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N}$ sobre la diagonal principal. La estructura de correlación entre las variables gaussianas $Z_i(t), Z_j(t)$ y $Z_i(t)', Z_j(t)'$ están dadas por la matriz de covarianza siguiente:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

donde

$$\Sigma_{11}(i, j) = E[Z_i Z_j] \quad \Sigma_{12}(i, j) = E[Z_i Z_j'] \tag{2.50}$$

$$\Sigma_{21}(i, j) = E[Z_i' Z_j] \quad \Sigma_{22}(i, j) = E[Z_i' Z_j'] \tag{2.51}$$

Para poder resolver la integral que está dentro de los corchetes en la ecuación (2.46), usamos un método similar al método Saddle Point, que es una generalización del método numérico propuesto por Rice en [10].

Capítulo 3

Análisis de datos y resultados

3.1. Huracán Camille

El Huracán Camille fue el ciclón tropical más intenso de la temporada de huracanes en el Atlántico de 1969. Además de ser el tercer ciclón tropical y el segundo huracán de dicha temporada, Camille fue el segundo de tres huracanes categoría 5 que tocaron tierra en Estados Unidos durante el siglo XX, al impactar cerca de la desembocadura del río Misisipi durante la noche del 17 de agosto causando daños catastróficos. Camille había sido el único huracán formado en el océano Atlántico en alcanzar vientos de 305 km/h (190 mph) hasta que Allen igualó dicho registro en 1980.

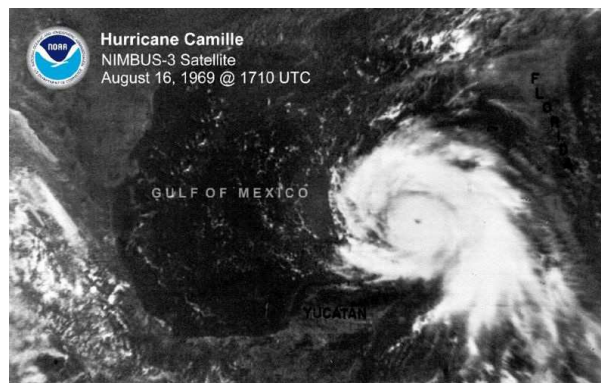


Figura 3.1: El Huracán Camille en el Golfo de México

El huracán se formó el 14 de agosto y rápidamente se intensificó. Éste bordeó la región occidental de Cuba con fuerza de Categoría 3. Camille se reforzó más adelante sobre el golfo de México y tocó tierra con una presión mínima central de 905 hPa y vientos sostenidos de 305 km/h, así como una tormentosa oleada máxima de 7.3 m. Por la velocidad de viento registrada, Camille había sido hasta entonces el ciclón tropical más intenso en tocar tierra en todo el mundo, y uno de los cuatro ciclones tropicales en haber alcanzado velocidades de viento de 305 km/h, también en todo el mundo. El huracán se extendió a lo largo de la costa del estado de Misisipi.

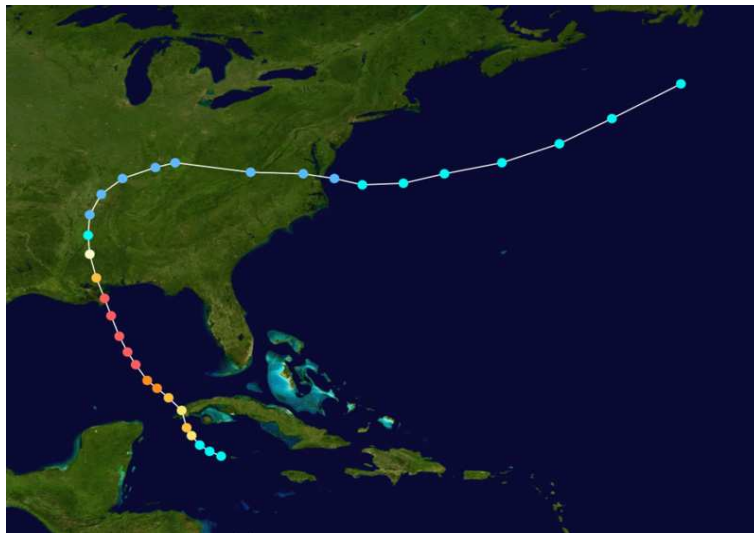


Figura 3.2: Trayecto del Huracán Camille

El Huracán pasó a unos 23 Km. de la plataforma donde estaba el medidor de alturas de olas. Este dispositivo de medida (ubicado en el Golfo de México) dejó de funcionar alrededor de las 4:30 p.m. del 17 de agosto de 1969 y la serie temporal inicia a las 6 p.m. del 16 de agosto de 1969. El muestreo se realizó con una frecuencia de 1 Hz.

3.2. Análisis de datos

Para realizar el análisis del Huracán Camille, se utilizó la herramienta WAFO de Matlab y como dato de entrada un archivo de registros que consta de una matriz de 3600 filas (que representan cada segundo de comportamiento del huracán) y 24 columnas (1ra. columna corresponde a los segundos de comportamiento

del huracán; las 23 restantes corresponden a los registros de altura de cada hora, en total son 22,5 horas). Los pasos para realizar dicho análisis fueron los siguientes:

1. Estimación de la densidad espectral para cada hora, utilizando la instrucción "*dat2spec*". Como dato de entrada, la matriz correspondiente a los registros de cada hora de comportamiento del huracán Camille.
2. Gráfico de cada espectro, utilizando la instrucción "*wspecplot*". El dato de entrada es el espectro estimado en el punto anterior.
3. Estimación de la altura, pendiente y depresión de la ola, amplitud de la cresta (A_c), período de cresta frontal y posterior (T_c), índices para los cruces de cero, utilizando la instrucción "*dat2steep*". El parámetro de entrada es la matriz correspondiente a los registros de cada hora del huracán Camille.
4. Distribución conjunta del período y la amplitud de la cresta.
 - Utilizando la instrucción "*kdebin*", se hace una estimación empírica del período y la amplitud de la cresta. Con datos de entrada, el período y la amplitud de la cresta obtenidos en el punto 3.
 - Se grafica utilizando "*pdfplot*" con dato de entrada la estimación empírica estimada arriba, obteniéndose las curvas de nivel.
 - Sobre estas curvas de nivel, se grafican el período y la amplitud de la cresta obtenidos en el punto 3.
5. Estimación de los niveles de cruces hacia arriba de un espectro, utilizando la instrucción "*dat2lc*"; tomando como datos los registros correspondientes a cada hora del comportamiento del Huracán Camille, obteniendo una matriz de dos columnas con los niveles y números de cruces hacia arriba.
6. Estimación de la altura significativa de la ola (H_m) y el período del pico (T_p), utilizando la instrucción "*spec2char*", usando como dato de entrada, el espectro de cada hora.

3.3. Resultados

Los gráficos correspondientes de la densidad espectral y su respectiva distribución conjunta del período y amplitud de la cresta, para cada hora, están representados en las figuras 3.3 a la 3.25.

