UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Sobre Operadores de Composición Uniformemente Acotado en Espacios de Funciones de Variación Acotada en el sentido de Popoviciu.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Br. Francy Del V. Armao V.** para optar al título de Licenciada en Matemática.

Tutor: Dr. Nelson Merentes

Caracas, Venezuela
Octubre, 2011

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Sobre Operadores de Composición Uniformemente Acotado en Espacios de Funciones de Variación Acotada en el sentido de Popoviciu.**", presentado por la **Br. Francy Del V. Armao V.**, titular de la Cédula de Identidad **17.028.438**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática**.

Dr. Nelson Merentes

Tutor

Dr. José Luis Sánchez

Jurado

Msc. Sergio Rivas

Jurado

A ti Hermanito Moisés que fuiste una de mis inspiraciones para seguir adelante con todo el amor del mundo te dedico este logro, espero que desde el cielo lo disfrutes como yo. Nunca te olvidaré.

A mi querida y maravillosa madre, hermanos y sobrino.

Agradecimiento

En primer lugar, gracias a Dios por darme la oportunidad y la dicha de la vida, por darme salud, fuerza y fortaleza de seguir adelante.

A mi querida madre, Alba Vera y hermanos por ser tan especiales y tan maravillosos, por brindarme todo su apoyo y comprensión.

Quiero agradecerle a Julio por toda su compresión, cariño y apoyo constante.

A mi tía Maribel por brindarme su confianza y ayuda cuando más lo necesite.

Al profesor Nelson Merentes, por su colaboración y ayuda durante su tutoría y por su dedicación a pesar de todas sus obligaciones.

A los profesores Jose Luis Sánchez, Azócar, Sergio por compartir conmigo sus conocimientos durante la realización del trabajo de grado.

Mis mas sinceros agradecimientos a María y Jessica por brindarme su amistad, compañia y colaboración durante la carrera, a Odalis y Zorelis por toda la ayuda prestada.

También quiero agradecerle a Andreína y Juan por su amistad y compañia durante la carrera.

En fin, a todas aquellas personas y seres queridos que de alguna manera han compartido conmigo todo este tiempo mil gracias a todos!!.

Índice general

Introducción

En el siglo pasado en el año de 1829 P.L. Dirichlet [9], demostró que toda función real a valores en $\mathbb{R}$ definida por medio de un número finito de partes monótonas tiene serie de Fourier puntualmente convergente en $\mathbb{R}$. Este resultado es conocido hoy como: Criterio de Dirichlet sobre la convergencia de series de Fourier. Así por primera vez y rigurosamente se obtuvo una demostración de la conjetura planteada en el año 1807 por Fourier, referente a la representatividad de una función arbitraria por medio de series trigonométricas. Este resultado aparece en el trabajo de Fourier sobre la teoría analítica del calor [10]. Según B. Nagy [44], la historia del desarrollo de la teoría de las series de Fourier comienza a partir de una disputa ocurrida alrededor de la mitad del siglo XVIII, entre D'Alembert, Euler y D. Bernoulli, respecto al problema de la cuerda vibrante.

En el año 1881 C. Jordan [14], definió la noción de función de variación acotada y demostró que ellas se pueden representar como diferencia de funciones monótonas, obteniendo la validez del teorema de Dirichlet para esta clase de funciones.

La noción dada por C. Jordan ha sido generalizada de varias direcciones, dependiendo de su utilidad en el contexto de algunas teorías. De La Vallée Poussin [57] en el año 1908, definió la clase de funciones con segunda variación acotada y demostró que se pueden representar como diferencias de funciones convexas.

Popoviciu [46] en el año 1937, generalizó los resultados de De La Vallée Poussin a órdenes superiores, por medio de las funciones con la k-ésima variación acotada ($k \in \mathbb{N}$). Estas nociones están enmarcadas en el contexto de la teoría de funciones reales. Mientras que en la teoría de las series de Fourier, podemos citar de p-variación y $\varphi-$variación en el sentido Wiener y la $\Lambda-$variación introducida por D. Waterman [58]-[59] en el año 1972 y la más general la $\Phi-$variación acotada introducida por Scharmm y Waterman, conocido en la literatura matemática como la variación en el sentido de Scharmm [55].

En el año 1910 F. Riesz [47] definió otra noción de función con p-variación acotada ($1 < p < \infty$) y demostró que estas se corresponden con aquellas funciones absolutamente continuas con derivada en el espacio L_p. Medvedev [35] en el año 1953, generalizó esta noción y el Lema de Riesz a la clase de funciones con $\varphi-$variación acotada, donde φ es una $\varphi-$función convexa que satisface la llamada condición ∞_1. Así las variaciones dadas por Riesz y Medvedev están situadas en la teoría del análisis funcional.

N. Merentes, en el año 1991 en [37] caracteriza la clase $RV_{(p,2)}$ de funciones, cuya derivada u' es absolutamente continua en $[a,b]$ y $u'' \in L_p[a,b]$, por medio de la noción de $(p,2)$-variación acotada ($1 < p < \infty$) en el sentido de Riesz, la cual puede considerarse como una combinación de las nociones dadas por De La Vallée Poussin y de Riesz.

Cuando queremos determinar existencia de soluciones en espacios de funciones, de ecuaciones diferenciales, integrales o funcionales, muchas veces intentamos aplicar el llamado método de contracción de Banach-Caccioppoli [21]-[43] a los operadores asociados a tales ecuaciones. En general uno de estos operadores es el operador de composición asociado a una función $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En este caso, la condición de contracción se convierte en una condición de Lipschitzidad global para este operador. En el año de 1982 J. Matkowski [21], demostró que el método de Banach-Caccioppoli no puede ser aplicado en el espacio $Lip[a, b]$, para hallar soluciones a ecuaciones no-lineales donde este explícitamente el operador de composición. Más precisamente Matkowski demostró que el operador de composición F, asociado a $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, actúa y es globalmente Lipschitz en el espacio $Lip[a, b]$ si y sólo si la función f tiene la forma:

$$f(t, x) = g(t)x + h(t) \quad (t \in [a, b],\ x \in \mathbb{R}), \tag{0.1}$$

donde las funciones g y $h \in Lip[a, b]$. En consecuencia,

$$Fu(t) = g(t)u(t) + h(t),$$

y así F es lineal en el espacio $Lip[a, b]$.

Matkowski, sus alumnos y colaboradores han demostrado la validez de este resultado en otros espacios, como por ejemplo:

- J. Matkowski (1984) [22], para el espacio $C^n[a, b]$ de las funciones n-veces continuamente diferenciables.

- A. Matkowska (1984) [34], para el espacio $H_\alpha[a, b]$ de las funciones Hölderianas en $[a, b]$ de orden $0 < \alpha < 1$.

- J. Matkowski y J. Miś (1984) [31], para el espacio $BV[a, b]$ de las funciones de variación acotada en $[a, b]$. En este caso la fórmula 0.1 es válida sustituyendo la función f por su regularización a izquierda.

- M. Lupa (1989) [19], para el espacio $H_\alpha C^n[a,b]$ de las funciones con n-ésima derivada Hölderiana en $[a,b]$ de orden α, con $0 < \alpha < 1$.

- A. Sieczko (1989) [56], para el espacio $AC^n[a,b]$ de las funciones con n-ésima derivada absolutamente contínua en $[a,b]$.

- J. Knop (1992) [15], para el espacio $LipC^n[a,b]$ de las funciones con n-ésima derivada Lipschitziana en $[a,b]$.

En 1991 N. Merentes [37],obtuvo el resultado de Matkowski para el espacio $RV_\varphi[a,b]$ de las funciones de $\varphi-$variación acotada en el sentido de Riesz.

En una investigación conjunta con Matkowski, tambien obtuvo los siguientes resultados:

- J. Matkowski y N. Merentes (1993) [29], para el espacio $RV_{(p,2)}[a,b]$ de las funciones de $(p,2)-$variación acotada en $[a,b]$.

- J. Matkowski y N. Merentes (1993) [30], para el espacio $W_p^n[a,b]$ de Sobolev Unidimencional de orden $n \in \mathbb{N}$.

- A. Matkowska, J. Matkowski y N. Merentes (1994) [33], para el espacio $C^n[a,b]$ de las funciones n-veces continuamente diferenciable.

En este último resultado se utiliza una técnica de inmersiones entre espacios de funciones y así evita la llamada regla de la cadena para derivadas de orden superior, con lo cual se obtiene una demostración,más didáctica y sencilla.

En estos resultados el operador de composición F actúa de un espacio en sí mismo, sin embargo en muchos casos, es conveniente clarificar la conducta de este operador entre espacios distintos. En este sentido, N. Merentes con S. Rivas

[41], pudieron verificar la validez del resultado de Matkowski cuando el operador actúa entre los espacios $RV_p[a,b]$ $(1 < p < \infty)$ y $BV[a,b]$.

Como hemos observado, la condición de Lipschitzidad global para el operador de composición F conlleva a que el operador F sea afín en el espacio.

En al año 2010, Matkowski sustituye la condición de globalmente Lipschitz en el operador de composición por la condición de uniformemente continuo (ver definición 1 [26], [25]) obteniendo los mismos resultados que fueron comentados anteriormente, algunos de ellos fueron demostrados por miembros del grupo de ecuaciones diferenciales de la escuela de Matemáticas de la Universidad Central de Venezuela, en colaboración con Matkowski y sus alumnos, el lector interesado en el tema puede consultar los siguientes trabajos:

- A. Azócar, A. Guerrero, J. Matkowski, N. Merentes, (2010) [2] *Uniformly continuous set-valued composition operators in the space of continuous functions of bounded variation in the sense of Wiener.*

- J. Matkowski, (2011) [28] *Uniformly bounded composition operators between general Lipschitz functions normed spaces.*

- J. Matkowski, (2009) [26] *Uniformly continuous superposition operators in the Banach space of Hölder functions.*

Recientemente, en el año 2011 el mismo Matkowski [28] sustituye la hipótesis de uniformemente continuo en el operador de composición por el de uniformemente acotado (vea definición 1 de este trabajo) y obtiene la misma condición (0.1) para la función $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ generadora del operador de composición o para regularizacion izquierda f^- de f. Un lector interesado en este tema puede consultar las siguientes referencias [28], [11].

En este trabajo especial de grado en el capítulo 4, damos, a nuestro juicio, una contribución al tema, obteniendo que el espacio $RV_{(p,2)}$ con $(1 < p < \infty)$, satisface la condición de Matkowski bajo la hipótesis de que el operador de composición F asociado a $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sea uniformemente acotado $RV_{(p,2)}$, con lo cual se debilitan las hipótesis dadas en el trabajo [29] .

Para concluir esta introducción, daremos información de la forma como estructuramos este trabajo especial de grado. Lo hemos dividido en cinco capítulos subdividiendo cada uno de ellos en secciones, no muy extensas en la mayoría de los casos. A nuestro juicio, esto permitirá una lectura más ágil del texto.

En el capítulo 1 se comienza introduciendo la noción de funciones de Variación Acotada dada por Camile Jordan en 1881 (ver [14]) con algunos ejemplos de este espacio, para luego exponer la noción de Segunda Variación Acotada dada por De La Valée Poussin en 1908 (ver [57]) en la cual presentaremos varios ejemplos y resultados que caracterizan tales funciones, entre ellas que ésta clase tiene estructura de espacio vectorial, espacio normado, espacio de Banach y álgebra de Banach.

En el capítulo 2 expondremos la noción de k-Variación Acotada, que fue introducida por Popoviciu en el año 1934 (ver [46]), como una generalización de la noción de Segunda Variación Acotada, además se mostrarán varios ejemplos de estas funciones y también haremos explícitamente demostraciones de algunas propiedades que satisfacen las funciones de k-Variación Acotada, entre ellas que tiene estructura de espacio vectorial, espacio normado, espacio de Banach y álgebra de Banach, así como otros resultados importantes con respecto a este espacio.

En el capítulo 3 presentaremos la noción de p-Variación Acotada $(1 < p < \infty)$, (ver [47]) dada por F. Riesz en 1910 para luego exponer así una generalización de ésta, es decir, la noción de $(p, 2)$-Variación Acotada $(1 < p < \infty)$, presentada por N. Merentes en el año 1992 (ver [38]), y de igual modo enunciaremos y demostraremos algunos resultados relevantes de este espacio de funciones.

En el capítulo 4 demostraremos que si el operador de composición es uniformemente acotado y aplica el espacio de funciones de $(p, 2)$-variación acotada en el sentido de Riesz en sí mismo entonces satisface la condición de Matkowski y asi es lineal en este espacio. Cabe destacar, que este resultado es una nueva contribución al tema de el Operador de composición en $RV_{(p,2)}[a, b]$ el cual es un trabajo realizado por S. Rivas, F. Armao y J. Rojas y será enviado a una revista venezolana.

En el capítulo 5 se expone en este trabajo, un resultado de M. Wrobel del 2011 (ver [61]), donde se presenta una caracterización del operador de composición uniformemente acotado entre espacios de Banach de las funciones de k-ésima variación acotada en el sentido de Popoviciu y se obtendrá como corolario, resultados conocidos sobre operadores de composición uniformemente continuo o Lipschitziano en tales espacios obteniendose que se satisface la condición de Matkowski .

Para finalizar, queremos comentar que los resultados expuestos en este trabajo de grado estan en varios artículos de investigación realizados entre 1910 y el año 2011 y la presentación en un solo folleto puede considerarse un aporte pedagógico para la comprensión del tema, algunos de estos artículos son: M. Wróbel, *On functions of bounded $n-th$ variation*(2011)(ver [60]), J. Matkowski, *Uniformly bound-*

ed composition operators between general Lipschitz functions normed spaces(Por aparecer) (ver [28]), F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer functionen*(1910)(ver [47]), M. T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une variaable réelle convexes d'order superior*(1933)(ver [46]), A.M. Russell, *Functions of bounded kth variation*(1973)(ver [50])y, además las referencias bibliograficas que estan en el trabajo de grado.

Capítulo 1

Funciones de Segunda Variación Acotada

En el presente capítulo se describe la noción de variación acotada introducida por Camille Jordan en [14]. Se hace referencia a algunos resultados importantes acerca de este espacio de funciones, con la finalidad de que sea más didáctico. También expondremos la noción de segunda variación acotada que fue introducida por De La Vallée Poussin en el año de 1908 en [57], presentándose algunos resultados acerca del comportamiento de las funciones de este espacio y finalizamos con la demostración de que toda función con segunda variación acotada se puede escribir como la diferencia de funciones convexas.

1.1. Funciones de Variación Acotada

En el año de 1881, Camille Jordan en [14], introduce el concepto de función de variación acotada en un intervalo $[a, b]$, de la siguiente manera:

Definición 1.1. *(variación acotada) Sea* $u : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Dada una partición de* $[a, b]$

de la forma:

$$\pi : a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$$

Se define

$$\sigma(u;\pi) := \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})|$$

y

$$V(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \sigma(u;\pi),$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones π *del intervalo* $[a,b]$*. Si* $V(u;[a,b]) < \infty$ *se dice que la función es de variación acotada.*

Esta clase de funciones se denota por $BV[a,b]$ y la misma es un espacio normado con la norma:

$$\|u\|_{BV[a,b]} = |u(a)| + V(u;[a,b]), \quad u \in BV[a,b].$$

A continuación, se presentarán algunos ejemplos que ilustran la definición de $BV[a,b]$. En estos ejemplos consideraremos particiones π del intervalo $[a,b]$ del tipo: $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$

Ejemplo 1.2. *Consideremos* $c \in \mathbb{R}$ *y la función constante* u *en* $[a,b]$*, definida por*

$$u(t) = c \qquad \textit{para todo} \quad t \in [a,b].$$

Entonces, la variación de la función u *en el intervalo* $[a,b]$ *viene dada por*

$$\begin{aligned} V(u) &= V(u;[a,b]) \\ &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |c - c| \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde π, *es el conjunto de todas las particiones del intervalo* $[a, b]$.

Ejemplo 1.3. *Dada una función* $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *monótona entonces:*

$$V(u;[a,b]) = |u(b) - u(a)|$$

En efecto, si la función es monótona creciente, entonces:

$$\begin{aligned} V(u;[a,b]) &= \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^{n} u(t_j) - u(t_{j-1}) \\ &= u(b) - u(a). \end{aligned}$$

Así,

$$V(u) = u(b) - u(a) = |u(b) - u(a)|.$$

Ahora, si la función $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es monótona decreciente, usando el mismo* *argumento anterior obtenemos que la variación es:*

$$V(u) = u(a) - u(b) = |u(a) - u(b)| = |u(b) - u(a)|.$$

Lo cual concluye la demostración.

Ejemplo 1.4. *Consideremos la función identidad $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, es decir,*

$$u(t) = t \qquad t \in [a, b].$$

Entonces, la variación de la función u en el intervalo $[a, b]$ es dada por

$$\begin{aligned} V(u; [a, b]) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |t_j - t_{j-1}| \\ &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) \\ &= (t_n - t_0) \\ &= b - a. \end{aligned}$$

donde π, es el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$.

Daremos un ejemplo de una función continua que no es de variación acotada.