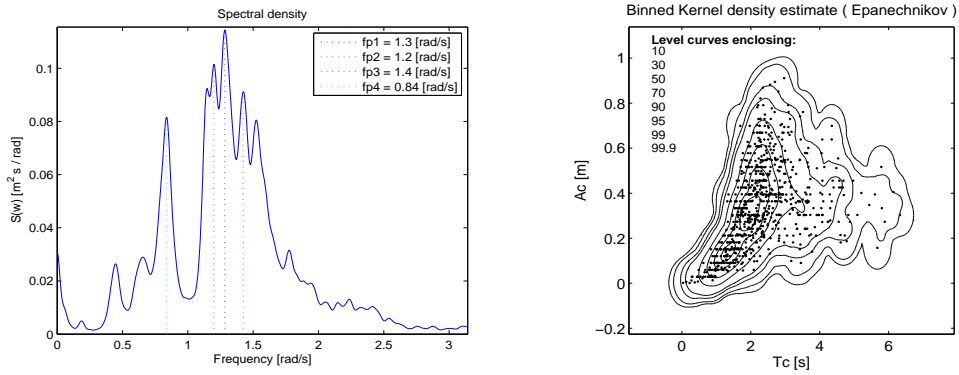


Figura 3.3: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 1.

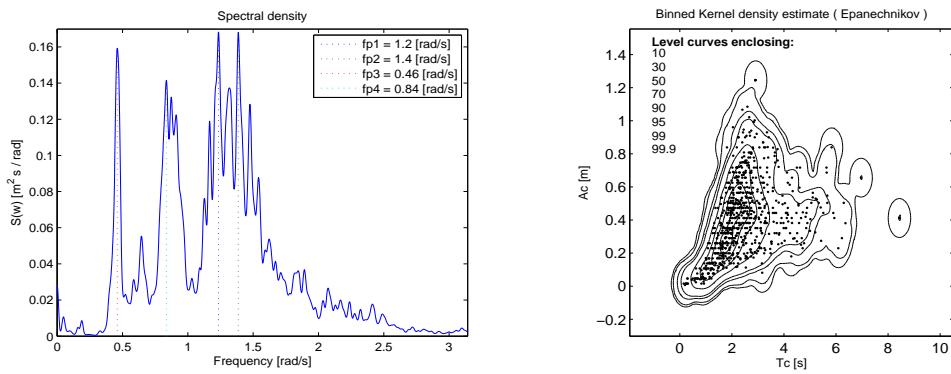


Figura 3.4: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 2.

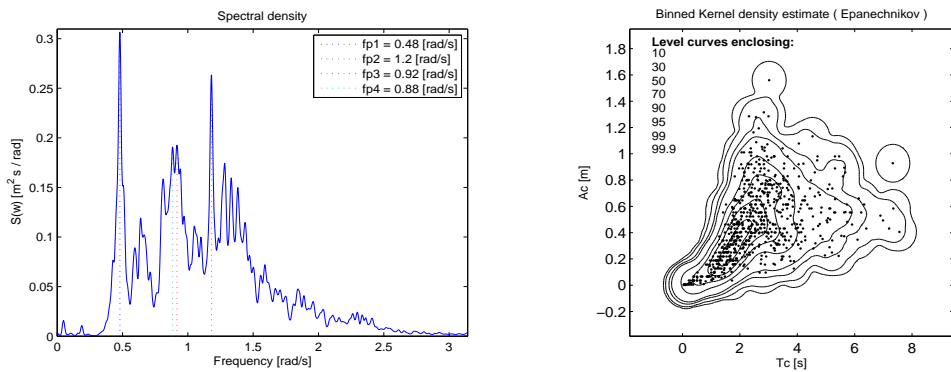


Figura 3.5: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 3.

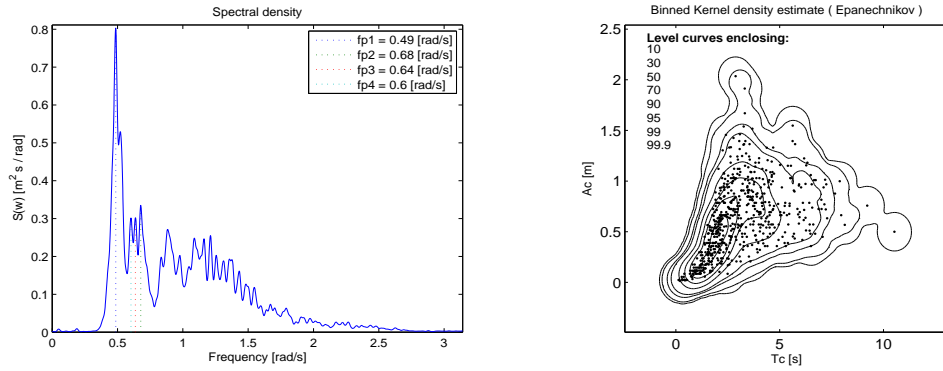


Figura 3.6: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 4.

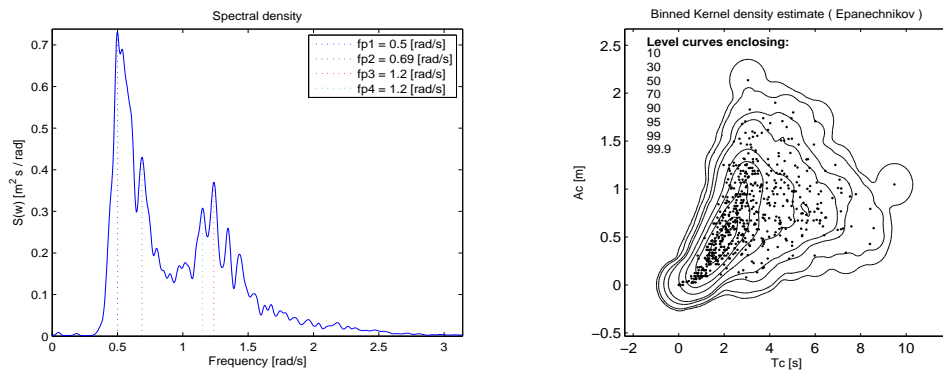


Figura 3.7: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 5.

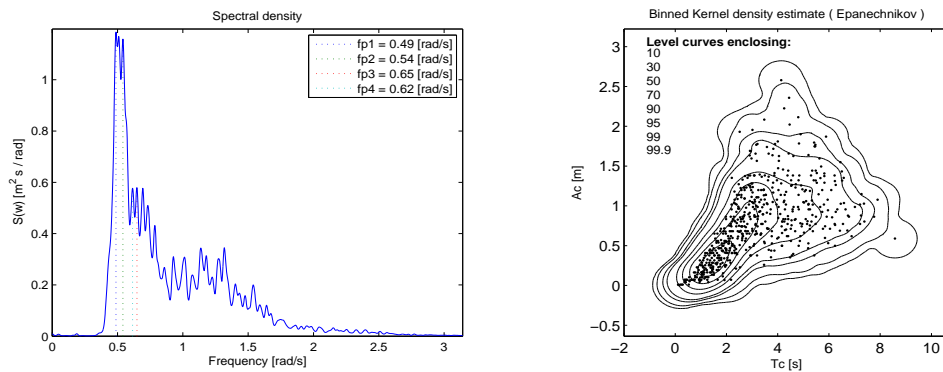


Figura 3.8: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 6.

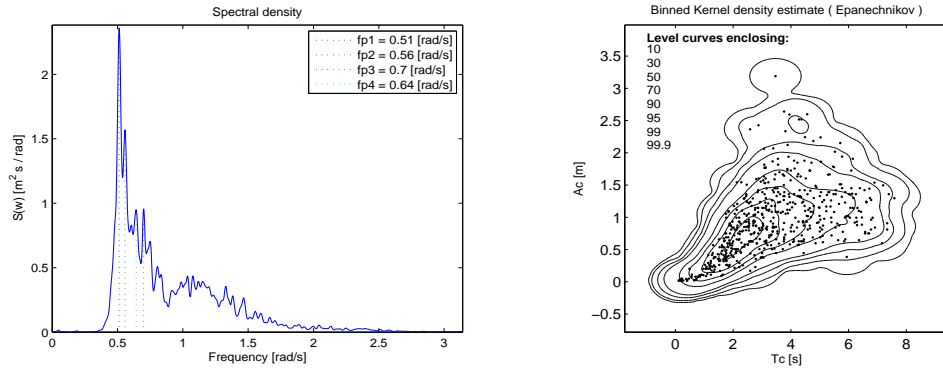


Figura 3.9: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 7.

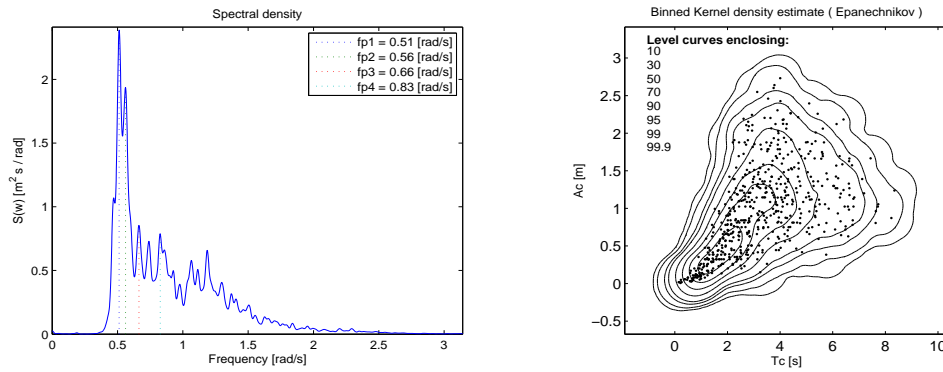


Figura 3.10: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 8.

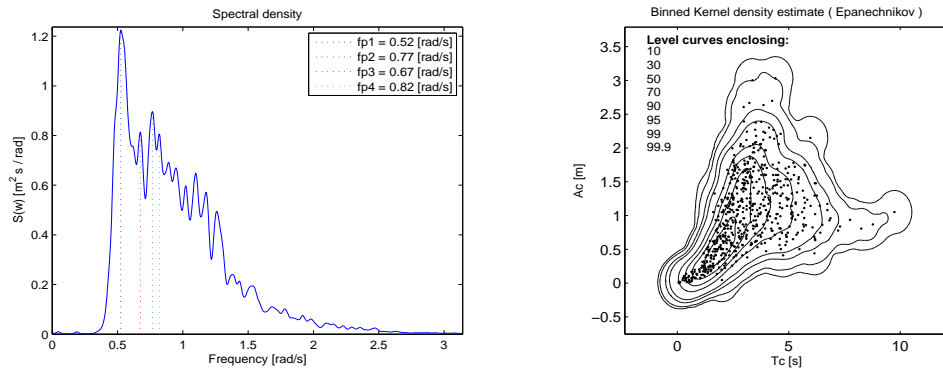


Figura 3.11: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 9.

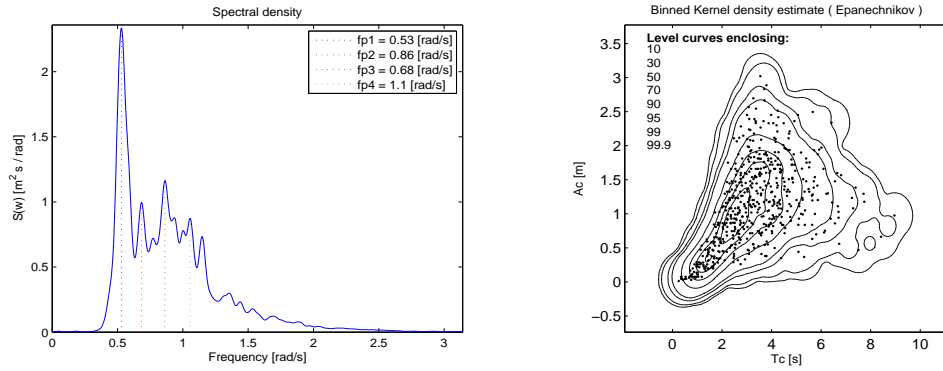


Figura 3.12: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 10.

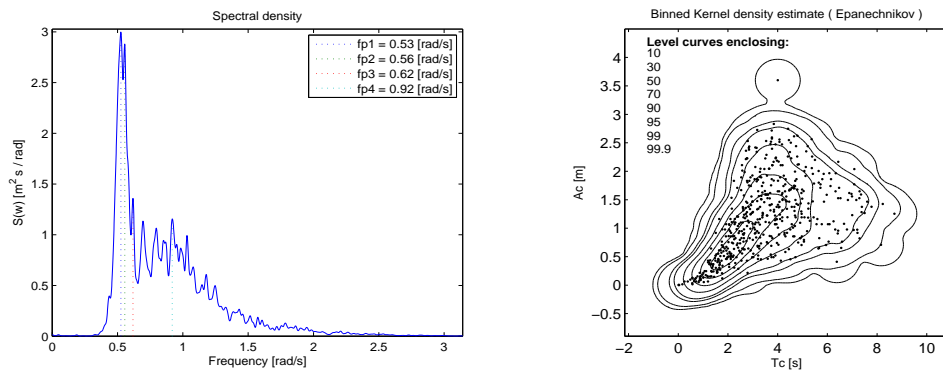


Figura 3.13: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 11.

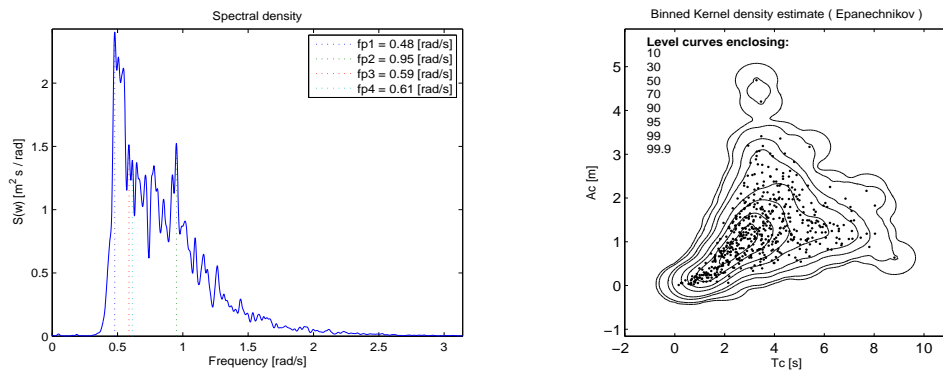


Figura 3.14: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 12.