Ejemplo 1.5. *Consideremos la función $u : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida mediante la siguiente expresión:*

$$u(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen}(\frac{\pi}{t}), & si \quad 0 < t \leq 1 \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

La función u es continua en $[0,1]$. *Dada la partición*

$$\pi = \left\{0, \frac{2}{2n+1}, \frac{2}{2n-1}, \cdots, \frac{2}{7}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, 1\right\}$$

del intervalo $[0,1]$. *Se obtiene*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| &= \left|u\left(\frac{2}{2n+1}\right) - u(0)\right| + \left|u\left(\frac{2}{2n-1}\right) - u\left(\frac{2}{2n+1}\right)\right| + \\
&\quad + \cdots + \left|u\left(\frac{2}{5}\right) - u\left(\frac{2}{7}\right)\right| + \left|u\left(\frac{2}{3}\right) - u\left(\frac{2}{5}\right)\right| + \left|u(1) - u\left(\frac{2}{3}\right)\right| \\
&= \frac{2}{2n+1} + \left(\frac{2}{2n-1} + \frac{2}{2n+1}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) \\
&= 2\left(\frac{2}{2n+1}\right) + 2\left(\frac{2}{2n-1}\right) + \cdots + 2\left(\frac{2}{5}\right) + 2\left(\frac{2}{7}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) \\
&= 4\left(\left(\frac{1}{2n+1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\right).
\end{aligned}$$

Luego como esta serie

$$\left(\frac{1}{2n+1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

diverge, por lo tanto, la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$, *donde*

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1},$$

no esta acotada. Así $\sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})|$ *puede ser arbitrariamente larga tomando* n *suficientemente grande, entonces* $V(u,[0,1]) \longrightarrow \infty$ *por lo tanto* u *no es de variación acotada.*

Uno de los resultados más importante dado por C. Jordan cuando introduce el concepto de variación acotada en [14] es el teorema que veremos a continuación. Para más detalles ver [1].

Teorema 1.6. *(Jordan [14]) Una función $u \in BV[a,b]$ si y sólo si existen funciones u_1, u_2 en $[a,b]$ monótonas tales que $u = u_1 - u_2$.*

La relevancia del resultado anterior radica en que un gran número de propiedades de las funciones monótonas se pueden transferir a las funciones que tiene variación acotada: existencia de límites laterales, conjunto de discontinuidades numerable y las mismas son de salto, Riemann-integrabilidad, existencia de la derivada casi siempre en $[a,b]$ y la convergencia puntual de su serie de Fourier.

1.2. Funciones de Segunda Variación Acotada

De La Vallée Poussin en el año de 1908 en [57], generalizó la noción de variación acotada dada por C. Jordan en 1881, introduciendo la noción de segunda variación acotada en un intervalo $[a,b]$, de la manera siguiente:

Definición 1.7. *(segunda variación acotada) Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dada una partición de $[a,b]$ de la forma:*

$$\pi : a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

Se define

$$\sigma^2(u;\pi) = \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{u(t_{j+2}) - u(t_{j+1})}{t_{j+2} - t_{j+1}} - \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right|,$$

y

$$V^2(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \sigma^2(u;\pi), \tag{1.1}$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones π del intervalo $[a,b]$. El número $V^2(u;[a,b])$ se denomina segunda variación de la función u en el intervalo $[a,b]$. Si $V^2(u;[a,b]) < \infty$ se dice que la función es de segunda variación acotada. Esta clase de funciones se denota por $BV^2[a,b]$.

Observación 1.8. *Intuitivamente la segunda variación mide la variación de la derivada de la función en forma discreta.*

Definición 1.9. *Dada una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, la segunda diferencia dividida respecto a los puntos $t_0, t_1 \in [a,b]$ con $t_0 \neq t_1$, se define mediante la siguiente expresión:*

$$u[t_0, t_1] := \frac{u(t_1) - u(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Utilizando la notación anterior, la noción de segunda variación acotada, en el sentido de De La Vallée Poussin, expresada en la ecuación (1.1), queda de la siguiente forma:

$$V^2(u) = V^2(u;[a,b]) = \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]|, \tag{1.2}$$

donde:

$$u[t_{j+1}, t_{j+2}] = \frac{u(t_{j+2}) - u(t_{j+1})}{t_{j+2} - t_{j+1}},$$

$$u[t_j, t_{j+1}] = \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j}.$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones π del intervalo $[a,b]$ que tiene la forma: $\pi : a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$.

A continuación, presentaremos varios ejemplos que muestran como se calcula la segunda variación acotada para algunas funciones.

En estos ejemplos consideraremos particiones π del intervalo $[a,b]$ del tipo: $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$

Ejemplo 1.10. *Sea $c \in \mathbb{R}$ y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función constante definida de la siguiente forma: $u(t) = c$, para todo $t \in [a,b]$, con lo cual tenemos que:*

$$\begin{aligned}
V^2(u) = V^2(u;[a,b]) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{u(t_{j+2}) - u(t_{j+1})}{t_{j+2} - t_{j+1}} - \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{c-c}{t_{j+2} - t_{j+1}} - \frac{c-c}{t_{j+1} - t_j} \right| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |0 - 0| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia, la función constante tiene segunda variación acotada cero en $[a,b]$.

Ejemplo 1.11. *Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función identidad definida de la siguiente forma:*

$$u(t) = t \ \textit{ para todo } \ t \in [a,b],$$

con lo cual tenemos que:

$$\begin{aligned}
V^2(u) = V^2(u;[a,b]) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{u(t_{j+2}) - u(t_{j+1})}{t_{j+2} - t_{j+1}} - \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{t_{j+2} - t_{j+1}}{t_{j+2} - t_{j+1}} - \frac{t_{j+1} - t_j}{t_{j+1} - t_j} \right| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |1 - 1| = 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia, la función identidad tiene segunda variación acotada cero en $[a, b]$.

Ejemplo 1.12. *Sea* $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ *la función cuadrática definida por:*

$$u(t) = t^2 \;\; \textit{para todo} \;\; t \in [a, b],$$

entonces, de (1.1) se tiene que:

$$\begin{aligned}
V^2(u) = V^2(u; [a, b]) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{(t_{j+2})^2 - (t_{j+1})^2}{t_{j+2} - t_{j+1}} - \frac{(t_{j+1})^2 - (t_j)^2}{t_{j+1} - t_j} \right| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{(t_{j+2} - t_{j+1})(t_{j+2} + t_{j+1})}{t_{j+2} - t_{j+1}} - \frac{(t_{j+1} - t_j)(t_{j+1} + t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |t_{j+2} - t_j| \\
&= 2(b - a).
\end{aligned}$$

de donde, la función cuadrática tiene segunda variación acotada.

1.2.1. Propiedades del Espacio $BV^2[a, b]$

A continuación, se demuestran algunas propiedades de las funciones de segunda variación acotada, que permitirán conocer algunas características de las mismas.

Podemos considerar la función $V^2(\cdot; [a, b]) : BV^2[a, b] \to \mathbb{R}$, definida por $u \to V^2(u; [a, b])$, tal que asocia a cada función $u \in V^2[a, b]$ su segunda variación acotada.

Proposición 1.13. *Consideremos* $V^2(\cdot)$ *la función de variación cuadrática definida sobre la clase* $BV^2[a, b]$ *entonces:*

1. *$V^2(\cdot)$ es una función positiva.*

2. *$V^2(\cdot)$ es una función par.*

3. *$V^2(\cdot)$ es una función convexa, es decir, $V^2(\alpha u + \beta v) \leq \alpha V^2(u) + \beta V^2(v)$ para todo $\alpha, \beta \in [0,1]$, tal que $\alpha + \beta = 1$.*

Demostración

Sea $\pi : a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$.

1. Esto es consecuencia de la definición de $V^2(u)$.

2. Para demostrar que $V^2(\cdot)$ es una función par, debemos demostrar que:

$$V^2(u;[a,b]) = V^2(-u;[a,b]) \text{ para todo } u \in V^2[a,b].$$

De (1.2) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} V^2(-u) &= \sup_\pi \sum_{j=1}^{n-2} |-u[t_{j+1}, t_{j+2}] - (-u[t_j, t_{j+1}])| \\ &= \sup_\pi \sum_{j=1}^{n-2} |-(u[t_j+1, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}])| \\ &= \sup_\pi \sum_{j=1}^{n-2} |u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]| \\ &= V^2(u). \end{aligned}$$

Con lo cual, hemos demostrado que efectivamente $V^2(\cdot)$ es una función par.

3. Para demostrar que $V^2(\cdot)$ es una función convexa, se debe cumplir la siguiente desigualdad:

$$V^2(\alpha u + \beta v) \leq \alpha V^2(u) + \beta V^2(v),$$

donde $\alpha, \beta \in [0,1]$ y $\alpha + \beta = 1$ con $u, v \in V^2[a,b]$.

De la noción de segunda variación acotada y utilizando las propiedades del supremo, obtenemos lo sigue:

$$
\begin{aligned}
V^2(\alpha u + \beta v) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |(\alpha u + \beta v)([t_{j+1}, t_{j+2}]) - (\alpha u + \beta v)([t_j, t_{j+1}])| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |\alpha u[t_{j+1}, t_{j+2}] + \beta v[t_{j+1}, t_{j+2}] - \alpha u[t_j, t_{j+1}] - \beta v[t_j, t_{j+1}]| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |\alpha u[t_{j+1}, t_{j+2}] - \alpha u[t_j, t_{j+1}] + \beta v[t_{j+1}, t_{j+2}] - \beta v[t_j, t_{j+1}]| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |\alpha(u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]) + \beta(v[t_{j+1}, t_{j+2}] - v[t_j, t_{j+1}])| \\
&\leq \alpha \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]| \\
&\quad + \beta \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |v[t_{j+1}, t_{j+2}] - v[t_j, t_{j+1}]| \\
&= \alpha V^2(u) + \beta V^2(v).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $V^2(\cdot)$ es una función convexa. ♣

Observación 1.14. *De la Proposición 1.13 (parte 2 y 3), se tiene que $V^2[a,b]$ es un conjunto simétrico y convexo.*

De la Proposición 1.13 (parte 3), tenemos que como $\alpha + \beta = 1$, la siguiente desigualdad se cumple:

$$\alpha V^2(u) + \beta V^2(v) < V^2(u) + V^2(v),$$

y con lo cual se puede presentar el siguiente:

Corolario 1.15. *Sean $\alpha, \beta \in [0,1]$ tales que $\alpha+\beta=1$ con $u, v \in V^2[a,b]$ entonces:*

$$V^2(\alpha u+\beta v) \leq V^2(u)+V^2(v).$$

Proposición 1.16. *La clase de funciones de segunda variación acotada $BV^2[a,b]$ es un espacio vectorial, es decir, $BV^2[a,b]$ satisface las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $u, v \in BV^2[a,b]$ entonces $u+v \in BV^2[a,b]$.*
2. *Para todo $u, v, h \in BV^2[a,b]$, se tiene que $V^2((u+v)+h) = V^2(u+(v+h))$.*
3. *Existe una función nula, $l(x) \in BV^2[a,b]$, definida como $l(x)=0$ para todo $x \in [a,b]$ tal que $V^2(u+l)=V^2(u)$, para todo $u \in BV^2[a,b]$.*
4. *Para todo $u \in BV^2[a,b]$, existe $-u \in BV^2[a,b]$ definido como $-u : [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que $(-u)(x) = -u(x)$, entonces $V^2(-u+u) = V^2(l)$.*
5. *Para todo $u, v \in BV^2[a,b]$, se tiene que $V^2(u+v) = V^2(v+u)$.*
6. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u \in BV^2[a,b]$, se tiene que $\alpha u \in BV^2[a,b]$.*
7. *Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u \in BV^2[a,b]$, se tiene que $V^2(\alpha(\beta u)) = |\alpha\beta| V^2(u)$*
8. *Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u \in BV^2[a,b]$, se tiene que $V^2((\alpha+\beta)u) = V^2(\alpha u+\beta u)$.*
9. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u \in BV^2[a,b]$, se tiene que $V^2(\alpha(u+v)) = V^2(\alpha u+\alpha v)$.*
10. *Para cualquier $u \in BV^2[a,b]$ y el escalar 1, se tiene que $V^2(1u) = V^2(u)$.*

Demostración

La demostración que expondremos a continuación es bastante explícita dado que comprobaremos las diez propiedades enunciadas; sin embargo, basta con hacer las demostraciones de las propiedades 1 y 6 para obtener que es un espacio vectorial.

1. Sean $u, v \in BV^2[a, b]$, entonces demostraremos que la suma de dos funciones con segunda variación acotada pertenece a la clase de funciones con segunda variación acotada, en efecto, utilizando la definición y las propiedades del supremo, obtenemos:

$$\begin{aligned}
V^2(u+v) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |(u+v)([t_{j+1}, t_{j+2}]) - (u+v)([t_j, t_{j+1}])| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |u[t_{j+1}, t_{j+2}] + v[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}] - v[t_j, t_{j+1}]| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}] + v[t_{j+1}, t_{j+2}] - v[t_j, t_{j+1}]| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |(u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]) + (v[t_{j+1}, t_{j+2}] - v[t_j, t_{j+1}])| \\
&\leq \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]| + \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |v[t_{j+1}, t_{j+2}] - v[t_j, t_{j+1}]| \\
&= V^2(u) + V^2(v) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Con lo cual tenemos que $u + v \in BV^2[a, b]$.

2. La asociatividad de funciones de la clase $BV^2[a, b]$. Sean $u, v, h \in BV^2[a, b]$. De la noción (1.2) y de la propiedad del supremo, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
V^2((u+v)+h) &= \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n-2} |((u+v)+h)([t_{j+1}, t_{j+2}]) - ((u+v)+h)([t_j, t_{j+1}])|, \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |(u+v)([t_{j+1}, t_{j+2}]) + h[t_{j+1}, t_{j+2}] \\
&\qquad -((u+v)([t_j, t_{j+1}]) + h[t_j, t_{j+1}])|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|u[t_{j+1},t_{j+2}]+v[t_{j+1},t_{j+2}]+h[t_{j+1},t_{j+2}]-u[t_j,t_{j+1}]\\
&\qquad -v[t_j,t_{j+1}]-h[t_j,t_{j+1}]|\\
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|u[t_{j+1},t_{j+2}]+(v+h)([t_{j+1},t_{j+2}])\\
&\qquad -(u[t_j,t_{j+1}]+(v+h)([t_j,t_{j+1}]))|\\
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|(u+(v+h))([t_{j+1},t_{j+2}])-(u+(v+h))([t_j,t_{j+1}])|\\
&= V^2(u+(v+h)).
\end{aligned}$$

3. Para la función nula $l(x)\in BV^2[a,b]$, definida como $l(x)=0$ para todo $x\in[a,b]$, debemos demostrar que para cualquier función $u\in BV^2[a,b]$, la segunda variación de la suma de u con la función nula es igual a la segunda variación de la función u. En efecto se tiene que:

$$\begin{aligned}
V^2(u+l) &= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|(u+l)([t_{j+1},t_{j+2}])-(u+l)([t_j,t_{j+1}])|\\
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|u[t_{j+1},t_{j+2}]+l[t_{j+1},t_{j+2}]-u[t_j,t_{j+1}]-l[t_j,t_{j+1}]|,
\end{aligned}$$

como $l(x)=0$ para todo $x\in[a,b]$ entonces $l[t_{j+1},t_{j+2}]=0$ y $l[t_j,t_{j+1}]=0$ para todo $j\in[1,...,n-2]$, de donde se deduce que:

$$V^2(u+l)=\sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|u[t_{j+1},t_{j+2}]-u[t_j,t_{j+1}]|=V^2(u).$$

4. Se define el inverso aditivo de u como $-u:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $(-u)(x)=-u(x)$, con lo cual debemos demostrar que:

$$V^2(-u+u)=V^2(l).$$

En efecto, por definición de segunda variación acotada se tiene que:

$$
\begin{aligned}
V^2(-u+u) &= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|(-u+u)([t_{j+1},t_{j+2}])-(-u+u)([t_j,t_{j+1}])| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|-u[t_{j+1},t_{j+2}]+u[t_{j+1},t_{j+2}]-(-u[t_j,t_{j+1}]+u[t_j,t_{j+1}])| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|0-0| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|l[t_{j+1},t_{j+2}]-l[t_j,t_{j+1}]| \\
&= V^2(l).
\end{aligned}
$$

5. La suma de funciones en la clase $BV^2[a,b]$ es conmutativa ya que para $u,v\in BV^2[a,b]$ se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
V^2(u+v) &= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|(u+v)([t_{j+1},t_{j+2}])-(u+v)([t_j,t_{j+1}])| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|u[t_{j+1},t_{j+2}]+v[t_{j+1},t_{j+2}]-u[t_j,t_{j+1}]-v[t_j,t_{j+1}]|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V^2(u+v) &= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|v[t_{j+1},t_{j+2}]+u[t_{j+1},t_{j+2}]-v[t_j,t_{j+1}]-u[t_j,t_{j+1}]| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|(v+u)([t_{j+1},t_{j+2}])-(v+u)([t_j,t_{j+1}])| \\
&= V^2(v+u).
\end{aligned}
$$

6. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u \in BV^2[a,b]$, entonces:

$$\begin{aligned} V^2(\alpha u) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |\alpha u[t_{j+1}, t_{j+2}] - \alpha u[t_j, t_{j+1}]| \\ &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |\alpha (u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}])| \\ &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |\alpha||u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]| \\ &= |\alpha| \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]| \\ &= |\alpha| V^2(u). \end{aligned}$$

Con lo cual $\alpha u \in BV^2[a,b]$.

7. Sean $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ y $u \in BV^2[a,b]$ entonces se tiene:

$$\begin{aligned} V^2(\alpha(\beta u)) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |\alpha(\beta u[t_{j+1}, t_{j+2}]) - \alpha(\beta u[t_j, t_{j+1}])| \\ &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |(\alpha(\beta(u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]))| \\ &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |\alpha\beta(u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}])| \end{aligned}$$

así que,

$$\begin{aligned} V^2(\alpha(\beta u) &= V^2((\alpha\beta)u) \\ &= |\alpha\beta| V^2(u). \end{aligned}$$

8. Considerando $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u \in BV^2[a,b]$, entonces:

$$\begin{aligned}
V^2((\alpha+\beta)u) &= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|(\alpha+\beta)(u([t_{j+1},t_{j+2}]-u[t_j,t_{j+1}])| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|(\alpha+\beta)u([t_{j+1},t_{j+2}]-(\alpha+\beta)u[t_j,t_{j+1}]| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|\alpha u[t_{j+1},t_{j+2}]+\beta u[t_{j+1},t_{j+2}]-\alpha u[t_j,t_{j+1}]-\beta u[t_j,t_{j+1}]| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|\alpha u[t_{j+1},t_{j+2}]-\alpha u[t_j,t_{j+1}]+\beta u[t_{j+1},t_{j+2}]-\beta u[t_j,t_{j+1}]|
\end{aligned}$$

Así, obtenemos que

$$\begin{aligned}
V^2((\alpha+\beta)u) &= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-2}|(\alpha u+\beta u)([t_{j+1},t_{j+2}])-(\alpha u+\beta u)([t_j,t_{j+1}])| \\
&= V^2(\alpha u+\beta u).
\end{aligned}$$

9. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in BV^2[a,b]$, se quiere verificar que $V^2(\alpha(u+v)) = V^2(\alpha u + \alpha v)$, entonces:

$$\begin{aligned}
V^2(\alpha(u+v)) &= \sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n-2}|\alpha(u+v)([t_{j+1},t_{j+2}])-\alpha(u+v)([t_j,t_{j+1}])| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n-2}|\alpha(u[t_{j+1},t_{j+2}]+v[t_{j+1},t_{j+2}])-\alpha(u[t_j,t_{j+1}]+v[t_j,t_{j+1}])| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n-2}|\alpha u[t_{j+1},t_{j+2}]+\alpha v[t_{j+1},t_{j+2}]-\alpha u[t_j,t_{j+1}]-\alpha v[t_j,t_{j+1}]| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n-2}|(\alpha u+\alpha v)([t_{j+1},t_{j+2}])-(\alpha u-\alpha v)([t_j,t_{j+1}])| \\
&= V^2(\alpha u+\alpha v).
\end{aligned}$$

10. Para cualquier $u \in BV^2[a,b]$ y el escalar 1 se debe cumplir que $V^2(1u) = V^2(u)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} V^2(1u) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |(1u)([t_{j+1}, t_{j+2}]) - (1u)([t_j, t_{j+1}])| \\ &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} |u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]| \\ &= V^2(u). \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

Hemos demostrado que la clase de funciones $BV^2[a,b]$ se puede dotar de una estructura de espacio vectorial. El siguiente resultado nos permite deducir que las funciones de segunda variación acotada son Lipschitz.

Definición 1.17. *Una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Lipschitz si existe una constante finita $K > 0$, tal que*

$$L_a^b(u) = \sup_{\substack{t,s \in [a,b] \\ t \neq s}} \left| \frac{u(s) - u(t)}{s - t} \right| \leq K.$$

La clase de las funciones Lipschitz en $[a,b]$ es un espacio vectorial denotado por $Lip[a,b]$. Este espacio vectorial es un espacio de Banach con la norma:

$$\|u\|_{Lip} := |u(a)| + L_a^b(u), \quad u \in Lip[a,b].$$

Teorema 1.18. *(Russell 1970 ver [49]) $BV^2[a,b] \subset Lip[a,b]$.*

Demostración:

Sea $u \in BV^2[a,b]$ y $\pi : a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$, entonces existe una constante K, tal que:

$$\sum_{j=1}^{n-2} |u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]| \leq K,$$

sea c un punto tal que $a < c < b$, con lo cual tenemos que:

$$|u[c, b] - u[a, c]| \leq K.$$

Supongamos que $x_1 \neq c$ es un punto de $[a, b]$. Si $a \leq x_1 < c$, entonces:

$$|u[c, b] - u[x_1, c]| \leq K,$$

por lo tanto, existe una constante k_1 tal que $|u[x_1, c]| \leq k_1, \quad a \leq x_1 < c$.

De manera similar, existe una constante k_2, tal que, $|u[c, x_1]| \leq k_2, \quad c \leq x_1 < b$.

Ahora consideramos la subpartición $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Si x_1 es el punto c, entonces $u[x_1, x_2]$ está acotada por la constante k_2, sin embargo si x_2 es el punto c, $u[x_1, x_2]$ esta acotada por k_1. Si $a \leq x_1 < x_2 \leq c$, entonces:

$$|u[x_1, x_2]| \leq |u[x_1, x_2] - u[x_2, c]| + |u[x_2, c]| \leq K + k_1.$$

Similarmente, si $c \leq x_1 < x_2 \leq b, \quad |u[x_1, x_2]| \leq K + k_2$. Finalmente si $a \leq x_1 < c < x_2 \leq b$, entonces:

$$|u[x_1, x_2]| \leq |u[x_1, x_2] - u[a, x_1]| + |u[a, x_1] - u[x_1, c]| + |u[x_1, c]| \leq 2k + k_1.$$

De aquí obtenemos que $u \in Lip[a, b]$, con lo cual $BV^2[a, b] \subset Lip[a, b]$. ♣

Lema 1.19. *(Caracterización de Riesz)*

Una función real g está en la clase $BV^2[a, b]$ si, y sólo si, g es absolutamente *continua y existe una función $h \in BV[a,b]$ tal que*

$$g(x) = g(a) + \int_a^x h(x)\, dx.$$

Observación 1.20. *De la definición de segunda variación acotada podemos observar que si la función tiene regularidad, es decir, si existe la derivada y además es continua entonces, ésta mide la variación de la derivada.*

Observación 1.21. *La condición de Lipschizidad de las funciones con segunda variación acotada, nos permite garantizar la continuidad de la función y la existencia de las derivadas laterales de cada punto del intervalo $[a,b]$. Además, toda función con segunda variación acotada, tiene variación acotada en el sentido de* Jordan, *es decir, $BV^2[a,b] \subset BV[a,b]$. Ya que, es conocido el siguiente resultado (ver [40]):*

$$BV^2[a,b] \subset Lip[a,b] \subset AC[a,b] \subset BV[a,b],$$

donde $AC[a,b]$ es el espacio de las funciones absolutamente continuas en el intervalo $[a,b]$.

A continuación, presentamos unos ejemplo que muestran que las contensiones anteriores son propias.

Ejemplo 1.22. *Consideremos la función $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$h(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t = 0 \\ t \sin \frac{1}{t} & si \quad t \neq 0. \end{cases}$$

Sea

$$g(t) = \int_0^t h(t) dt$$

entonces,

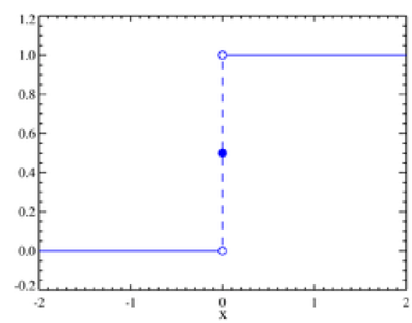
$$g'(t) = h(t)$$

es acotada y así, $g(t)$ *es Lipschitz, pero no es de segunda variación acotada ya que* $g'(t) \notin BV$.

Por lo tanto, $BV^2[a,b] \subsetneq Lip[a,b]$.

Ejemplo 1.23. *Consideremos la función de escalón unitario* $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \geq 0 \\ 0 & si \quad t < 0. \end{cases}$$



Luego, para cualquier partición $\pi := -1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ *se tiene que*

$$\sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| = 1$$

por lo que, la función u *es de variación acotada.*

Además u *no es absolutamente continua, entonces* $AC[a,b] \subsetneq BV[a,b]$.

Ejemplo 1.24. *Consideremos la función* $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$u(t) := \sqrt{t}$$

Es claro que la función u *es continua en* $[0,1]$ *y como* u *es creciente, tenemos que la función* u *tiene variación acotada en* $[0,1]$.

Pero $u \notin Lip[a,b]$, ya que:

$$\left|\frac{u(t)-u(0)}{t-0}\right| = \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

no es acotada en ningún entorno del cero. Por lo tanto existen funciones continuas y de variación acotada en el intervalo $[a,b]$, que no son Lipschitz.

En consecuencia, del teorema anterior se presenta el siguiente corolario.

Corolario 1.1. *Si $u \in BV^2[a,b]$ entonces u es acotada en $[a,b]$.*

A continuación, demostraremos que el espacio $BV^2[a,b]$ se puede dotar de una estructura de espacio normado, mediante la siguiente definición:

Definición 1.25. *El funcional $\|\cdot\|_{BV^2[a,b]} : BV^2[a,b] \to \mathbb{R}$ se define de la siguiente forma:*

$$\|u\|_{BV^2[a,b]} = |u(a)| + |u'_+(a)| + V^2(u,[a,b]).$$

Este funcional tiene sentido ya que por la condición de Lipschizidad, se garantiza que los términos $|u(a)|$ y $|u'_+(a)|$ existen. Veremos que de este funcional se deduce una norma y que por lo tanto $(BV^2[a,b], \|\cdot\|_{BV^2})$ es un espacio normado.

Proposición 1.26. *$\|\cdot\|_{BV^2}$ es una norma.*

Demostración: Sean $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $u, v \in BV^2[a,b]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $\|u\|_{BV^2} \geq 0$.

   Porque $|u(a)| \geq 0$, $|u'_+(a)| \geq 0$ y $V^2(u;[a,b]) \geq 0$.

2. $\|u\|_{BV^2} = 0$ si y sólo si $u = 0$.

   Si $\|u\|_{BV^2} = 0$ implica que $\|u\|_{BV^2} = |u(a)| + |u'_+(a)| + V^2(u;[a,b]) = 0$ entonces se tiene que: $|u(a)| = 0$ y $|u'_+(a)| = 0$ de donde $u(a) = 0$ y $u'_+(a) = 0$ y

$$\sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{u(t_{j+2}) - u(t_{j+1})}{t_{j+2} - t_{j+1}} - \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right| = 0,$$

considerando la siguiente partición $\pi : a = t_1 < t_2 = c < t \leq b$, tendremos que:

$$\left| \frac{u(t) - u(c)}{t - c} - \frac{u(c) - u(a)}{c - a} \right| = 0.$$

considerando el límite cuando $c \to a$, y utilizando las condiciones anteriores, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{c \longrightarrow a} \left| \frac{u(t) - u(c)}{t - c} - \frac{u(c) - u(a)}{c - a} \right| \\ &= \left| \frac{u(t) - u(a)}{t - a} - u'_+(a) \right| \end{aligned}$$

entonces:

$$\frac{u(t) - u(a)}{t - a} = 0.$$

de donde se sigue que $u(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$, con lo cual $u = 0$.

Ahora si $u = 0$ implica que $u(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$, por lo tanto, $\|u\|_{BV^2} = 0$.

3. $\|\lambda u\|_{BV^2} = |\lambda| \|u\|_{BV^2}$, es decir:

$$\|\lambda u\|_{BV^2} = |\lambda u(a)| + |\lambda u'_+(a)| + V^2(\lambda u, [a, b]).$$

Obsérvese que en la parte 6 de la proposición 1.16 se tiene que

$$V^2(\lambda u; [a,b]) \;=\; |\lambda| V^2(u; [a,b]).$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\|\lambda u\|_{BV^2} &= |\lambda||u(a)| + |\lambda||u'_+(a)| + |\lambda| V^2(u, [a,b]) \\
&= |\lambda|(|u(a)| + |u'_+(a)| + V^2(u, [a,b])) \\
&= |\lambda|\|u\|_{BV^2}.
\end{aligned}$$

4. $\|u+v\|_{BV^2} \leq \|u\|_{BV^2} + \|v\|_{BV^2}$.

   Por la parte 1 de la proposición 1.16 se tiene que

$$V^2(u+v) \;=\; V^2(u) + V^2(v).$$

Por la desigualdad anterior y de la definición de la norma $\|\cdot\|_{BV^2[a,b]}$, resulta que:

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{BV^2} &= |u(a)+v(a)| + |u'_+(a)+v'_+(a)| + V^2(u+v, [a,b]) \\
&\leq |u(a)| + |v(a)| + |u'_+(a)| + |v'_+(a)| + V^2(u, [a,b]) + V^2(v; [a,b]) \\
&= (|u(a)| + |u'_+(a)| + V^2(u, [a,b])) + (|v(a)| + |v'_+(a)| V^2(v; [a,b]) \\
&= \|u\|_{BV^2} + \|v\|_{BV^2},
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\|u+v\|_{BV^2} \leq \|u\|_{BV^2} + \|v\|_{BV^2}.$$

Con lo cual $\|\cdot\|_{BV^2[a,b]}$ es una norma. ♣.

Teorema 1.27. *El espacio* $(BV^2[a,b], \|\cdot\|_{BV^2})$ *es un espacio de Banach.*

Demostración:

Sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(BV^2[a,b], \|\cdot\|_{BV^2})$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$, tal que si $n, m \geq N(\varepsilon)$, se tiene que:

$$\|u_n - u_m\|_{BV^2[a,b]} < \varepsilon.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u_n(a) = u_m(a) = 0$, $u'_n(a) = u'_m(a) = 0$, con $n \geq 1$. De donde tenemos que:

$$V^2(u_n - u_m) < \varepsilon \qquad para\ \ todo \qquad n, m \geq N(\varepsilon).$$

Considerando la partición π de la forma: $\pi : a = t_1 < t_2 = c < t_3 = x < t_4 = b$, de la definición de la segunda variación acotada y de la desigualdad anterior, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \;&>\; \left|\frac{(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(c)}{x - c} - \frac{(u_n - u_m)(c) - (u_n - u_m)(a)}{c - a}\right| \\
&\qquad + \left|\frac{(u_n - u_m)(b) - (u_n - u_m)(x)}{b - x} - \frac{(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(c)}{x - c}\right| \\
&>\; \left|\frac{(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(c)}{x - c} - \frac{(u_n - u_m)(c) - (u_n - u_m)(a)}{c - a}\right| \\
&>\; \left|\frac{(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(c)}{x - c}\right| - \left|\frac{(u_n - u_m)(c) - (u_n - u_m)(a)}{c - a}\right|.
\end{aligned}$$

De donde:

$$\varepsilon + \left| \frac{(u_n - u_m)(c) - (u_n - u_m)(a)}{c - a} \right| > \left| \frac{(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(c)}{x - c} \right|.$$

Considerando el límite cuando $c \to a$ en la desigualdad anterior, obtenemos la siguiente relación:

$$\varepsilon + |(u_n - u_m)'(a)| > \left| \frac{(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(a)}{x - a} \right|$$

$$\varepsilon|x - a| > |(u_n - u_m)(x)|,$$

considerando que $|b - a| > |x - a|$, obtenemos que:

$$\varepsilon|b - a| > |(u_n - u_m)(x)|.$$

Entonces la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es completo, se tiene que toda sucesión de Cauchy converge, es decir, existe el límite de la sucesión, y lo denotaremos de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \quad \forall x \in [a, b],$$

y $u_n(x) - u_m(x)$ tiende a $u_n(x) - u(x)$ en $[a, b]$ cuando $m \to \infty$.

A continuación, demostraremos que u_n converge bajo la norma $\|\cdot\|_{BV^2}$, por lo tanto se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|u_n(x) - u(x)\|_{BV^2} &= \left\| u_n(x) - \lim_{m\to\infty} u_m(x) \right\|_{BV^2} \\ &= \lim_{m\to\infty} \|u_n(x) - u_m(x)\|_{BV^2}. \end{aligned}$$

Ahora considerando el límite cuando $n \to \infty$ en ambos lados de la igualdad, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|u_n(x) - u(x)\|_{BV^2} &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \|u_n(x) - u_m(x)\|_{BV^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

de donde, $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n(x) - u(x)\|_{BV^2} = 0$, lo que implica que u_n converge a u en la norma $\|\cdot\|_{BV^2}$, luego $(BV^2[a,b], \|\cdot\|_{BV^2})$ es un espacio de Banach ♣.

A continuación, expondremos un resultado que permite demostrar que $BV^2[a,b]$ posee una estructura de álgebra de Banach. Con tal fin nos basaremos, en un resultado del año 1987 dado por L. Maligranda y W. Orlicz ([20] ó [40]), que permite deducir que estos espacios de Banach poseen una estructura de álgebra de Banach.