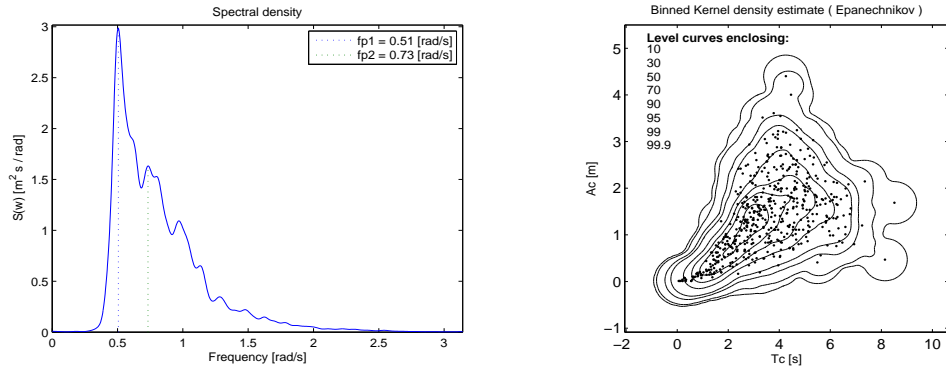


Figura 3.15: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 13.

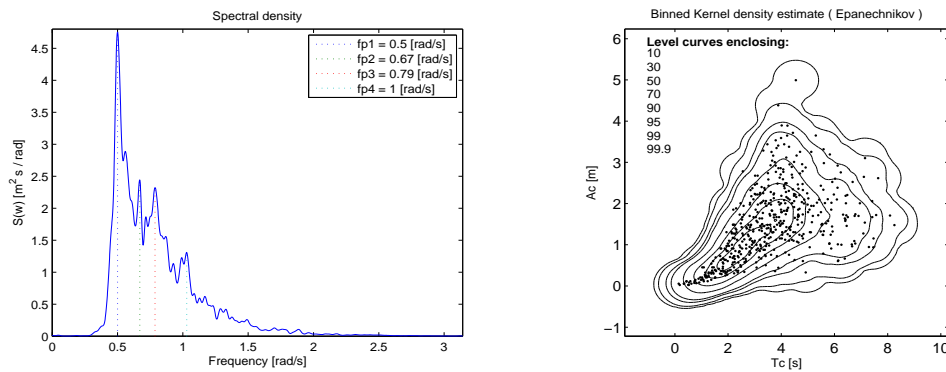


Figura 3.16: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 14.

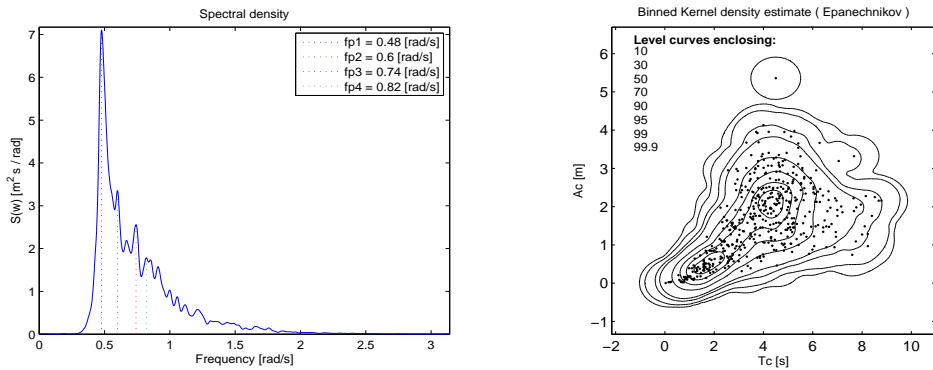


Figura 3.17: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 15.

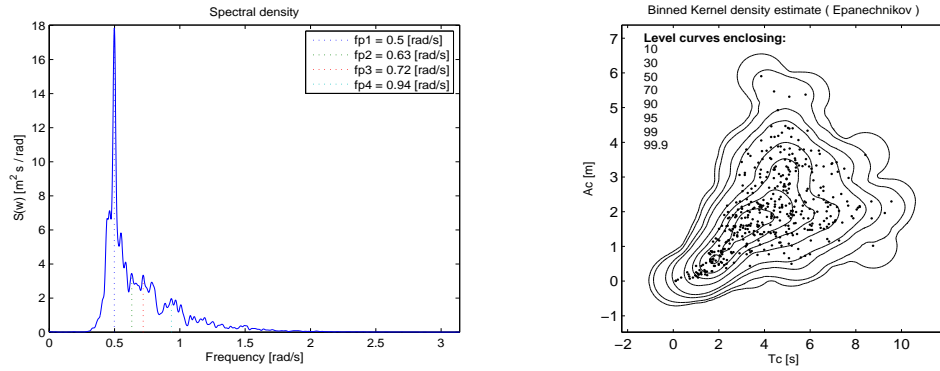


Figura 3.18: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 16.

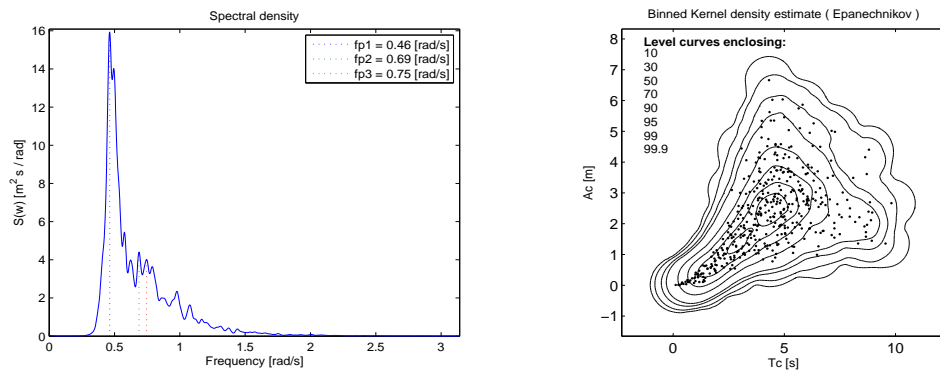


Figura 3.19: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 17.

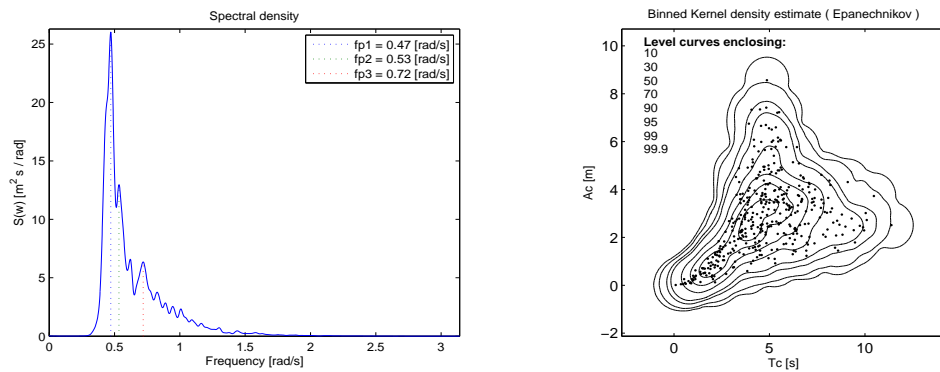


Figura 3.20: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 18.