Lema 1.28 (Maligranda - Orlicz, [20] ó [40])**.** *Sea $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ el espacio de Banach de funciones acotadas $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que es invariante para el producto usual de funciones y*

$$\|uv\| \leq \|u\|_\infty \|v\| + \|v\|_\infty \|u\| \qquad u, v \in \mathbb{X}.$$

Entonces, el espacio $\mathbb{X}$ con la norma:

$$\|\cdot\|_1 := \|\cdot\| + \|\cdot\|_\infty,$$

es un álgebra de Banach. Además si la convergencia en la norma $\|\cdot\|_1$ implica la convergencia en la norma $\|\cdot\|_\infty$, entonces la normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes.

Además, si existe $c > 0$ tal que $\|u\|_\infty \leq c\|u\|, u \in \mathbb{X}$, entonces $\mathbb{X}$ con la norma $\|\cdot\|_2 := 2c\|\cdot\|$ es un álgebra de Banach.

Ahora utilizaremos este Lema 1.28 para demostrar que el espacio $BV^2[a,b]$ es un álgebra de Banach.

Teorema 1.29. $(BV^2[a,b], \|\cdot\|_{BV^2})$ *es un álgebra de Banach.*

Demostración:

Veamos que la norma $||\cdot||_{BV^2}$ satisface las hipótesis del Lema de Maligranda-Orlicz. Sean $u, v \in BV^2[a,b]$ entonces

$$
\begin{aligned}
V^2(uv) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{u(t_{j+2})v(t_{j+2}) - u(t_{j+1})v(t_{j+1})}{t_{j+2}-t_{j+1}} - \frac{u(t_{j+1})v(t_{j+1}) - u(t_j)v(t_j)}{t_{j+1}-t_j} \right| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{u(t_{j+2})v(t_{j+2}) + u(t_{j+2})v(t_{j+1}) - u(t_{j+2})v(t_{j+1}) - u(t_{j+1})v(t_{j+1})}{t_{j+2}-t_{j+1}} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{u(t_{j+1})v(t_{j+1}) + u(t_{j+1})v(t_j) - u(t_{j+1})v(t_j) - u(t_j)v(t_j)}{t_{j+1}-t_j} \right| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{u(t_{j+2})(v(t_{j+2}) - v(t_{j+1})) + v(t_{j+1})(u(t_{j+2}) - u(t_{j+1}))}{t_{j+2}-t_{j+1}} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{u(t_{j+1})(v(t_{j+1}) - v(t_j)) - v(t_j)(u(t_{j+1}) - u(t_j))}{t_{j+1}-t_j} \right| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{u(t_{j+2})(v(t_{j+2}) - v(t_{j+1}))}{t_{j+2}-t_{j+1}} - \frac{u(t_{j+1})(v(t_{j+1}) - v(t_j))}{t_{j+1}-t_j} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{v(t_{j+1})(u(t_{j+2}) - u(t_{j+1}))}{t_{j+2}-t_{j+1}} - \frac{v(t_j)(u(t_{j+1}) - u(t_j))}{t_{j+1}-t_j} \right| \\
&\leq \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{\|u\|_\infty (v(t_{j+2}) - v(t_{j+1}))}{t_{j+2}-t_{j+1}} - \frac{\|u\|_\infty (v(t_{j+1}) - v(t_j))}{t_{j+1}-t_j} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\|v\|_\infty (u(t_{j+2}) - u(t_{j+1}))}{t_{j+2}-t_{j+1}} - \frac{\|v\|_\infty (u(t_{j+1}) - u(t_j))}{t_{j+1}-t_j} \right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V^2(uv) \quad &\leq \quad \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} \left| \|u\|_\infty \left(\frac{v(t_{j+2}) - v(t_{j+1})}{t_{j+2} - t_{j+1}} - \frac{v(t_{j+1}) - v(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} \|v\|_\infty \left(\frac{u(t_{j+2}) - u(t_{j+1})}{t_{j+2} - t_{j+1}} - \frac{(u(t_{j+1}) - u(t_j))}{t_{j+1} - t_j} \right) \right| \\
&= \quad \|u\|_\infty V^2(v) + \|v\|_\infty V^2(u).
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\|uv\|_{BV^2} &= |(uv)(a)| + |(uv)'(a)| + V^2(uv) \\
&= |u(a)v(a)| + |u'(a)v(a) + u(a)v'(a)| + V^2(uv) \\
&\leq 2|u(a)v(a)| + |u'(a)v(a)| + |u(a)v'(a)| + V^2(uv) \\
&\leq \|u\|_\infty |v(a)| + \|v\|_\infty |u(a)| + \|u\|_\infty |v'(a)| \\
&\quad + \|v\|_\infty |u'(a)| + \|u\|_\infty V^2(v) + \|v\|_\infty V^2(u) \\
&= \|u\|_\infty \|v\|_{BV^2} + \|v\|_\infty \|u\|_{BV^2}.
\end{aligned}
$$

Aplicando el Lema 1.28 resulta que $BV^2[a,b]$ es un álgebra de Banach con la norma:

$$\|\cdot\|_1 := \|\cdot\|_{BV^2} + \|\cdot\|_\infty,$$

que es equivalente a la norma $\|\cdot\|_{BV^2}$. ♣

Lema 1.30. *(Russell 1973 ver [50]) Sea $u \in BV^2[a,c]$, $u \in BV^2[c,b]$, donde $a < c < b$, entonces $u \in BV^2[a,b]$, y*

$$V^2(u;[a,b]) \leq V^2(u;[a,c]) + V^2(u;[c,b]).$$

Lema 1.31. *(Russell 1970 ver [49]) Si u es una función convexa en el intervalo $[a,b]$ y $a \leq x \leq y \leq b$, entonces*

$$g(x) \leq g(y)$$

Finalizaremos este capítulo presentando una caracterización de las funciones con segunda variación acotada en el siguiente teórema.

Teorema 1.32. *(Russell 1970 ver [49]) $u \in BV^2[a,b]$, si y sólo si se puede expresar como diferencia de funciones convexas.*

Demostración:

Sea $u \in BV^2[a,b]$. Como $u \in Lip[a,b] \subset AC[a,b]$, entonces, u es absolutamente continua, en consecuencia la derivada u' existe en un conjunto $E \subset [a,b]$, tal que $[a,b] - E$ tiene medida de Lebesgue cero. Para cada $x \in E$, definimos las funciones p y q, definida de la siguiente manera:

$$p(x) = \frac{1}{2}[V^2(u;[a,x]) + u'(x)].$$
$$q(x) = \frac{1}{2}[V^2(u;[a,x]) - u'(x)].$$

Entonces $u'(x) = p(x) - q(x), \quad x \in E.$

Consideremos x_1 y $x_2 \in E$ tal que $x_1 < x_2$, entonces utilizando el lema 1.30 tenemos que

$$\begin{aligned} 2[p(x_2) - p(x_1)] &= V^2(u;[a,x_2]) - V^2(u;[a,x_1]) + u'(x_2) - u'(x_1) \\ &\geq V^2(u;[x_1,x_2]) - |u'(x_2) - u'(x_1)| \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

De forma análoga se prueba que $q(x_2) - q(x_1) \geq 0$. Así p, q son funciones crecientes y no negativas en E. En $[a,b]-E$ podemos definir funciones p,q de manera tal que sean funciones crecientes y acotadas en $[a,b]$. Como u es absolutamente continua en $[a,b]$, se tiene:

$$\begin{aligned} u(x)-u(a) &= \int_a^x u'(t)dt \\ &= \int_a^x p(t)dt - \int_a^x q(t)dt, \end{aligned}$$

donde cada una de estas integrales son funciones convexas (ver [50]).

Ahora supongamos que $u = u_1 - u_2$, siendo u_1 y u_2 funciones convexas y demostremos que $u \in BV^2[a,b]$, para lo cual se debe demostrar que toda función convexa tiene segunda variación acotada. En efecto, sea $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función convexa y $a \leq x < y \leq b$, entonces por lema 1.31 se tiene que $v[x,y]$ es creciente en x. Además, las derivadas laterales de v existen en $[a,b]$ y

$$v'_+(x) \leq v[x,y] \leq v'_-(x).$$

Sea π: $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$, entonces:

$$\begin{aligned} \sup_\pi \sum_{j=1}^{n-2} |v[t_{j+1},t_{j+2}] - v[t_j,t_{j+1}]| &= v[b,t_{n-1}] - v[a,t_2] \\ &\leq v'_-(b) - v'_+(a). \end{aligned}$$

Por lo tanto $v \in BV^2[a,b]$. ♣

Capítulo 2

Funciones de k-Variación Acotada

En el presente capítulo se describe la noción de k-Variación Acotada, que fue introducida en el año de 1934 por M. T. Popoviciu ([46] ó [50]), como una generalización de la noción de segunda variación acotada. Se introduce la clase de las funciones con k-variación acotada y se demuestra que tiene una estructura de Banach. Así como también se presentan algunos resultados importantes referentes a este espacio de funciones.

2.1. Funciones de k-Variación Acotada

Comenzaremos este capítulo abordando el concepto de k-diferencia dividida de una función, que permitirá expresar de forma más didáctica la noción de k-variación acotada en el sentido de Popoviciu, para lo cual se presentarán algunos resultados expuestos en [40] acerca de esta definición.

Definición 2.1. *Dada una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, y $k + 1$ puntos $t_0, t_1, \ldots, t_k$, distintos del intervalo $[a, b]$, se define la k-ésima diferencia dividida de la función u respecto a los $k+1$ puntos como el número $u[t_0, t_1, \ldots, t_k]$ expresado recursivamente* *de la siguiente forma:*

1. $u[t_0] = u(t_0)$, *si* $k = 0$.

2. $u[t_0, t_1] := \dfrac{u(t_1) - u(t_0)}{t_1 - t_0}$, *si* $k = 1$.

3. $u[t_0, \dots, t_k] := \dfrac{u[t_1, \dots, t_k] - u[t_0, \dots, t_{k-1}]}{t_k - t_0}$, *si* $k > 1$.

Es conocido (ver [40]) que la noción anterior también puede expresarse mediante:

$$u[t_0, \dots, t_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{u(t_j)}{\prod_{i \neq j}^{k} (t_j - t_i)}.$$

Esta última expresión nos asegura que la noción de k-diferencia dividida de los puntos $t_0, t_1, \dots, t_k$, no dependen del orden en que aparecen los puntos $t_0, t_1, \dots, t_k$.

Definición 2.2. *Sean* $k \geq 1$ *un entero,* $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ *y* π*:* $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$*. Se define el número*

$$\sigma^k(u; \pi) := \sum_{j=1}^{n-k} |u[t_{j+1}, \dots, t_{j+k}] - u[t_j, \dots, t_{j+k-1}]|,$$

y se tiene que u *tiene* k*-variación acotada en el intervalo* $[a, b]$ *si:*

$$V^k(u) = V^k(u; [a, b]) := \sup_{\pi} \sigma^k(u; \pi),$$

es finito, donde el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones π *del intervalo* $[a, b]$*.*

El número $V^k(u; [a, b])$ se denomina k-variación de la función u en el intervalo $[a, b]$ y la clases de funciones con k-variación acotada es denotada por $BV^k[a, b]$.

A continuación, se presentan algunos resultados acerca de la k-diferencia dividida, los cuales servirán de introducción al espacio de funciones con k-variación acotada (en este caso omitiremos su demostración, pero se pueden consultar las referencias para mayor claridad). A. M. Russell en [50] nos presenta uno de estos resultados, en el siguiente teorema:

Teorema 2.3. *(*Russell *1973 en [50])*

$$u[t_0, \dots, t_k] = \alpha u[t_0, \dots, t_s, y, t_{s+1}, \dots, t_{k-1}] + \beta u[t_1, \dots, t_s, y, t_{s+1}, \dots, t_k],$$

donde los coeficientes α y β son positivos, independientes de u, y $\alpha + \beta = 1$; más precisamente,

$$\alpha = \frac{(y - t_0)}{(t_k - t_0)} \quad y \quad \beta = \frac{(t_k - y)}{(t_k - t_0)}.$$

Este resultado nos permite expresar la k-diferencia dividida de una función como la combinación de otras dos funciones con k-diferencia dividida, pero con una partición particular en donde se le añade un punto fijo a la misma.

Proposición 2.4. *(Russell 1973 en [40]) Sean $k \geq 1$ un entero, π una partición de $[a, b]$ y π' es un refinamiento de π. Dada $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ se tiene $\sigma^k(u, \pi) \leq \sigma^k(u, \pi')$ $k \geq 1$.*

Para concluir esta sección presentaremos la noción de k-variación acotada.

En el año de 1934 M. T. Popoviciu ([46] ó [50]) obtiene una generalización de la noción de segunda variación acotada, introduciendo el espacio vectorial $BV^k[a, b]$ con $k \geq 1$, de las funciones que tienen k-variación acotada, de la siguiente forma (utilizando la definición de k-diferencia divididas):

2.2. Propiedades del Espacio de funciones con k-Variación Acotada

Comenzaremos demostrando que la clase de funciones con k-variación acotada $BV^k[a,b]$, está dotado de una estructura de espacio vectorial, tal como se expresa en el siguiente resultado:

Proposición 2.5. *La clase de funciones de k-variación acotada $BV^k[a,b]$, es un espacio vectorial, es decir, $BV^k[a,b]$ satisface las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $u, v \in BV^k[a,b]$ entonces $u + v \in BV^k[a,b]$.*

2. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u \in BV^k[a,b]$, se tiene que $\alpha u \in BV^k[a,b]$.*

Demostración

1. Sean $u, v \in BV^k[a,b]$. De la definición de k-variación acotada y las propiedades del supremo, tenemos:

$$
\begin{aligned}
V^k(u+v) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-k} |(u+v)([t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]) - (u+v)([t_j,\ldots,t_{j+k-1}])| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-k} |u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}] + v[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}] - u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}] \\
&\qquad -v[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-k} |(u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}] - u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]) + (v[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}] \\
&\qquad -v[t_j,\ldots,t_{j+k-1}])|
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
V^k(u+v) &\leq \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-k}|u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]-u[t_j,\ldots,t_{j+K-1}]| \\
&\quad +\sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-k}|v[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]-v[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]| \\
&= V^k(u)+V^k(v).
\end{aligned}$$

Con lo cual tenemos que la suma de las funciones u y v está en $BV^k[a,b]$.

2. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u \in BV^k[a,b]$ entonces $\alpha u \in BV^k[a,b]$, ya que:

$$\begin{aligned}
V^k(\alpha u) &= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-k}|\alpha u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]-\alpha u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-k}|\alpha(u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]-u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}])| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-k}|\alpha||u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]-u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]| \\
&= |\alpha|\sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-k}|u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]-u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]| \\
&= |\alpha|V^k(u).
\end{aligned}$$

Con lo cual $\alpha u \in BV^k[a,b]$.

De lo anterior deducimos que el conjunto de funciones que tienen k-variación acotada en el intervalo $[a,b]$ es un espacio vectorial. ♣

A continuación, se presenta algunos resultados relacionados con este espacio de funciones (ver [50]), que permitirán comprender algunas características del mismo.

Proposición 2.6. *Si $u \in BV^k[a,b]$, $k \geq 1$ entero, entonces la función de k variables $u[\cdot, \cdots, \cdot]$ es acotada.*

Demostración:

Sea $u \in BV^k[a,b]$. Denotemos $V = V^k[a,b]$. Se quiere demostrar que la k-ésima diferencia dividida es acotada. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k \in [a,b]$ puntos fijos y $y_1, y_2, \ldots, y_k$, tales que $a \leq y_1 < y_2 < \cdots < y_k \leq b$, entonces

$$|u[y_1, y_2, \ldots, y_k]| < 2V + |u[a_1, a_2, \ldots, a_k]|.$$

Obsérvese que para cualquier colección de puntos $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k} \leq b$ se tiene:

$$|u[x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{2k}] - u[x_1, x_2, \ldots, x_k]| < V. \tag{2.1}$$

Supongamos que existe un y_k, tal que $y_k < b$ y consideremos los puntos $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{2k}$. Así obtenemos un nuevo refinamiento $\{x_i\}_{i=1}^{2k}$ donde $x_i = y_i$ para todo i, considerando desigualdad (2.1), para este refinamiento tenemos que:

$$|u[y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{2k}] - u[y_1, y_2, \ldots, y_k]| < V. \tag{2.2}$$

Nuevamente considerando la desigualdad (2.1), pero ahora para el refinamiento $\{x_i\}_{i=1}^{2k}$ donde $x_i = a_i$ $(1 \leq i \leq k)$ y $x_i = y_i$ $(k+1 \leq i \leq 2k)$, obtenemos:

$$|u[y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{2k}] - u[a_1, a_2, \ldots, a_k]| < V. \tag{2.3}$$

Sumando las desigualdades, (2.2) y (2.3) obtenemos:

$$|u[y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{2k}] - u[y_1, y_2, \ldots, y_k]| + |u[y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{2k}] - u[a_1, a_2, \ldots, a_k]| < 2V,$$

de donde se genera lo siguiente:

$$|u[y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{2k}] - u[a_1, a_2, \ldots, a_k]| < 2V,$$

$$|u[y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{2k}]| - |u[a_1, a_2, \ldots, a_k]| < 2V,$$

$$|u[y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{2k}]| < 2V + |u[a_1, a_2, \ldots, a_k]|,$$

$$|u[y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{2k}]| < 2V + A.$$

Por lo tanto la función de k-variables es acotada . ♣

Observación 2.7. *El caso en que $y_k = b$ se efectúa de manera análoga añadiendo un punto extra al refinamiento y considerando el Teorema 2.3 de la sección 2.1 de este capítulo.*

De la Proposición 2.6, se desprende el siguiente Corolario.

Corolario 2.8. *Si $u \in BV^{k+1}[a, b]$, $k \geq 1$ entero entonces la función de k+1 variables $u[\cdot, \cdots, \cdot]$ es acotada.*

Teorema 2.9. *(Russell 1973 [50]) Sea $k \geq 1$ entero, entonces $BV^{k+1}[a, b] \subseteq BV^k[a, b]$.*

Demostración:

Sea $\pi : a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ una partición de $[a, b]$ con almenos $k + 1$ puntos, y $u \in BV^{k+1}[a, b]$. De la definición de k-variación tenemos que existe un C_1 tal que:

$$\sum_{j=1}^{n-k-1} |u[t_{j+1}, \ldots, t_{j+k+1}] - u[t_j, \ldots, t_{j+k}]| \leq C_1$$

por el Corolario 2.8 sabemos que la función de $k + 1$ variables $u[t_{j+1}, \ldots, t_{j+k+1}]$

es acotada, así, por la definición de k-diferencia dividida, obtenemos que:

$$u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]-u[t_j,\ldots,t_{j+k}](x_{j+k}-x_j)^{-1}$$

es acotada, por una constante que denominaremos C_2, entonces:

$$\sum_{j=1}^{n-k}|u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]-u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]|\leq C_2\sum_{j=1}^{n-k}(x_{j+k}-x_j),$$

ahora esta expresión está acotada por $C_2k(b-a)$ con lo cual $u\in BV^k[a,b]$. ♣

Teorema 2.10. *Si $u\in BV^3[a,b]$ entonces u' existe y es continua en $[a,b]$.*

Demostración:

Demostraremos este hecho, utilizando el resultado demostrado en la Proposición 2.6, que asegura que la k-diferencia dividida de una función es acotada . Entonces considerando $k=3$ en la Proposición 2.6 y $a=t_1<t_2<t_3=b$ tenemos que $u[t_1,t_2,t_3]$ es acotada. Entonces existe una constante M tal que:

$$|u[t_1,t_2,t_3]|\leq M \qquad \textit{cuando } a=t_1<t_2<t_3=b,$$

por lo tanto como la k-diferencia dividida no depende del orden en que aparecen los puntos:

$$\left|\frac{u(t_2)-u(t_1)}{t_2-t_1}-\frac{u(t_3)-u(t_1)}{t_3-t_1}\right|\leq M|t_2-t_3|. \tag{2.4}$$

Ahora si $a<t_2<t_1<t_3<b$, y considerando la desigualdad (2.4)

$$\left|\frac{u(t_2)-u(t_1)}{t_2-t_1}-\frac{u(t_3)-u(t_1)}{t_3-t_1}\right|\leq M(|t_2-t_1|+|t_1-t_3|).$$

Como $BV^k[a,b] \subset BV[a,b]$, con $k \geq 1$ entero existen las existen las derivadas laterales de u. Si tomamos en la desigualdad anterior límite cuando $t_2 \to t_{1^-}$ y $t_3 \to t_{1^+}$. Tenemos $u'_+(t_1) = u'_-(t_1)$ con lo cual $u'(t_1)$ existe.

Por otra parte si $a < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < b$, entonces:

$$\begin{aligned} |u[t_1,t_2] - u[t_3,t_4]| &\leq |u[t_1,t_2] - u[t_2,t_3]| + |u[t_2,t_3] - u[t_3,t_4]| \\ &\leq M|t_2 - t_3| + M|t_2 - t_4| < 2M|t_4 - t_1|. \end{aligned}$$

Si $t_2 \to t_1$ y $t_3 \to t_4$ tenemos que:

$$|u'(t_1) - u'(t_4)| \leq 2M|t_4 - t_1|,$$

de donde se obtiene la continuidad de u' en (a,b). Claramente u' es continua por la izquierda y por la derecha de a y b respectivamente, lo que finaliza la demostración.
♣

Teorema 2.11. *Si $u \in BV^k[a,b]$ con $k \geq 3$ entonces $u^{(r)}$ es continua y pertenece a $BV^{k-r}[a,b]$ con $r = 1,2,...,k-2$. Además, $u^{(k-1)}$ existe, excepto posiblemente en un conjunto de medida cero.*

Demostración:

Sea $u \in BV^3[a,b]$, entonces por el Teorema 2.9 las derivadas laterales existen en $[a,b]$, por lo tanto existe la derivada u' y es continua en $[a,b]$. Entonces $u' \in BV^{k-1}[a,b]$ (ver Teorema 9 de [50]). Para el caso en que $k \geq 4$ aplicamos argumentos similares al caso anterior, para mostrar que u'' es continua y pertenece a $BV^{k-2}[a,b]$. De igual forma para ver que $u^{(r)}$ es continua y pertenece a $BV^{k-r}[a,b]$ donde $k - r \geq 2$. La existencia de $u^{(k-1)}$ se obtiene observando que esta función pertenece a $BV^2[a,b]$ y satisface la condición de Lipschitzidad de orden 1. ♣

Observación 2.12. *Por el Teorema 2.9 se tiene que* $BV^k[a,b] \subset Lip[a,b]$ *para* $k \geq 2$ *entero, lo cual nos permite garantizar la continuidad de toda función en el espacio de funciones con* k*-variación acotada, así como también la existencia de la derivada laterales, por otro lado del Teorema 2.11, tenemos que* $u^{(k-1)}$ *es absolutamente continua.*

Definición 2.13. *La función* $\|\cdot\|_{BV^k} : BV^k[a,b] \to \mathbb{R}$ $k \geq 1$ *se define de la siguiente forma:*

$$\|u\|_{BV^k} := \sum_{j=0}^{k-1} |u^j(a)| + V^k(u).$$

Está función esta bien definida ya que a través de la observación 2.12, se garantiza la existencia de los términos $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} |u^j(a)|$.

Teorema 2.14. $\|\cdot\|_{BV^k}$ *es una norma.*

Demostración:

1. $\|u\|_{BV^k} \geq 0$. Es decir, debemos demostrar que

$$\|u\|_{BV^k[a,b]} = \sum_{j=0}^{k-1} |u^j(a)| + V^k(u;[a,b]) \geq 0.$$

Entonces, como sabemos que para todo j, $|u^j(a)| \geq 0$ y que $V^k(u,[a,b]) \geq 0$ por definición, se tiene que en efecto $\|u\|_{BV^k} \geq 0$.

2. $\|u\|_{BV^k} = 0$ si y sólo si $u = 0$.

Para el caso $k = 1$, se tiene el espacio de la funciones con Variación Acotada $BV[a,b]$, en donde $\|\cdot\|_{BV[a,b]}$ es una norma [40] con lo cual esta propiedad es válida.

El caso $k = 2$, se tiene la clase de funciones $BV^2[a,b]$ y cuyo resultado fue demostrado en el capítulo anterior.

A continuación, se demostrará que para el caso $k = 3$ el resultado es válido y luego se procederá a demostrarlo para cualquier k. Entonces:

Si $\|u\|_{BV^3} = 0$ implica que:

$$\sum_{j=0}^{2} |u^{(j)}(a)| + V_3(u) = 0,$$

es decir, $|u(a)| = |u'(a)| = |u''(a)| = 0$ y $V_3(u) = 0$. De donde:

$$V_3(u) = \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-3} \left| \sum_{i=j+1}^{j+3} \frac{(u)(t_i)}{\prod\limits_{p\neq i}^{j+3}(t_i - t_p)} - \sum_{r=j}^{j+2} \frac{(u)(t_r)}{\prod\limits_{p\neq r}^{j+2}(t_r - t_p)} \right| = 0.$$

Si la partición $\pi : a = t_1 < t_2 < t_3 < t \leq b$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{u(t_2)}{(t_2-t_3)(t_2-t)} &+ \frac{u(t_3)}{(t_3-t_2)(t_3-t)} + \frac{u(t)}{(t-t_2)(t-t_3)} - \frac{u(t_1)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} \\ &- \frac{u(t_2)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} - \frac{u(t_3)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}| = 0, \end{aligned}$$

puesto que $u(t_1) = 0$ se sigue que:

$$\Big| \frac{u(t_2)}{(t_2 - t_3)(t_2 - t)} + \frac{u(t_3)}{(t_3 - t_2)(t_3 - t)} + \frac{u(t)}{(t - t_2)(t - t_3)}$$
$$- \frac{\frac{u(t_2)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}}{t_3 - t_2} - \frac{u(t_3)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} | = 0 \Big| ,$$

considerando que $u'(t_1) = 0$

$$\left| \frac{u(t_2)}{(t_2 - t_3)(t_2 - t)} + \frac{u(t_3)}{(t_3 - t_2)(t_3 - t)} + \frac{u(t)}{(t - t_2)(t - t_3)} - \frac{u(t_3)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \right| = 0,$$

aplicando $\lim\limits_{t_2 \to t_1}$, y que $u(t_1) = 0$ obtenemos:

$$\left| \frac{u(t_3)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t)} + \frac{u(t)}{(t - t_1)(t - t_3)} - \frac{u(t_3)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_1)} \right| = 0,$$

agrupando $u(t_3)$:

$$\left| \frac{-u(t_3)}{(t_3 - t_1)^2} \frac{(t - t_1)}{(t - t_3)} + \frac{u(t)}{(t - t_2)(t - t_3)} \right| = 0,$$

con lo cual:

$$\frac{u(t)}{(t - t_2)(t - t_3)} = \frac{u(t_3)}{(t_3 - t_1)^2} \frac{(t - t_1)}{(t - t_3)},$$

considerando $\lim\limits_{t_3 \to t_1}$:

$$\lim_{t_3\to t_1} \frac{u(t)}{(t-t_2)(t-t_3)} = \lim_{t_3\to t_1} \frac{u(t_3)}{(t_3-t_1)^2}\frac{(t-t_1)}{(t-t_3)}$$

$$\frac{u(t)}{(t-t_2)(t-t_1)} = \lim_{t_3\to t_1} \frac{u(t_3)}{(t_3-t_1)^2},$$

aplicando L'Hopital de lado derecho de la igualdad, queda la siguiente expresión:

$$\lim_{t_3\to t_1} \frac{u(t_3)}{(t_3-t_1)^2} = \lim_{t_3\to t_1} \frac{u'(t_3)}{2(t_3-t_1)},$$

como $u'(t_1) = 0$ se tiene:

$$\lim_{t_3\to t_1} \frac{u(t_3)}{(t_3-t_1)^2} = \frac{1}{2}\lim_{t_3\to t_1} \frac{u'(t_3)-u'(t_1)}{(t_3-t_1)} = \frac{1}{2}u''(t_1) = 0.$$

por lo tanto:

$$\frac{u(t)}{(t-t_2)(t-t_3)} = 0,$$

entonces:

$$u(t) = 0 \quad \text{para todo } \ t \in [a,b],$$

lo que implica que $u = 0$.

Para la otra implicación, si $u = 0$, claramente $\displaystyle\sum_{j=0}^{2} |u^{(j)}(a)| = 0$ y $V_3(u) = 0$, por lo tanto $\|u\|_{BV^3} = 0$.

Como los cálculos que se deben realizar para $k > 3$, pueden resultar muy extensos y poco didácticos, se presentará una simplificación de los mismos, utilizando el resultado dado por A. M. Russell en [52], donde se demuestra que si una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene k-variación acotada en el intervalo $[a, b]$ y $u^{(k-1)}(x)$ es absolutamente continua entonces:

$$V^k(u; [a, b]) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^b |u^{(k)}(t)|dt.$$

De la Observación 2.12, conocemos que $u^{k-1}(x)$ es Absolutamente Continua, así que podemos utilizar este resultado. Con lo cual:

Si $\|u\|_{BV^k} = 0$, implica que: $\sum_{j=0}^{k-1} |u^j(a)| = 0$ y $V^k(u) = 0$. De donde:

$$V^k(u; [a, b]) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^b |u^k(t)|dt = 0,$$

y claramente esto implica que $u = 0$.

Para la otra implicación si $u = 0$, es inmediato que $BV^k = 0$.

3. $\|\lambda u\|_{BV^k} = |\lambda| \|u\|_{BV^k}$.

Entonces, por la definición de k-variación acotada, se tiene:

$$\begin{aligned}
V^k(\lambda u;[a,b]) &= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-k}|\lambda u[t_j+1,\ldots,t_j+k]-\lambda u[t_j,\ldots,t_j+k-1]| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-k}|\lambda(u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]-u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}])| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-k}|\lambda||(u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]-u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}])| \\
&= |\lambda|\sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-k}|(u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]-u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}])| \\
&= |\lambda|V^k(u;[a,b]).
\end{aligned}$$

Por otro lado, también se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k-1}|\lambda u^{(j)}(a)| &= \sum_{j=0}^{k-1}|\lambda||u^{(j)}(a)| \\
&= |\lambda|\sum_{j=0}^{k-1}|u^{(j)}(a)|.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|\lambda u\|_{BV^k} &= |\lambda|\sum_{j=0}^{k-1}|u^{(j)}(a)|+|\lambda|V^k(u,[a,b]) \\
&= |\lambda|\left(\sum_{j=0}^{k-1}|u^{(j)}(a)|+V^k(u,[a,b])\right) \\
&= |\lambda|\|u\|_{BV^k}.
\end{aligned}$$

4. $\|u+v\|_{BV^k}\le\|u\|_{BV^k}+\|v\|_{BV^k}$.

   Primero debemos observar lo siguiente, utilizando la definición de k-variación acotada y las propiedades del supremo, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
V^k(u+v) &= \sup_\pi \sum_{j=1}^{n-k} |(u+v)([t_{j+1},\dots,t_{j+k}]) - (u+v)([t_j,\dots,t_j+k-1])| \\
&= \sup_\pi \sum_{j=1}^{n-k} |u[t_{j+1},\dots,t_{j+k}] + v[t_{j+1},\dots,t_{j+k}] \\
&\qquad\qquad -u[t_j,\dots,t_{j+k-1}] - v[t_j,\dots,t_{j+k-1}]| \\
&= \sup_\pi \sum_{j=1}^{n-k} |u[t_{j+1},\dots,t_{j+k}] - u[t_j,\dots,t_{j+k-1}] \\
&\qquad\qquad +v[t_{j+1},\dots,t_{j+k}] - v[t_j,\dots,t_{j+k-1}]| \\
&= \sup_\pi \sum_{j=1}^{n-k} |(u[t_{j+1},\dots,t_{j+k}] - u[t_j,\dots,t_{j+k-1}]) \\
&\qquad\qquad +(v[t_{j+1},\dots,t_{j+k}] - v[t_j,\dots,t_{j+k-1}])| \\
&\leq \sup_\pi \sum_{j=1}^{n-k} |u[t_{j+1},\dots,t_{j+k}] - u[t_j,\dots,t_{j+k-1}]| \\
&\quad + \sup_\pi \sum_{j=1}^{n-2} |v[t_{j+1},\dots,t_{j+k}] - v[t_j,\dots,t_{j+k-1}]| \\
&= V^k(u) + V^k(v).
\end{aligned}
$$

Ahora, considerando esta observación:

$$
\begin{aligned}
\|u+v\|_{BV^k} &= \sum_{j=0}^{k-1} |u^{(j)}(a) + v^{(j)}(a)| + V^k(u+v,[a,b]) \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1} |u^{(j)}(a)| + |v^{(j)}(a)| + V^k(u,[a,b]) + V^k(v,[a,b]) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{k-1} |u^{(j)}(a)| + V^k(u,[a,b])\right) + \left(\sum_{j=0}^{k-1} |v^{(j)}(a)| + V^k(v,[a,b]\right) \\
&= \|u\|_{BV^k} + \|v\|_{BV^k}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\|u+v\|_{BV^k} \leq \|u\|_{BV^k} + \|v\|_{BV^k}.$$

Con lo cual $\|\cdot\|_{BV^k}$ es una Norma. ♣

Observación 2.15. *Si dotamos al espacio $BV^k[a,b]$ de la norma $\|\cdot\|_{BV^k}$, se tiene que $(BV^k[a,b], \|\cdot\|_{BV^k})$ es un espacio normado. También es conocido que $(BV^k[a,b], \|\cdot\|_{BV^k})$ es un espacio de Banach (ver [51]).*

A continuación, consideraremos un caso particular a través del siguiente subespacio:

$$BV^{k*}[a,b] = \{u; u \in BV^k[a,b], u(a) = u'(a) = \cdots = u^{(k-1)}(a) = 0\},$$

para el cual se demostrará que con la norma definida anteriormente se tiene un espacio de Banach.