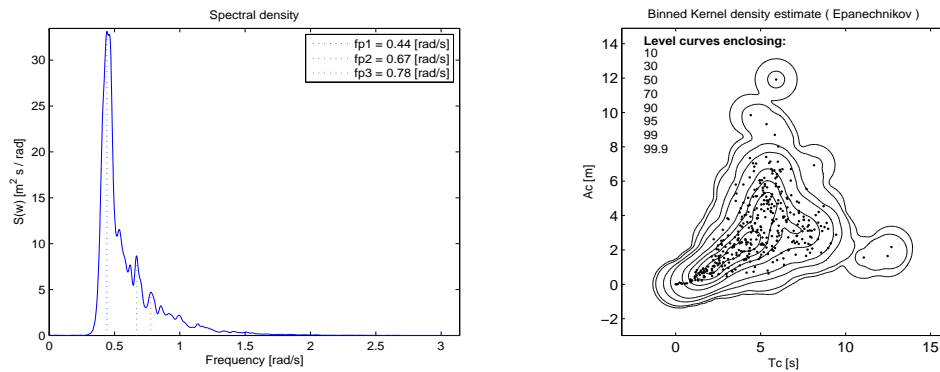


Figura 3.21: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 19.

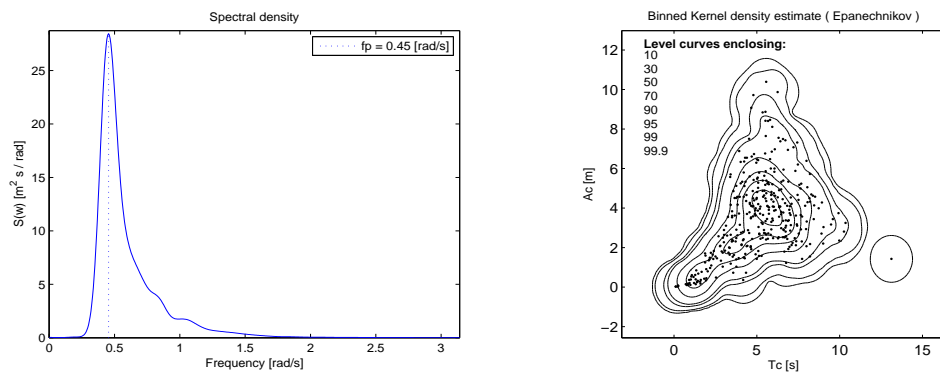


Figura 3.22: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 20.

En las figuras 3.3-3.14, 3.16-3.18, y 3.23,(izq.) se observan 4 frecuencias de energía predominantes en cada una; en la primera hora, la mayor frecuencia se encuentra en $1,3 \text{ rad/s}$ y el valor máximo de energía no supera $0,12 \text{ m}^2\text{s}/\text{rad}$; mientras que en la segunda hora, la frecuencia mayor está en $1,2 \text{ rad/s}$ y el valor máximo de energía no supera $0,17 \text{ m}^2\text{s}/\text{rad}$; durante las horas 3-12, 14-16 y 21, la mayor frecuencia de energía varía entre $0,45$ y $0,53 \text{ rad/s}$. Desde primera hasta la quinta hora de comportamiento del huracán Camille, el valor máximo de energía no supera $1 \text{ m}^2\text{s}/\text{rad}$. A partir de la sexta hasta la décima quinta hora, la energía varía entre $1,2$ y $7 \text{ m}^2\text{s}/\text{rad}$. Luego, a partir de la hora 16, la energía se incrementa desde 18 hasta $42 \text{ m}^2\text{s}/\text{rad}$.

Durante las horas 17, 18 y 19, sus respectivas figuras de densidad espectral, muestran 3 frecuencias de energía predominantes en cada una, donde la mayor frecuencia está entre $0,44$ y $0,47 \text{ rad/s}$. Sus valores máximos

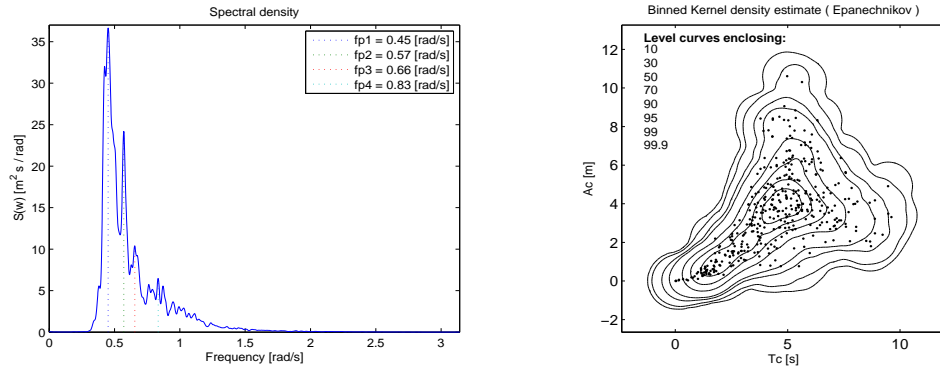


Figura 3.23: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 21.

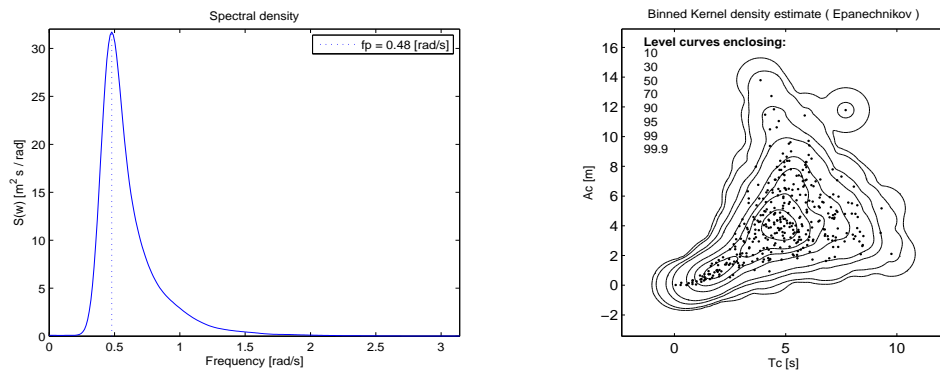


Figura 3.24: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 22.

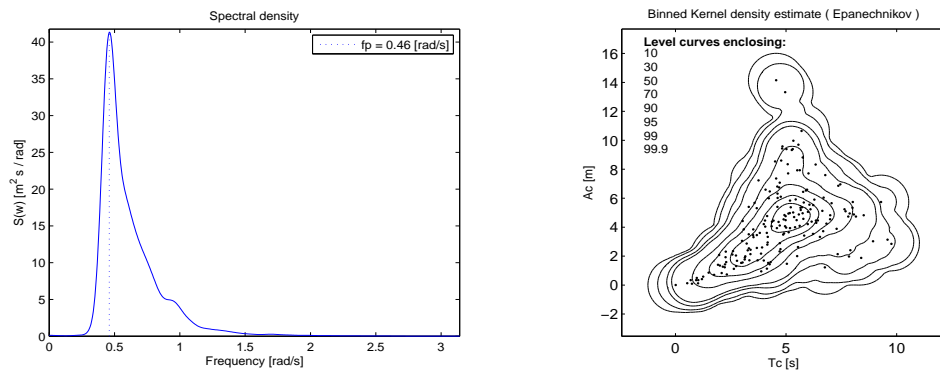


Figura 3.25: Densidad Espectral (izq.) - Dist. Cjta. período y amplitud de la cresta (der.). Hora 23.

de energía son 16, 26 y $34 \text{ m}^2\text{s}/\text{rad}$, respectivamente.