Teorema 2.16. $(BV^{k*}[a,b], \|\cdot\|_{BV^k})$ *es un espacio de Banach.*

Demostración:

Sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(BV^{k*}[a,b], \|\cdot\|_{BV^k})$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe N, tal que si $n, m \geq N$, se tiene que:

$$\|u_n - u_m\|_{BV^k} < \varepsilon.$$

de donde:

$$V^k(u_n - u_m) \leq \varepsilon \qquad para \;\; todo \qquad n, m \geq N,$$

entonces para la partición π: $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_h = x < \cdots < t_n = b$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-k}\left|(u_n-u_m)([t_{j+1},\ldots,t_{j+k}])-(u_n-u_m)([t_j,\ldots,t_{j+k-1}])\right| \\
&= \sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n-k}\left|\sum_{i=j+1}^{j+k}\frac{(u_n-u_m)(t_i)}{\prod\limits_{p\neq i}^{j+k}(t_i-t_p)}-\sum_{r=j}^{j+k-1}\frac{(u_n-u_m)(t_r)}{\prod\limits_{p\neq r}^{j+k-1}(t_r-t_p)}\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left|\sum_{i=h}^{j+k}\frac{(u_n-u_m)(t_i)}{\prod\limits_{p\neq i}^{j+k}(t_i-t_p)}-\sum_{r=h-1}^{j+k-1}\frac{(u_n-u_m)(t_r)}{\prod\limits_{p\neq r}^{j+k-1}(t_r-t_p)}\right| \\
&= \left|\frac{(u_n-u_m)(t_h)}{\prod\limits_{p\neq h}^{j+k}(t_h-t_p)}\sum_{i=h+1}^{j+k}\frac{(u_n-u_m)(t_i)}{\prod\limits_{p\neq i}^{j+k}(t_i-t_p)}-\sum_{r=h-1}^{j+k-1}\frac{(u_n-u_m)(t_r)}{\prod\limits_{p\neq r}^{j+k-1}(t_r-t_p)}\right| \\
&\geq \left|(u_n-u_m)(x)\left(\frac{1}{\prod\limits_{p\neq h}^{j+k}(t_h-t_p)}\right)\right|.
\end{aligned}$$

Ahora si se define a C de la siguiente forma:

$$C=\left|\prod_{p\neq h}^{j+k}(t_h-t_p)\right|,$$

obtenemos que:

$$|u_n(x)-u_m(x)|<\varepsilon\, C.$$

Entonces la sucesión u_n es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, y así, como $\mathbb{R}$ es completo, se tiene que toda sucesión de Cauchy converge, es decir, que existe el límite de la sucesión, y lo denotaremos de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \quad \forall x \in [a,b],$$

y $u_n(x) - u_m(x)$ tiende a $u_n(x) - u(x)$ en $[a,b]$ cuando $m \to \infty$.

Ahora se debe verificar que u_n converge bajo la norma $\|\cdot\|_{BV^k}$, por lo tanto se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|u_n(x) - u(x)\|_{BV^k} &= \left\| u_n(x) - \lim_{m\to\infty} u_m(x) \right\|_{BV^k} \\ &= \lim_{m\to\infty} \|u_n(x) - u_m(x)\|_{BV^k} \end{aligned}$$

ahora aplicando el límite cuando $n \to \infty$ en ambos lados de la igualdad, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|u_n(x) - u(x)\|_{BV^k} &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \|u_n(x) - u_m(x)\|_{BV^k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De donde $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n(x) - u(x)\|_{BV^k} = 0$, lo que implica que u_n converge a u en la norma $\| \cdot \|_{BV^k}$, luego $(BV^{k*}[a,b], \| \cdot \|_{BV^k})$ es un espacio de Banach ♣.

Observación 2.17. *Considerando el mismo subespacio $BV^{k*}[a,b]$,* Russell *demuestra en [53] que es un álgebra de Banach conmutativa, utilizando la siguiente norma:*

$$\|u\|_k^* := \alpha_k V^k(u),$$

donde:

$$\alpha_k = 2^{k-1}(b-a)^{k-1}(k-1)!.$$

A continuación, presentaremos la siguiente definición, que nos permitirá introducir la generalización de la descomposición de Jordan, para la k-variación acotada expuesto por *Russell* en [50].

Definición 2.18. *Una función u definida sobre $[a,b]$ es llamada* k-convexa *en $[a,b]$ si y sólo si $u[t_0,\ldots,t_k] \geq 0$ para todo punto $t_o, t_1, \ldots, t_k$ en $[a,b]$. Una función será llamada* 0-convexa *si es no-negativa en $[a,b]$.*

De esta definición obtenemos el siguiente teorema que nos permitirá expresar funciones que tengan k-variación acotada como diferencia de funciones k-*convexas.*

Teorema 2.19. *Si $k \geq 1$ y $u \in BV^k[a,b]$, entonces u puede ser expresada como la diferencia de funciones k-convexas.*

Demostración:

Para el caso $k=1$ es la variación clásica de Jordan y el caso $k=2$ fue demostrado en el capítulo anterior. Supongamos que $k \geq 3$. Por el Teorema 2.11 sabemos que $u^{(k-1)}(x)$ existe, excepto posiblemente en un conjunto de medida cero. Sea S un conjunto donde $u^{k-1}(x)$ existe. Entonces para $x \in S$, se define:

$$2p(x) = (k-1)!V^k(u;[a,x]) + u^{(k-1)}(x).$$

$$2q(x) = (k-1)!V^k(u;[a,x]) - u^{(k-1)}(x).$$

Sean x_1 y x_2 pertenecientes a S, con $x_2 > x_1$. Entonces:

$$\begin{aligned} 2[p(x_2) - p(x_1)] &\geq (k-1)!V^k(u;[x_1,x_2]) - |u^{(k-1)}(x_2) - u^{(k-1)}(x_1)| \\ &\geq (k-1)!|u[y_s,\ldots,y_{s+k-1}] - u[y_0,\ldots,y_{k-1}])| - |u^{(k-1)}(x_2) - u^{(k-1)}(x_1)|. \end{aligned}$$

Donde $\pi = \{y_0, y_1, \ldots, y_s, y_{s+1}, \ldots, y_{s+k-1}\}$ es una partición de $[x_1, x_2]$. Por el Teorema 2.11 sabemos que $u^{(r)}(x)$ es continua para $r = 1, 2, ..., k-2$, y viendo los términos de la desigualdad, tenemos que $[p(x_2) - p(x_1)] \geq 0$. Por lo tanto p y q son funciones no decrecientes en S. En $[a,b] - S$ podemos definir p, q tales que sean no decrecientes. Con lo cual:

$$u^{(k-1)}(x) = p(x) - q(x).$$

Usando lo expuesto en el Teorema 14 de [50] (si $u^{(k-1)}(x) = q(x)$, donde q es una función creciente, entonces u es k-convexa), lo cual finaliza la demostración. ♣

Para finalizar este capítulo se presenta otra definición de k-Variación Acotada, considerando particiones del intervalo $[a,b]$, dadas por “bloques”(ver [40]), con la cual, sin embargo se obtiene el mismo espacio $BV^k[a,b]$.

Entonces considerando una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, k un entero positivo y π una partición de $[a,b]$, tal que

$$\pi : a \leq t_1 < \ldots < t_k \leq t_{k+1} < \cdots < t_{2k} \leq t_{2k+1} < \cdots < t_{kn} \leq b \tag{2.5}$$

Se define el número:

$$\widehat{\sigma}^k(u,\pi) = \widehat{\sigma}^k(u) := \sum_{j=1}^{n-1} \left| u[t_{jk+1}, \cdots, t_{(j+1)k}] - u[t_{(j-1)k+1}, \cdots, t_{jk}] \right|,$$

y se dice que u tiene k-variación acotada en el intervalo $[a, b]$ si el número:

$$\widehat{V}^k(u; [a, b]) = \widehat{V}^k(u) := \sup_{\pi} \widehat{\sigma}^k(u, \pi),$$

es finito, donde el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones π del intervalo $[a, b]$ de la forma (2.5).

El número $\hat{V}^k(u; [a, b])$ se denomina k-variación de la función u en el intervalo $[a, b]$ y el Espacio Vectorial de tales funciones se denotará por $B\hat{V}^k[a, b]$.

Capítulo 3

Funciones de $(p, 2)$-Variación Acotada

En el presente capítulo describiremos la noción de p-variación acotada en el sentido de Riesz [47], la cual nos permitirá introducir el concepto de $(p, 2)$-variación acotada $(1 < p < \infty)$ dada por N. Merentes en 1992 [38] como una generalización de ésta. Además, concluiremos presentando una caracterización de la clase de funciones $R\hat{V}_{(p,2)}$, como generalización de la clase A_p.

3.1. Funciones de p-Variación Acotada en el sentido de Riesz

En 1.910, F. Riesz [47] define el concepto de p-variación acotada $(1 \leq p < \infty)$ y demuestra que, para $1 < p < \infty$, esta clase coincide con la clase de funciones u, absolutamente continuas con derivada $u' \in L_p[a, b]$. Además, la p-variación de una función u sobre $[a, b]$ es dada por $||u'||^p_{L_p[a,b]}$, es decir,

$$V_p(u; [a, b]) = ||u'||^p_{L_p[a,b]}.$$

A continuación, presentamos algunas definiciones y resultados conocidos sobre la p-variación $(1 < p < \infty)$ de Riesz.

Definición 3.1. *Sean $1 < p < \infty$ y $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Para una determinada partición de $[a, b]$, de la forma:*

$$\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

Se define

$$\sigma_p(u; \pi) := \sum_{j=1}^{m} \frac{|u(t_j) - u(t_{j-1})|^p}{|t_j - t_{j-1}|^{p-1}},$$

y

$$V_p(u; [a, b]) := \sup_{\pi} \sigma_p(u; \pi),$$

donde el supremo es considerado sobre todas las particiones π de $[a, b]$, es llamado la p-variación Riesz de la función u sobre $[a, b]$.

Si $V_p(u; [a, b]) < \infty$, se dice que la función u tiene p-variación acotada (o finita) en el sentido de Riesz o que es de p-variación Riesz acotada . Denotaremos por $RV_p[a, b]$ al espacio de Banach de todas las funciones $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ para el cual $V_p(u; [a, b]) < \infty$ y la norma es dada por

$$||u||_p := |u(a)| + (V_p(u; [a, b]))^{\frac{1}{p}}.$$

F. Riesz [47] introdujo la llamada clase Riesz $A_p[a, b]$ $(1 < p < \infty)$ de la siguiente manera: $u \in A_p[a, b]$ si y sólo si, u es absolutamente continua sobre $[a, b]$ y $u' \in$

$L_p[a, b]$. Así mismo, en la siguiente caracterización de la clase $A_p[a, b]$ demuestra que:

Lema 3.2. *(Riesz [47]) Una función real u definida sobre el intervalo $[a, b]$ pertenece a la clase $A_p[a, b]$ $(1 < p < \infty)$ si y sólo si, $V_p(u; [a, b]) < \infty$. Además:*

$$V_p(u; [a, b]) = ||u'||^p_{L_p[a,b]}.$$

Antes de introducir las funciones con $(p, 2)$-variación acotada definiremos la noción de segunda variación acotada en el sentido de De La Vallée Poussin ([57]) y una noción ligeramente cambiada al considerar particiones por bloques.

Recordemos que una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene segunda variación acotada en el sentido de De La Vallée Poussin, si el número

$$V^2(u; [a, b]) = \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{u(t_{j+2}) - u(t_{j+1})}{t_{j+2} - t_{j+1}} - \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right|, \tag{3.1}$$

es finito, donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones π del tipo: $\pi : a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$. Además, este espacio es denotado por $BV^2(u; [a, b])$ y satisface algunas propiedades, entre ellas que tiene estructura de espacio vectorial, espacio normado, espacio de Banach y álgebra de Banach

Ahora, consideremos la definición de segunda variación acotada para una partición π definida por bloque de la siguiente manera:

Definición 3.3. *Sean $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y*

$$\hat{\pi} : a \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 < \cdots < t_{2n} \leq b. \tag{3.2}$$

una partición por bloques del intervalo $[a, b]$.

Se define

$$\widehat{\sigma}^2(u, \pi) := \sum_{j=1}^{n-1} \left| u[t_{2j+1}, t_{2j+2}] - u[t_{2j-1}, t_{2j}] \right|,$$

y

$$\widehat{V}^2(u; [a, b]) := \underset{\pi}{sup}\, \widehat{\sigma}^2(u, \pi),$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones π *del intervalo* $[a, b]$.

Al número $\hat{V}^2(u; [a, b])$ *se le denomina segunda variación de la función* u *en el intervalo* $[a, b]$. *Si* $\hat{V}^2(u; [a, b]) < \infty$ *se dice que la función* u *tiene segunda variación acotada y el conjunto de tales funciones se denota por* $B\hat{V}^2(u; [a, b])$.

De esta forma, utilizando particiones π *por bloques, tenemos una nueva manera de obtener el espacio de las funciones de segunda variación acotada.*

A continuación se muestra un lema que relaciona a los espacios $BV^2[a, b]$ y $B\hat{V}^2[a, b]$.

Lema 3.4. *(ver [18]). Sea* $p > 1$ *y* $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función del espacio* $BV_{(p,2)}[a, b]$, *entonces:*

$$\hat{V}^2(u; [a, b]) \leq V^2(u; [a, b]) \leq 6\hat{V}^2(u; [a, b]);$$

y en consecuencia,

$$BV^2[a, b] = B\hat{V}^2[a, b],$$

***D*emostración:**

Sea $u \in B\hat{V}^2[a,b]$. Si $a \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq b$. Consideremos números b_1, b_2, c_1, c_2, tales que:

$$t_1 < b_1 < b_2 = t_2 \ , \ t_2 < c_1 < c_2 = t_3.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
|u[t_2,t_3] - u[t_1,t_2]| &= |u[t_2,t_3] - u[b_1,b_2] + u[b_1,b_2] - u[c_1,c_2] + u[c_1,c_2] - u[t_1,t_2]| \\
&\leq |u[t_2,t_3] - u[b_1,b_2]| + |u[b_1,b_2] - u[c_1,c_2]| + |u[c_1,c_2] - u[t_1,t_2]| \\
&\leq 3\hat{V}^2(u;[t_1,t_3]).
\end{aligned}$$

De esta manera tenemos que si $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ es una partición de $[a,b]$, entonces:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-k} |u[t_{j+1},t_{j+2}] - u[t_j,t_{j+1}]| \leq \sum_{j=1}^{n-k} 3\hat{V}^2\left(u;[t_j,t_{j+2}]\right) \\
= \ & 3\bigg(\Big[\hat{V}^2\left(u;[t_1,t_3]\right) + \hat{V}^2\left(u;[t_2,t_4]\right) + \hat{V}^2\left(u;[t_3,t_5]\right)\Big] \\
&+ \Big[\hat{V}^2\left(u;[t_4,t_6]\right) + \hat{V}^2\left(u;[t_5,t_7]\right) + \hat{V}^2\left(u;[t_6,t_8]\right)\Big] + \ldots \\
&+ \Big[\hat{V}^2\left(u;[t_{n-4},t_{n-2}]\right) + \hat{V}^2\left(u;[t_{n-3},t_{n-1}]\right) + \hat{V}^2\left(u;[t_{n-2},t_n]\right)\Big]\bigg) \\
= \ & 3\bigg(\Big[\hat{V}^2\left(u;[t_1,t_3]\right) + \hat{V}^2\left(u;[t_4,t_6]\right) + \ldots + \hat{V}^2\left(u;[t_{n-4},t_{n-2}]\right)\Big] + \ldots \\
&+ \Big[\hat{V}^2\left(u;[t_3,t_5]\right) + \hat{V}^2\left(u;[t_6,t_8]\right) \ldots + \hat{V}^2\left(u;[t_{n-2},t_n]\right)\Big]\bigg).
\end{aligned}$$

De esta manera resulta: $\sigma_2(u,\pi) \leq 6\hat{V}^2\left(u;[a,b]\right)$ y concluimos que

$$V^2(u;[a,b]) \leq 6\hat{V}^2\left(u;[a,b]\right).$$

En consecuencia $u \in BV^2[a,b]$ y así se obtiene que

$$B\hat{V}^2[a,b] \subset BV^2[a,b]. \tag{3.3}$$

Por otra parte, si $u \in BV^2[a,b]$ y

$$\hat{\pi} : a \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq t_5 < \ldots < t_{2n} \leq b$$

es una partición del intervalo $[a,b]$, entonces de la desigualdad triangular, resulta:

$$\begin{aligned}
|u[t_{2j+1}, t_{2j+2}] - u[t_{2j-1}, t_{2j}]| &= |u[t_{2j+1}, t_{2j+2}] - u[t_{2j}, t_{2j+1}] + u[t_{2j}, t_{2j+1}] - u[t_{2j-1}, t_{2j}]| \\
&\leq |u[t_{2j+1}, t_{2j+2}] - u[t_{2j}, t_{2j+1}]| + |u[t_{2j}, t_{2j+1}] - u[t_{2j-1}, t_{2j}]| \\
&= \sum_{i=0}^{1} |u[t_{2j-i+1}, t_{2j-i+2}] - u[t_{2j-i}, t_{2j-i+1}]| \,.
\end{aligned}$$

De esta forma tenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{V}^2(u;[a,b]) &\leq \sum_{j=1}^{n-1} |u[t_{2j}, t_{2j+1}] - u[t_{2j-1}, t_{2j}]| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{1} |u[t_{2j+i-1}, t_{2j-i+2}] - u[t_{2j-i}, t_{2j-i+1}]| \\
&\leq V^2(u;[a,b]).
\end{aligned}$$

Así obtenemos que $\hat{V}^2(u,[a,b]) \leq V^2(u,[a,b])$ y por lo tanto $u \in B\hat{V}^2[a,b]$. En consecuencia

$$BV^2[a,b] \subset B\hat{V}^2[a,b]. \tag{3.4}$$

Luego, por (3.3) y (3.4) se tiene que $BV^2[a,b] = B\hat{V}^2[a,b]$. ♣

3.2. Funciones de $(p,2)$-Variación Acotada

En esta sección introduciremos la noción de la $(p,2)$-variación acotada de Riesz dada por N. Merentes en 1992 [38], y daremos un resultado similar al lema 3.2 de Riesz, para la clase $R\hat{V}_{(p,2)}[a,b]$.