En la figura 3.15 (izq.), correspondiente a la hora 13, hay 2 frecuencias de energía predominantes, la mayor frecuencia está en $0,51 \text{ rad}/\text{s}$. Su valor máximo de energía es de $3 \text{ m}^2\text{s}/\text{rad}$.

En la hora 23 solo se registraron 1800 segundos.

En las figuras 3.22, 3.24 y 3.25, correspondientes a las horas 20, 22 y 23, respectivamente, se observa 1 frecuencia de energía dominante, con valores que oscilan entre $0,45$ y $0,48 \text{ rad}/\text{s}$ y valores máximos de energía de 28, 33 y $42 \text{ m}^2\text{s}/\text{rad}$, respectivamente.

A partir de los datos obtenidos con las instrucciones de la herramienta WAFO, se construyó la tabla 3.1, con datos característicos para cada hora de comportamiento del huracán Camille, su altura significativa, período de pico, número de cruces de cero y número de crestas.

Durante las 3 primeras horas la altura significativa de las olas está entre 1,13 y 1,55 m, con períodos de pico entre 4,9 y 7,3 segundos. A partir de la cuarta hora, la altura de las olas va incrementando desde 2 metros hasta alcanzar los 13 metros en la hora 23; mientras que los períodos de pico están entre 9 y 13 segundos. Alcanzando el máximo valor en la hora 19, de 14 segundos. El número de olas va decreciendo a medida que transcurren las horas y crece la altura de las olas.

Las curvas de nivel se graficaron de tal forma que contengan proporciones (estimadas) de los registros del Huracán Camille; estas curvas representan la distribución teórica del período y la amplitud de la cresta, cada curva contiene un porcentaje de los puntos de la distribución conjunta calculada a partir de los datos. Los puntos representan la distribución conjunta del período (T_c) y la amplitud (A_c) de la cresta del huracán Camille.

La tabla 3.2 muestra la cantidad aproximada de olas contenidas en la penúltima (99 %) y última (99,9 %) curva de nivel para cada hora de comportamiento del huracán Camille, obtenidas a partir de la distribución conjunta del período y amplitud de la cresta (figuras 3.3-3.25).

La segunda columna de la tabla 3.2 corresponde al número olas contabilizadas para cada hora de comportamiento del huracán Camille; como se aprecia en los gráficos de la distribución conjunta, en la penúltima curva de nivel se ajusta el 99 % de las olas, mientras que en la última curva de nivel, están contenidas el 99,9 % de las olas. Se puede ver que a medida que transcurren las horas de comportamiento del huracán Camille, la diferencia entre las dos últimas curvas de nivel disminuye. Por ejemplo, si observamos la hora 1, en la penúltima curva de nivel hay aproximadamente 764 olas, mientras que en la última curva de nivel, hay 771, con una diferencia entre estas curvas de 7 olas; en la hora 4, la penúltima curva, contiene 594 olas, mientras que la última curva contiene 599 olas, la diferencia entre ellas es de 5 olas; en la hora 12, tenemos 517 olas en la penúltima curva de nivel y en la última curva hay 521 olas, la diferencia, nos da 4 olas; en la última hora,

HORA	Hm(altura significativa)	Tp(período de pico)	Nro. cruces de cero	Tc(Número de crestas)
1	1,1325	4,9570	770	772
2	1,3451	5,7183	724,5	736
3	1,5574	7,3138	668	691
4	2,0904	11,6017	589	600
5	2,3656	10,7278	585	596
6	2,6571	11,6886	571	582
7	3,0659	11,7212	531	536
8	3,3000	11,5736	542	558
9	3,3376	9,4327	563,5	574
10	3,6625	10,7956	532	536
11	3,8319	11,3777	513	521
12	4,0175	10,7370	518	522
13	4,4487	10,9487	494	500
14	4,8499	11,4220	496	497
15	5,3340	12,5250	453	455
16	6,3751	12,5825	428	431
17	7,3318	13,0529	407	412
18	8,9599	13,3821	382	384
19	9,9618	14,0011	370	375
20	10,7512	13,6354	341	349
21	10,8857	13,5797	383	386
22	12,6484	12,8054	366	369
23	13,3979	13,2015	185	185

Tabla 3.1: Características espectrales y períodos de cruces del huracán Camille

vemos una diferencia de 2 olas entre la penúltima y última curva de nivel. En los gráficos se observan puntos aislados en las horas 2, 3, 15, 20.

La tabla 3.1 nos da una idea de particionar las horas según la altura significativa de las olas, la cual se

HORA	Tc(Número de crestas)	N° olas penúltima curva de nivel	N° olas última curva de nivel
1	772	764	771
2	736	729	735
3	691	684	690
4	600	594	599
5	596	590	595
6	582	576	581
7	536	531	535
8	558	552	557
9	574	568	573
10	536	531	535
11	521	516	520
12	522	517	521
13	500	495	500
14	497	492	497
15	455	451	455
16	431	427	431
17	412	408	412
18	384	380	384
19	375	371	375
20	349	346	349
21	386	382	386
22	369	365	369
23	185	183	185

Tabla 3.2: Cantidad aproximada de olas contenidas en la penúltima y última curva de nivel de la Dist. Cjta. Período y amplitud de la cresta del Huracán Camille

puede apreciar en la tabla 3.3. Nótese que no estamos haciendo una partición en segmentos estacionarios, sólo tomamos en cuenta las alturas significativas.

HORAS	ALTURA DE OLAS (metros)	FRECUENCIA DE ENERGÍA (rad/s)	VALOR MÁXIMO DE ENERGÍA (m^2s/rad)
1-3	Entre 1,13 y 1,56	Entre 0,46 y 1,4	0,3
4-6	Entre 2,09 y 2,66	Entre 0,49 y 1,2	1,2
7-11	Entre 3,07 y 3,83	Entre 0,51 y 1,1	3
12-14	Entre 4,02 y 4,85	Entre 0,48 y 0,95	7
15-23	Entre 5,33 y 13,4	Entre 0,45 y 0,94	42

Tabla 3.3: Partición de registros del huracán Camille

A partir de la tabla 3.3, se puede apreciar que en las primeras cuatro particiones, la altura de las olas va incrementándose en intervalos de un metro. Desde la décima quinta hora, hasta la hora 22,5, la altura de las olas crece en intervalos de un metro ó metro y medio por cada hora de registro, hasta alcanzar 13,4 m de altura. El intervalo de las frecuencias de energía va reduciéndose a medida que pasan las horas y el valor máximo de la energía se incrementa, hasta alcanzar $42 m^2s/rad$. Se observan puntos aislados en la primera, segunda y quinta partición. El gráfico particionado de registros del huracán Camille está representado en la figura 3.26.

Sus respectivos gráficos de espectro y distribución conjunta están representados en las figuras 3.27-3.31.

En la figura 3.27 tenemos un total de 2.199 olas para esta partición. En el gráfico de la densidad espectral se observan 4 frecuencias de energía predominantes en un intervalo de 0,46 a $1,4 rad/s$, con un valor máximo de energía de $0,3 m^2s/rad$ y en el gráfico de la distribución conjunta vemos que el 99 % de las olas que corresponde aproximadamente a 2.177, están dentro de la penúltima curva de nivel; mientras que 2.197 olas (99,9 %) están dentro de la última curva de nivel.