Definición 3.5. *Sea* $u: [a,b] \to \mathbb{R}$ *y* $(1 < p < \infty)$. *Para una partición* π *por bloques dada de la forma:*

$$\hat{\pi} : a \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 < \cdots < t_{2n} \leq b. \tag{3.5}$$

Se define

$$\widehat{\sigma}_{(p,2)}(u;\pi) := \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{u(t_{2j+2}) - u(t_{2j+1})}{t_{2j+2} - t_{2j+1}} - \frac{u(t_{2j}) - u(t_{2j-1})}{t_{2j} - t_{2j-1}} \right|^p \frac{1}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|^{p-1}}$$

y

$$\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \hat{\sigma}_{(p,2)}(u;\pi),$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones π *del intervalo* $[a,b]$.

El número $\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b])$ *es llamado la* $(p,2)$*-variación de Riesz de la función* u *en el intervalo* $[a,b]$. *Si* $\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]) < \infty$ *se dice que la función* u *tiene* $(p,2)$*-variación acotada (o finita) y el conjunto de estas funciones se denota por* $R\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b])$.

El espacio de las funciones de $(p,2)-$variación acotada es denotado por $R\hat{V}_{(p,2)[a,b]}$, es un espacio de Banach con la siguiente norma

$$||u||_{(p,2)} := |u(a)| + |u'(a)| + (\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]))^{1/p}.$$

La clase $A_(p,2)[a,b]$ son las funciones u tales que u' es absolutamente continua y u'' ésta en $L_p[a,b]$.

Lema 3.6. *Sean $u: \ [a,b] \to \mathbb{R}$ una función $1 < p < \infty$. Si $\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]) < \infty$, entonces u tiene segunda variación acotada y*

$$\hat{V}^2(u;[a,b]) \leq (\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]))^{\frac{1}{p}}(|b-a|)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Demostración:

Sea

$$\hat{\pi} : a \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 < \cdots < t_{2n} \leq b. \tag{3.6}$$

una partición sobre $[a,b]$. Entonces por definición sabemos que

$$\hat{V}^2(u) = \hat{V}^2(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} |u[t_{2j+1}, t_{2j+2}] - u[t_{2j-1}, t_{2j}]|$$

luego

$$\hat{V}^2(u;[a,b]) \quad = \quad \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{u(t_{2j+2}) - u(t_{2j+1})}{t_{2j+2} - t_{2j+1}} - \frac{u(t_{2j}) - u(t_{2j-1})}{t_{2j} - t_{2j-1}} \right| \frac{\left|t_{2j+2} - t_{2j-1}\right|^{1-\frac{1}{p}}}{\left|t_{2j+2} - t_{2j-1}\right|^{1-\frac{1}{p}}}$$

y por la desigualdad de Hölder obtenemos

$$
\begin{aligned}
\hat{V}^2(u;[a,b]) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{u(t_{2j+2}) - u(t_{2j+1})}{t_{2j+2} - t_{2j+1}} - \frac{u(t_{2j}) - u(t_{2j-1})}{t_{2j} - t_{2j-1}} \right| \frac{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|^{1-\frac{1}{p}}}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|^{1-\frac{1}{p}}} \\
&\leq \sup_{\pi} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| \frac{u(t_{2j+2}) - u(t_{2j+1})}{t_{2j+2} - t_{2j+1}} - \frac{u(t_{2j}) - u(t_{2j-1})}{t_{2j} - t_{2j-1}} \right| \frac{1}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} |t_{2j+2} - t_{2j-1}|^{1-\frac{1}{p}} \right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\hat{V}^2(u;[a,b]) \leq (\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]))^{\frac{1}{p}} |b-a|^{1-\frac{1}{p}}. \qquad \clubsuit
$$

Corolario 3.7. *Sean $1 < p < \infty$ y $u: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si $\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]) < \infty$, entonces u es absolutamente continua sobre $[a,b]$ y u puede ser expresada como la diferencia de dos funciones convexas.*

Lema 3.8. *(ver[38]) Sean $1 < p < \infty$ y $u: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si $\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]) < \infty$, entonces existe la derivada $u'(x_0)$ para todo $x_0 \in (a,b)$.*

Demostración:

Por el Corolario 3.7 y la observación 1.21, obtenemos la existencia de la derivada por la derecha $u'_+(x_0)$ para todo $x_0 \in [a,b)$ y la derivada por la izquierda $u'_-(x_0)$ para todo $x_0 \in (a,b]$.

Supongamos que existe $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$
\alpha_{x_0} := |u'_+(x_0) - u'_0(x_0)| > 0.
$$

Por la definición de $(p,2)$-variación tenemos:

$$\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{u[x_0, x_0+h]}{x_0-(x_0+h)} - \frac{u[x_0-h, x_0]}{x_0-h-x_0} \right|$$

esto implica que

$$\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]) \quad \geq \quad \lim_{h\to 0} \frac{|u[x_0, x_0+h]-u[x_0-h,x_0]|^p}{|x_0+h-(x_0-h)|^{p-1}}$$

usando la definición de la k-diferencia dividida de la función u obtenemos que

$$\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]) \quad \geq \quad \lim_{h\to 0} \left| \frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h} - \frac{u(x_0)-u(x_0-h)}{h} \right|^p \frac{1}{|2h|^{p-1}}$$

Por la definición de $(p,2)$-variación tenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]) \quad &\geq \quad \lim_{h\to x_0} \left| \frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h} - \frac{u(x_0)-u(x_0-h)}{h} \right|^p \frac{1}{2^{p-1}|h|^{p-1}} \\
&= \quad \frac{|\alpha_{x_0}|^p}{2^{p-1}} \lim_{h\to x_0} \frac{1}{|h|^{p-1}} = +\infty.
\end{aligned}$$

En consecuencia, la función u tiene derivada $u'(x_0)$ para todo $x_0 \in (a,b)$. ♣

Lema 3.9. *(ver[38]) Sean* $1 < p < \infty$ *y* $u: \; [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función. Si* $\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]) < \infty$, *entonces* $u' \in RV_p[a,b]$. *Además,*

$$V_p(u';[a,b]) \leq \hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]).$$

Así, u' *es absolutamente continua sobre* $[a,b]$ *y* $u'' \in L_p[a,b]$, *es decir,* $u \in A_{(p,2)}[a,b]$.

Demostración:

Sea

$$\hat{\pi} : a \leq t_1 < \cdots < t_k < t_2 \leq t_3 < t_4 < \cdots < t_{2n} \leq b. \tag{3.7}$$

una partición de $[a,b]$. Sea $h > 0$ tal que

$$0 < h \leq \text{mín} \left\{ \frac{t_{2j+2} - t_{2j-1}}{2} \right\}_{j=1}^{m}.$$

Por la definición de $(p,2)$-variación de u tenemos que

$$\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]) = \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{u[t_{2j-1},(t_{2j-1}+h)]}{t_{2j-1}-(t_{2j-1}+h)} - \frac{u[(t_{2j+2}-h),t_{2j+2}]}{t_{2j+2}-h-t_{2j+2}} \right|$$

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]) &\geq \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{u(t_{2j-1}+h)-u(t_{2j-1})}{t_{2j-1}+h-t_{2j-1}} - \frac{u(t_{2j+2})-u(t_{2j+2}-h)}{t_{2j+2}-(t_{2j+2}-h)} \right|^p \frac{1}{|t_{2j-1}-t_{2j+2}|^{p-1}} \\
&\geq \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{u(t_{2j-1}+h)-u(t_{2j-1})}{h} - \frac{u(t_{2j+2})-u(t_{2j+2}-h)}{h} \right|^p \frac{1}{|t_{2j-1}-t_{2j+2}|^{p-1}}
\end{aligned}$$

por lo tanto, cuando $h \to 0$, y por el Lema 3.8 tenemos que

$$\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]) \geq \sum_{j=1}^{m} \frac{|u'(t_{2j-1}) - u'(t_{2j+2})|^p}{|t_{2j-1}-t_{2j+2}|^{p-1}}.$$

Ahora, por el Lema 3.2 tenemos $u' \in RV_p[a,b]$ y así ,

$$V_p(u';[a,b]) = ||u''||^p_{L_p[a,b]} \leq \hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]). \quad \clubsuit$$

Lema 3.10. *(ver [38]) Sean $1 < p < \infty$ y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si $u \in A_{(p,2)}[a,b]$, entonces $u \in R\hat{V}_{(p,2)}[a,b]$. Además,*

$$\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]) \leq ||u''||^p_{L_p[a,b]}.$$

Demostración:

Sea

$$\hat{\pi} : a \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 < \cdots < t_{2n} \leq b. \tag{3.8}$$

una partición de $[a,b]$. Como u' es continua en $[a,b]$ se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\frac{u(t_{2j+2})-u(t_{2j+1})}{t_{2j+2}-t_{2j+1}} - \frac{u(t_{2j})-u(t_{2j-1})}{t_{2j}-t_{2j-1}}\right|^p &= |u'(\tau_j^+) - u'(\tau_j^-)|^p = \left|\int_{\tau_j^-}^{\tau_j^+} u''(\sigma)d(\sigma)\right|^p \\ &\leq \left[\int_{t_{2j-1}}^{t_{2j+2}} |u''(\sigma)d(\sigma)|\right]^p\end{aligned}$$

usando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}\left[\int_{t_{2j-1}}^{t_{2j+2}} |u''(\sigma)d(\sigma)|\right]^p &\leq \int_{t_{2j-1}}^{t_{2j+2}} |u''(\sigma)|^p d(\sigma) \left[\left(\int_{t_{2j-1}}^{t_{2j+2}} |d(\sigma)|\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]^p \\ &= (t_{2j+2} - t_{2j-1})^{p-1} \int_{t_{2j-1}}^{t_{2j+2}} |u''(\sigma)|^p d(\sigma),\end{aligned}$$

donde τ_j^+ y τ_j- son puntos en los intervalos (t_{2j+1}, t_{2j+2}) y (t_{2j-1}, t_{2j}).

Así,

$$\hat{V}_{(p,2)}(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \sigma_{(p,2)}(u;[a,b]) \leq ||u''||^p_{L_p[a,b]}. \clubsuit$$

A continuación, presentamos una caracterización de la clase $R\hat{V}_{(p,2)}$, en el siguiente teorema.

Teorema 3.11. *Una función real u definida sobre el intervalo $[a, b]$ pertenece a la clase $A_(p, 2)[a, b]$ $1 < p < \infty$ si y sólo si $\hat{V}_{(p,2)}(u; [a, b]) < \infty$. Además:*

$$\hat{V}_{(p,2)}(u; [a, b]) = ||u''||^p_{L_p[a,b]} = \int_a^b |u''(t)|^p dt.$$

Supongamos que u es una función real definida en $[a, b]$ tal que $u \in A_{(p,2)}[a, b]$. Luego, por lema 3.10 $u \in R\hat{V}_{(p,2)}[a, b]$, y además

$$\hat{V}_{(p,2)}(u; [a, b]) \leq ||u''||^p_{L_p[a,b]}. \tag{3.9}$$

Sea $u \in RV_{(p,2)}[a, b]$. Luego, por definición de las funciones de $(p, 2)$-variación acotada en el sentido de Riesz, se tiene que $\hat{V}_{(p,2)}(u; [a, b]) < \infty$, y por el lema 3.9 $u \in A_{(p,2)}[a, b]$.

Además, por la parte final de la demostración del mismo lema 3.9 tenemos que

$$V_p(u'; [a, b]) = ||u''||^p_{L_p[a,b]} \leq \hat{V}_{(p,2)}(u; [a, b]). \tag{3.10}$$

Finalmente, por (3.9) y (3.10) obtenemos

$$\hat{V}_{(p,2)}(u; [a, b]) = ||u''||^p_{L_p[a,b]}. \clubsuit$$

Capítulo 4

Operador de Composición uniformemente acotado en $\widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$

En este capítulo comenzaremos introduciendo la definición de operador de composición. Luego, caracterizaremos el operador de composición que aplica el espacio de funciones de $(p,2)$-variación acotada en el sentido de Riesz en sí mismo, como combinación lineal de funciones en el mismo espacio. También se introducirá la definición de operador de composición uniformemente acotado dado recientemente por J. Matkowski en [28], para luego caracterizar el operador de composición uniformemente acotado entre espacios de Banach de las funciones de $(p,2)$-variación acotada en el sentido de Riesz.

4.1. Operador de Composición

Definición 4.1. *Sea $[a,b]$ un intervalo de la recta real. Denotaremos por $\mathbb{R}^[a,b]$ al conjunto de todas las funciones $u : [a,b] \to \mathbb{R}$. Para una función h tal que h :*

$[a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la aplicación $H : \mathbb{R}^[a,b] \to \mathbb{R}^[a,b]$ definida por

$$H(u)(x) = h(x, u(x)), \quad u \in \mathbb{R}^I, \ \ (x \in I),$$

es llamada el operador de composición (superposición o Nemytskij) generado por h.

El operador ha sido estudiado por muchos autores en diferentes espacios. Por ejemplo, en [21] se demuestra que

Teorema 4.2. *(Condición de Matkowski) Si H aplica el espacio de Banach de funciones reales Lipschitzianas $(Lip[a,b], ||\cdot||_{Lip[a,b]})$ en sí mismo, entonces es globalmente Lipschitziano con respecto a la norma $Lip[a,b]$, es decir, existe una constante $c \geq 0$ tal que*

$$||H(u_1) - H(u_2)||_{Lip[a,b]} \leq c||u_1 - u_2||_{Lip[a,b]}, \quad u_1,\ u_2 \in Lip[a,b]$$

si y sólo si existen $\alpha, \beta \in Lip[a,b]$ tales que:

$$h(x,y) = \alpha(x)y + \beta(x) \tag{4.1}$$

Resultados similares han sido obtenidos para el espacio de funciones Hölderianas [23], para el espacio de funciones diferenciables [22], para el espacio de funciones de variación acotada [31], para el espacio de funciones de convexidad acotada [16], para el espacio de funciones acotadas generalizadas en el sentido de Wiener-Young-Orlicz [6], para el espacio de funciones acotadas generalizadas en el sentido de Riesz-Orlicz incluyendo peso [4], y en otros ([8], [5], [3], [7], [24], [37]). En [25] Matkowski demostro que la expresión 4.1 se cumple si la Lipschitz continuidad de H es reemplazada por continuidad uniforme (ver [2], [12], [27], [26]), y recientemente en el año 2011, bajo condiciones muy generales, [28] Matkowski demostró que para el espacio de Hölder, la lipschitzidad de H puede ser reemplazada por una condición mucho más débil de acotación uniforme en el operador H.

4.2. Operador de Composición uniformemente acotado en $\widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$

A continuación, expondremos un lema que se utiliza en las demostraciones de los teoremas 4.4 y 4.6 y sus corolarios, que a nuestro juicio son los resultados principales del trabajo de grado. Este lema se encuentra demostrado en [61].

Lema 4.3. *(ver lema 3 de [61]). Sean $1 < p < \infty$ y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función del espacio $\widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$, entonces existe una constante positiva $s(p,k)$, tal que:*

$$\|u\|_{Lip} \leq s(p,k) \ \|u\|_{(p,2)}, \quad u \in \widehat{RV}_{(p,2)}[a,b].$$

A continuación, exponemos varios resultados que nos servirán para demostrar que el espacio $\widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$, satisface la condición de Matkowski, bajo la condición de que el operador de composición H, sea uniformemente acotado.

Teorema 4.4. *Sean $a, b \in \mathbb{R}\,(a < b)$, $p > 1$, y $h : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dada, tal que para cada $t \in [a,b]$, la función $h(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua respecto a la segunda variable. Si el operador de composición H generado por h aplica el espacio $\widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$ en sí mismo y verifica la desigualdad:*

$$\|H(u) - H(v)\|_{(p,2)} \leq \gamma\left(\|u - v\|_{(p,2)}\right), \quad u, v \in \widehat{RV}_{(p,2)}[a,b],$$

para alguna función $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$, entonces existen funciones $\alpha, \beta \in$

$\widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$, *tales que:*

$$h(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t),\ t \in [a,b],\ x \in \mathbb{R}.$$

***D*emostración:**

Dado $x \in \mathbb{R}$ fijo la función constante $u(t) = x, \quad t \in [a,b]$, está en $\widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$. Ahora bien, como H aplica el espacio $\widehat{RV}_{(p,2)}$ en sí mismo, entonces por hipótesis $H(u) = h(\cdot,x) \in \widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$, y así $h(\cdot,x)$ es continua para cada $x \in \mathbb{R}$.