En la figura 3.28 tenemos un total de 1.778 olas para esta partición. En el gráfico de la densidad espectral también se observan 4 frecuencias de energía predominantes en un intervalo más reducido de 0,49 a $0,69 rad/s$, con un valor máximo de energía de $1,2 m^2s/rad$ y en el gráfico de la distribución conjunta vemos que el 99 % de las olas que corresponde aproximadamente a 1.760, están dentro de la penúltima curva de nivel; mientras que 1.776 olas (99,9 %) están dentro de la última curva de nivel.

En la figura 3.29 tenemos un total de 2.725 olas para esta partición. En el gráfico de la densidad espectral se observan 3 frecuencias de energía predominantes en un intervalo de 0,52 a $0,86 rad/s$, con un valor máximo de energía de $3 m^2s/rad$ y en el gráfico de la distribución conjunta vemos que el 99 % de las olas que corresponde aproximadamente a 2.698, están dentro de la penúltima curva de nivel; mientras que 2.722 olas (99,9 %) están dentro de la última curva de nivel.

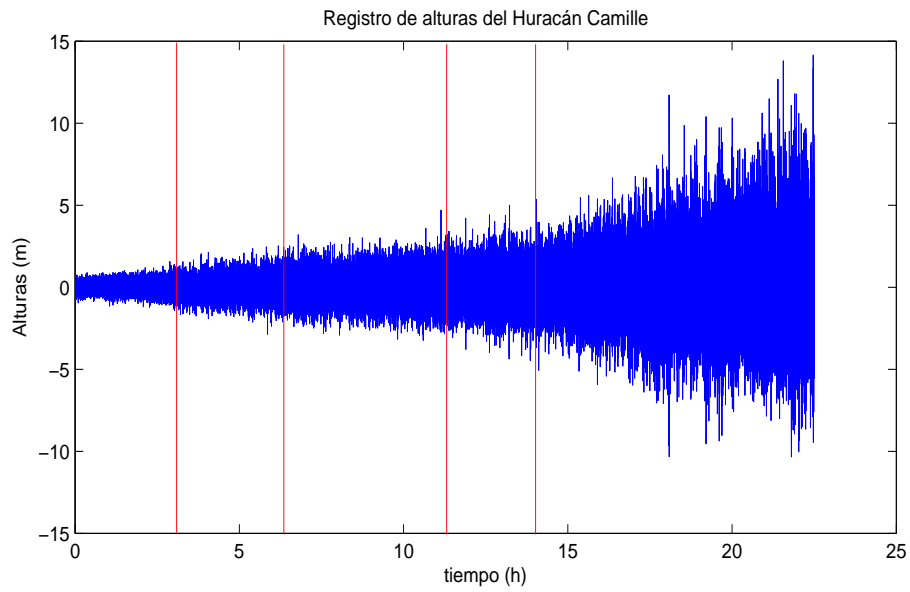


Figura 3.26: Gráfico de registros Huracán Camille

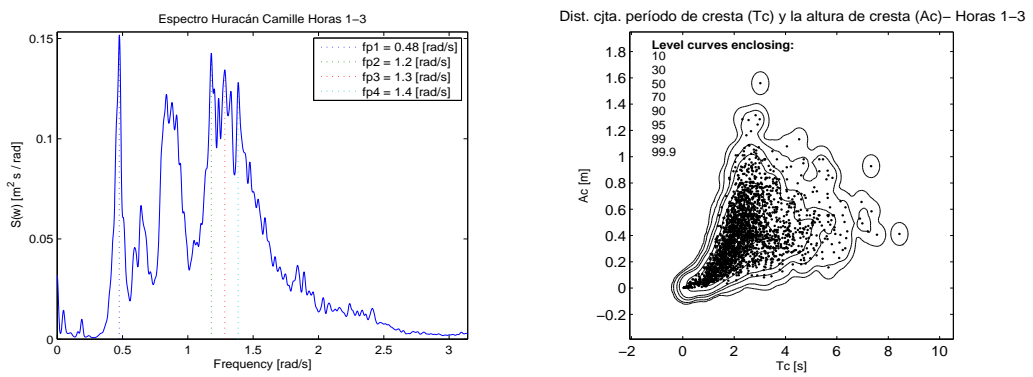


Figura 3.27: Densidad Espectral(izq.) y Dist. Cjta.(der.) Horas 1 a 3 huracán Camille

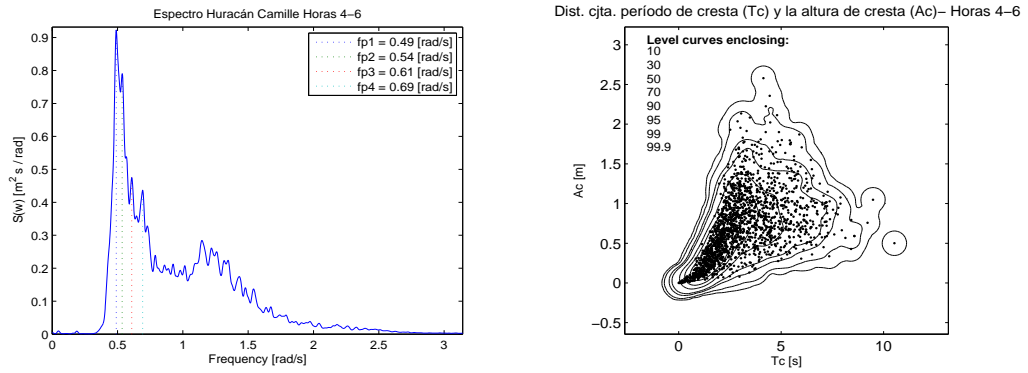


Figura 3.28: Densidad Espectral(izq.) y Dist. Cjta.(der.) Horas 4 a 6 huracán Camille

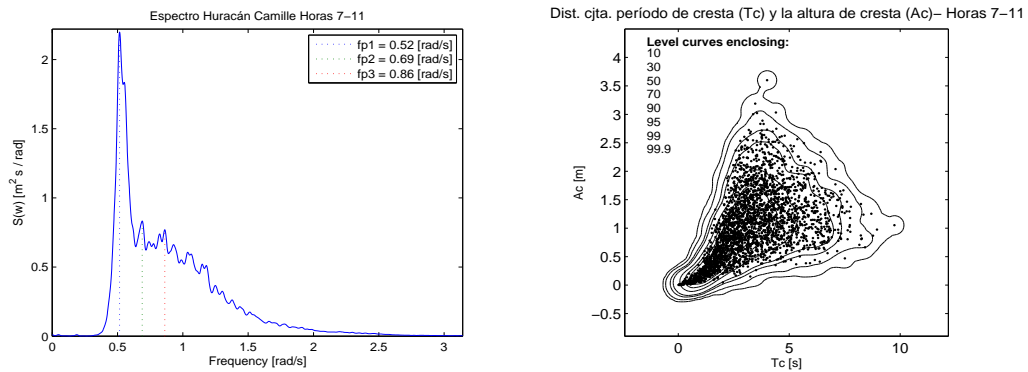


Figura 3.29: Densidad Espectral(izq.) y Dist. Cjta.(der.) Horas 7 a 11 huracán Camille

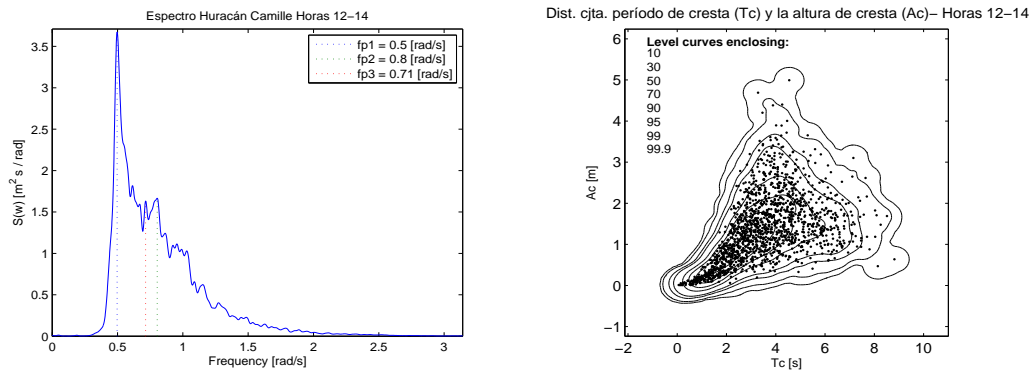


Figura 3.30: Densidad Espectral(izq.) y Dist. Cjta.(der.) Horas 12 a 14 huracán Camille

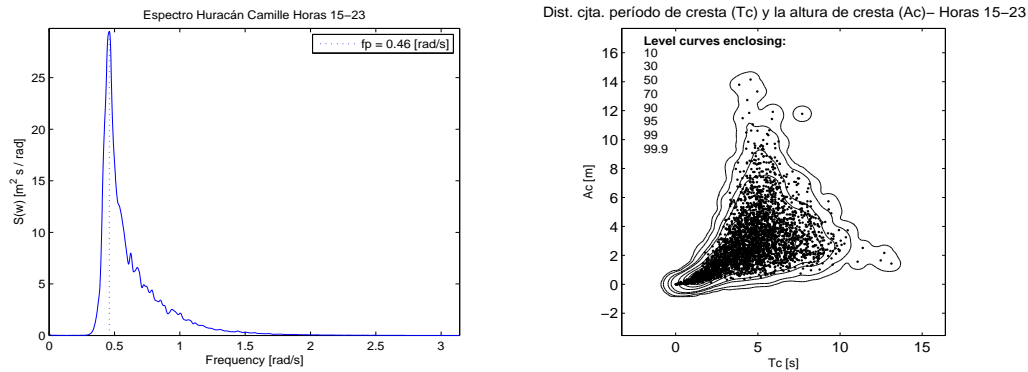


Figura 3.31: Densidad Espectral(izq.) y Dist. Cjta.(der.) Horas 15 a 23 huracán Camille

En la figura 3.30 tenemos un total de 1.519 olas para esta partición. En el gráfico de la densidad espectral se observan 3 frecuencias de energía predominantes en un intervalo de 0,5 a 0,71 rad/s , con un valor máximo de energía de $7 m^2s/rad$ y en el gráfico de la distribución conjunta vemos que el 99 % de las olas que corresponde aproximadamente a 1.504, están dentro de la penúltima curva de nivel; mientras que 1.517 olas (99,9 %) están dentro de la última curva de nivel.

En la figura 3.31 tenemos un total de 3.346 olas para esta partición. En el gráfico de la densidad espectral se observa 1 frecuencia de energía predominantes en 0,46 rad/s , con un valor máximo de energía de $42 m^2s/rad$ y en el gráfico de la distribución conjunta vemos que el 99 % de las olas que corresponde aproximadamente a 3.313, están dentro de la penúltima curva de nivel; mientras que 3.343 olas (99,9 %) están dentro de la última curva de nivel.

3.4. Conclusiones

Hemos obtenido la distribución de características de parámetros de olas para olas de Stokes de segundo orden. En este caso hemos usado los espectros de energías del huracán Camille como entrada para el procedimiento. Hemos visto que el modelo de Olas Stokes de segundo orden se ajusta bastante bien a la distribución conjunta de período de cresta (T_c) y amplitud de cresta (A_c), aún cuando el registro de olas contiene olas más pronunciadas que las simuladas por el espectro Jonswap y se muestran en Machado (2000)[4].

Se pudo notar así mismo, que para valores grandes del período de cresta hay un buen ajuste del modelo a los datos, como se vió en los gráficos correspondientes a las horas 19 a 23, cuyos períodos de cresta están por

encima de 12 segundos.

Podemos decir que el modelo de estadísticas de Olas Stokes de segundo orden resulta útil para determinar la distribución conjunta de período de cresta (T_c) y amplitud de cresta (A_c); por lo que aún cuando no tengamos un registro completo del mar, si conocemos algunos de estos parámetros (o sus estimados), podemos simular el registro de olas a partir de su distribución conjunta.

En este trabajo hemos considerado solo la aproximación de banda estrecha, en trabajos futuros se pueden considerar otros modelos y otros tipos de espectros, por ejemplo, espectros bimodales y de medida así como modelos de banda ancha.

Bibliografía

- [1] Forristall, G.: On the Statistical Distribution of Wave Heights in a Storm. *J. Geophys Res.* Vol. 83. (1978). 2353-2358.
- [2] Guedes Soares, C. Cherneva Z. and Antao. Abnormal Waves During Hurricane Camille. *J. Geophys Res.* Vol. 109. C08008. EM (2004).
- [3] Langley, R. S.: A statistical Analysis of Non-Linear Random Waves. *Ocean Eng. Offshore Structures Group, College of Aeronautics, Cranfield Institute of Technology, Cranfield, Beds. MK43 0AL, U.K.* (1986). 389-407.
- [4] Machado, U.: Statistics of Second-Order Stokes Waves and of Their Extremes. *Proceedings of Rouge Waves 2000, Workshop at Ifremer, Brest. 29-30/11/2000.*
- [5] Naess, A.: Crossing Rate Statistics of quadratic transformations of Gaussian processes. *Department of Structural Engineering, Norwegian University of Science and Technology, N-7491 Trondheim, Norway.*
- [6] Naess, A.; Machado, U.: Response Statistics of Large Compliant Offshore Structures. In *Proceedings 8th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability* New York: ASCE (2000).
- [7] Naess, A.; Machado, U.: Response Statistics of Linear Dynamic Systems Subjected to Quadratic Transformations of Gaussian Processes. In *Proceedings of the Euromech Colloquium 413: Stochastic Dynamics of Nonlinear Mechanical Systems* Palermo, Italy (2000).
- [8] Ortega, Joaquín: Estudio de Algunas Propiedades del Mar Usando Modelos Aleatorios. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Volumen VIII, Nro. 2* (2001) 111-130.
- [9] Podgórski, K., Rychlik, I., Machado, U.: Exact Distributions for Apparent Waves in Irregular Seas. *Ocean Eng* 27 (2000) 979-1016.

- [10] Rice, S. O.: Distribution of Quadratic Forms in Normal Random Variables - Evaluation by Numerical Integration. *Siam Journal Sci. Stat. Comput.* **1** (1980) 438-448.
- [11] Rychlik, I., Johannesson, P., Leadbetter, M. R.: Modeling and Statistical Analysis of Ocean Wave Data Using Transformed Gaussian Processes. *Marine Structures* **10** (1997) 13-47.
- [12] Silva Medina, Gustavo A.: Introducción a la Hidráulica Marítima. <http://gsilvam.com/maritima.htm>.
-