Sean $s, \overline{s} \in [a,b],\ s < \overline{s},\ x_1, x_2, \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \mathbb{R}$ y consideremos las funciones:

$$u_i(t) = \frac{x_i - \overline{x}_i}{s - \overline{s}}(t-s) + x_i,\ i = 1,2.$$

Estas funciones son segmentos de rectas que pasan por los puntos (s, x_1) y $(\overline{s}, \overline{x}_1)$ en el caso de u_1 y por los puntos (s, x_2) y $(\overline{s}, \overline{x}_2)$ en el caso de u_2. De esta manera, resulta que ambas funciones tienen $(p,2)-$variación acotada. Además:

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{(p,2)} &= \left\| \frac{x_1 - \overline{x}_1}{s - \overline{s}}(t-s) + x_1 - \frac{x_2 - \overline{x}_2}{s - \overline{s}}(t-s) - x_2 \right\|_{(p,2)} \\ &= \left\| \frac{x_1 - \overline{x}_1 - x_2 + \overline{x}_2}{s - \overline{s}}(t-s) + x_1 - x_2 \right\|_{(p,2)} \end{aligned}$$

Por otra parte como $u_i \in \widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$, $i = 1,2$ entonces $H(u_i) \in \widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$, $i = 1,2$, por lo tanto por el lema 4.3, resulta que

$$\|H(u_1) - H(u_2)\|_{Lip} \le K \|H(u_1) - H(u_2)\|_{(p,2)}.$$

donde $K = 3s(k)\, max\left\{1, (b-a)^{1/2}\right\}$.

De esta manera por hipótesis, resulta que:

$$||H(u_1) - H(u_2)||_{Lip} \leq K||H(u_1) - H(u_2)||_{(p,2)} \leq K\gamma \left\| u_1 - u_2 \right\|_{(p,2)}$$

como

$$\begin{aligned} ||H(u_1) - H(u_2)||_{Lip} &\geq \left| \frac{H(u_1)(s) - H(u_2)(s) - H(u_1)(\bar{s}) + H(u_2)(\bar{s})}{s - \bar{s}} \right| \\ &= \left| \frac{h(s, u_1(s)) - h(s, u_2(s)) - h(\bar{s}, u_1(\bar{s})) + h(\bar{s}, u_2(\bar{s}))}{s - \bar{s}} \right| \\ &= \left| \frac{h(s, x_1) - h(s, x_2) - h(\bar{s}, \bar{x_1}) + h(\bar{s}, \bar{x_2})}{s - \bar{s}} \right| \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{|h(s, x_1) - h(s, x_2) - h(\overline{s}, \overline{x}_1) + h(\overline{s}, \overline{x}_2)|}{|s - \overline{s}|} \leq K\gamma \left\| u_1 - u_2 \right\|_{(p,2)}.$$

Fijemos constantes $p, q \in \mathbb{R}$ y pongamos $x_1 = \overline{x}_2 = \frac{p+q}{2}$, $\overline{x}_1 = p$, $x_2 = q$, entonces de la desigualdad anterior, se concluye que:

$$\left\| u_1 - u_2 \right\|_{(p,2)} = |x_1 - x_2|$$

y

$$\left| h\left(s, \frac{p+q}{2}\right) - h(s,q) - h(\overline{s}, p) + h\left(\overline{s}, \frac{p+q}{2}\right) \right| \leq K\gamma \left| x_1 - x_2 \right| . \left| s - \overline{s} \right|.$$

Por la continuidad de h en la primera variable, tomando límite cuando $\overline{s} \to s$, resulta:

$$\left|h\left(s,\frac{p+q}{2}\right)-h(s,q)-h(s,p)+h\left(s,\frac{p+q}{2}\right)\right|=0.$$

Así, agrupando y despejando tenemos

$$2h\left(s,\frac{p+q}{2}\right)=h(s,p)+h(s,q),\ s\in[a,b].$$

Como la función $h(t,\cdot)$ es continua y verifica la ecuación de Jensen (ver [17], p. 315) existen funciones $\alpha,\beta:[a,b]\to\mathbb{R}$, tales que:

$$h(t,x)=\alpha(t)x+\beta(t),\quad t\in[a,b],\ x\in\mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Puesto que para cada $x\in\mathbb{R}$, la función $h(\cdot,x)\in\mathbb{X}$, entonces de la ecuación (4.2) tenemos:

- Si consideramos $x=0$ obtenemos que

  $$h(t,0)=\beta(t)$$

  luego como $h(t,\cdot)\in\widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$ entonces $\beta(t)\in\widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$.

- Si consideramos $x=1$ se tiene que

  $$h(t,1) = \alpha(t)1+\beta(t)$$

  despejando

  $$\alpha(t)=h(t,1)-\beta(t)$$

  como $h(t,1)$ y $\alpha(t)\in\widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$ y $\widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$ es un espacio vectorial entonces $\alpha(t)\in\widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$. ♣

En [28] J. Matkowski presenta la siguiente definición.

Definición 4.5. *(ver [28]) Sean* Y, Z *espacios métricos (o normados). Una función* $H : Y \to Z$ *es uniformemente acotado si dado un número* $t > 0$, *existe* $\gamma(t) \geq 0$, *tal que para cualquier conjunto* $B \subset Y$, *tenemos:*

$$diam\, B \leq t \implies diam\, H(B) \leq \gamma(t).$$

Usando esta definición y haciendo una adaptación de la demostración del teorema 3 de [61], podemos reformular el teorema 4.4 de la siguiente forma.

Teorema 4.6. *Sea* $a, b \in \mathbb{R}\, (a < b)$, $p > 1$ *un número entero y* $h : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que para cada* $t \in [a,b]$, *la función* $h(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua respecto a la segunda variable. Si el operador de composición* H *generado por* h *aplica el espacio* $\widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$ *en sí mismo y es uniformemente acotado, existen funciones* $\alpha, \beta \in \widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$, *tales que:*

$$h(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t),\ t \in [a,b],\ x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

Consideremos $t \geq 0$ y funciones arbitrarias $u, v \in \widehat{RV}_{(p,2)}$ tal que $||u - v||_{(p,2)} \leq t$. Como $diam\{u,v\} \leq t$, por la acotación uniforme de H se tiene que $diam H(\{u,v\}) \leq \gamma(t)$, es decir,

$$||H(u) - H(v)||_{(p,2)} = diam H(\{u,v\}) \leq \gamma(||u - v||_{(p,2)})$$

por lo tanto, por el teorema 4.4 podemos escribir a h de la siguiente manera

$$h(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t),\ t \in [a,b],\ x \in \mathbb{R}. \quad \clubsuit$$

En el siguiente corolario, cambiamos del teorema anterior, la condición de continuidad de la función h en la segunda variable, por las condiciones de continuidad por la derecha en cero de la función γ y que además $\gamma(0) = 0$.

Corolario 4.7. *Sean $a, b \in \mathbb{R}\,(a < b)$, y $p > 1$ entero. Si el operador de composición H generado por h aplica el espacio $\widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$ en sí mismo y existe una función continua por la derecha $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\gamma(0) = 0$ y se verifica la desigualdad:*

$$\|H(u) - H(v)\|_{(p,2)} \leq \gamma\left(\|u - v\|_{(p,2)}\right), \quad u, v \in \widehat{RV}_{(p,2)}[a,b],$$

entonces existen funciones $\alpha, \beta \in \widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$, tales que:

$$h(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t),\ t \in [a,b],\ x \in \mathbb{R}.$$

Haciendo una demostración similar al teorema 2 de [26] se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.8. *Sean $a, b \in \mathbb{R}\,(a < b)$, $p > 1$, entero. Si el operador de composición H generado por h aplica el espacio $\widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$ en sí mismo y es uniformemente continuo, respecto a la norma $\|.\|_{(p,2)}$, entonces existen $\alpha, \beta \in \widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$, tales que:*

$$h(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t),\ t \in [a,b],\ x \in \mathbb{R}.$$

Además si tomamos $\gamma(t) = ct$, para algún $c > 0$, obtenemos el resultado del teorema 1 de [39].

Demostración:

Supongamos que H es uniformemente continuo con respecto a la norma $\|\cdot\|_{(p,2)}$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $u, v \in \widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$

$$\|u - v\|_{(p,2)} \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|H(u) - H(v)\|_{(p,2)} \leq \varepsilon$$

Por lo tanto, se sigue que la función $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$, la continuidad del módulo de H

$$\gamma(t) := sup\{\|H(u) - H(v)\|_{(p,2)} : \|u - v\|_{(p,2)} \leq t\}, \quad t \geq 0$$

está correctamente definida.

Como H es uniformemente continuo, entonces H es continuo y por lo tanto γ también lo es, en particular es continuo en 0.

Por otra parte, si $t = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\gamma(0) : &= sup\{\|H(u) - H(v)\|_{(p,2)} : \|u - v\|_{(p,2)} \leq 0\} \\ &= sup\{\|H(u) - H(v)\|_{(p,2)} : \|u - v\|_{(p,2)} = 0\}\end{aligned}$$

de donde $u = v$, y por lo tanto $\gamma(0) = 0$.

Además,

$$\|H(u) - H(v)\|_{(p,2)} \leq \gamma\left(\|u - v\|_{(p,2)}\right), \quad u, v \in \widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$$

Por lo tanto, por el teorema 4.4 se sigue el resultado del corolario. ♣

Comentario:

Haciendo una revisión detallada sobre el operador de composición con las propiedades de globalmente lipschitziano, uniformemente continuo o uniformemente acotado en el espacio $\widehat{RV}_{(p,2)}[a,b]$ de funciones de $(p,2)$-variación acotada $(1 < p < \infty)$ en el sentido de Riesz – De La Vallée Poussin, tenemos que estos resultados parecen ser nuevos en el tema y, es por ello, que escribiremos un artículo para someterlo al arbitraje correspondiente en una revista especializada en el tema.

Capítulo 5

Operador de Composición uniformemente acotado en $BV^k[a, b]$

En el presente capítulo caracterizaremos el operador de composición uniformemente acotado entre espacios de Banach de las funciones de $k-$ésima variación acotada en el sentido de Popoviciu y obtenemos como corolarios que todo operador de composición uniformemente continuo o Lipschitziano de aplicación del espacio de las funciones de $k-$ésima variación acotada en sí mismo es una función afín con respecto a la segunda variable, es decir, mantiene la representación de Matkowski.

5.1. Algunas caracterizaciones del espacio $BV^k[a,b]$

En esta sección se presentarán algunas caracterizaciones y resultados referentes al espacio de las funciones de $k-$ésima variación acotada las cuales serán de utilidad en las siguientes demostraciones, cabe destacar que las funciones de $k-$ésima variación acotada en el sentido de Popoviciu fue introducido de manera explícita en el capítulo 2 de este trabajo.

Antes de formular el primer lema recordemos la siguiente definición:

Definición 5.1. *Sean $k \geq 1$ un entero, $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y π: $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$. Se define el número*

$$\sigma^k(u;\pi) := \sum_{j=1}^{n-k} |u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}] - u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]|,$$

y se tiene que u tiene k-variación acotada en el intervalo $[a,b]$ si:

$$V^k(u) = V^k(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \sigma^k(u;\pi),$$

es finito, donde el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones π del intervalo $[a,b]$.

El número $V^k(u;[a,b])$ se denomina k-variación de la función u en el intervalo $[a,b]$ y la clases de funciones con k-variación acotada es denotada por $BV^k[a,b]$.

Lema 5.2 ([16], lema 2)**.** *Sea $u :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ una función del espacio $BV^2[a,b]$ entonces*

$$L_a^b(u) \leq V^2(u;[a,b]) + |u_+^{'}(a)|.$$

Lema 5.3. *Sea $u:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ una función del espacio $BV^k[a,b]$, $k\geq 2$, $k\in N$, entonces $u\in BV^{k-1}[a,b]$ y*

$$V^{k-1}(u)\leq k(b-a)(V^k(u)+|u^k_+(a)|). \tag{5.1}$$

Demostración:

Fijando arbitrariamente, $k\geq 2$, $k\in\mathbb{N}$, y considerando $u\in BV^k[a,b]$, esto se sigue de ([50], teorema 10) que $u\in BV^{k-1}[a,b]$, así $V^{k-1}(u)<\infty$. Para establecer la desigualdad consideramos a

$$P=\{(t_1,\ldots,t_n):a=t_1<\cdots<t_n=b$$

una partición fija de $[a,b]$. Por definición de k-ésima diferencia dividida tenemos que

$$|u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]-u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]|=(t_{j+k}-t_j)|u[t_j,\ldots,t_{j+k}]|. \tag{5.2}$$

Fijando $j\in 2,\ldots,n-k$ y considerando k puntos distintos $\overline{t_1},\ldots,\overline{t_k}$ en orden lineal pertenecientes a (a,t_j), es decir,

$$a<\overline{t_1}<\overline{t_2}<\ldots<\overline{t_k}<t_j.$$

Por lo tanto, usando (5.1),

$$-|u[a,\overline{t_1},\ldots,\overline{t_k}]|+|u[t_j,\ldots,t_{j+k}]|$$

$$\leq|u[a,\overline{t_1},\ldots,\overline{t_k}]|-|u[t_j,\ldots,t_{j+k}]|\leq V^k(u)$$

entonces

$$-|u[a,\overline{t_1},\ldots,\overline{t_k}]|+|u[t_j,\ldots,t_{j+k}]|\leq V^k(u).$$

Y, por consiguiente, si $\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_k}$ tiende a a, tenemos que

$$|u[t_j, \ldots, t_{j+k}]| \leq V^k(u) + |u_+^k(a)|,$$

(el límite existe ya que u es diferenciable por la derecha en a (ver [46], [60], observación 1). Luego, por (5.1) y (5.2)) tenemos que

$$\begin{aligned}
V^{k-1}(u) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-k+1} |u[t_{j+1}, \ldots, t_{j+k}] - u[t_j, \ldots, t_{j+k-1}]| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-k+1} (t_{j+k} - t_j)|u[t_j, \ldots, t_{j+k}]| \\
&\leq \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n-k+1} (t_{j+k} - t_j)(V^k(u) + |u_+^k(a)|) \\
&\leq k(b-a)(V^k(u) + |u_+^k(a)|). \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

Lema 5.4. *Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función del espacio $BV^k[a,b]$, $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, entonces existe una constante positiva $s(k)$ tal que*

$$L_a^b(u) + |u(a)| \leq s(k)\|u\|_{BV^k}. \tag{5.3}$$

Demostración:

Procedemos por inducción. Por el lema (5.2), tenemos que la desigualdad (5.3) es válida para $k = 2$ con $s(2) = 1$.

Supongamos ahora que el lema es cierto para algún $k \in N$, $k > 1$, y consideremos

$u \in BV^{k+1}[a,b]$ arbitrario. Concluimos del lema 5.3, que $u \in BV^k[a,b]$ y

$$V^k(u) \leq (k+1)(b-a)(V^{k+1}(u) + |u_+^{(k+1)}(a)|)$$

Luego, por la definición de la norma $\|\cdot\|_{BV^k}$, tenemos

$$V^k(u) \leq (k+1)(b-a)\|u\|_{BV^{k+1}},$$

y como

$$|u(a)| \leq \|u\|_{BV^{k+1}}, \quad |u_+^{(j)}(a)| \leq \|u\|_{BV^{k+1}}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

entonces

$$\begin{aligned}
||u||_{BV^k} &= V^k(u) + \sum_{j=0}^{k-1} |u^j(a)| \\
&= V^k(u) + |u(a)| + \sum_{j=1}^{k} |u^j(a)| \\
&\leq (k+1)(b-a)||u||_{BV^{k+1}} + ||u||_{BV^{k+1}} + k||u||_{BV^{k+1}} \\
&= (k+1)(b-a)||u||_{BV^{k+1}} + (k+1)||u||_{BV^{k+1}} \\
&= ((k+1)(b-a) + k + 1)||u||_{BV^{k+1}},
\end{aligned}$$

de donde

$$||u||_{BV^k} \leq ((k+1)(b-a) + k + 1)||u||_{BV^{k+1}}, \tag{5.4}$$

Por la suposición, existe $s(k) > 0$ tal que

$$\frac{L_a^b(u) + |u(a)|}{s(k)} \leq \|u\|_{BV^k}$$

así, por (5.4) tenemos que

$$\frac{L_a^b(u) + |u(a)|}{s(k)} \leq ((k+1)(b-a)+k+1)||u||_{BV^{k+1}},$$

y, por lo tanto,

$$L_a^b(u) + |u(a)| \leq s(k+1)\|u\|_{BV^{k+1}}.$$

donde $s(k+1) = s(k)((k+1)(b-a)+k+1)$. Así, por la inducción la demostración esta completada. $\clubsuit$

5.2. Operador de Composición uniformemente acotado en $BV^k[a,b]$

A continuación, presentaremos los resultados principales obtenidos por M. Wróbel en [61], los cuales nos servirán para demostrar que el espacio $BV^k[a,b]$, satisface la condición de Matkowski, bajo la condición de que el operador de composición H sea uniformemente acotado.

Teorema 5.5. *(ver [61]) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $k \in \mathbb{N}$ fijo. Supongamos que una función $h : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que, $x \in [a,b]$, la función $h(x,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua con respecto a la segunda variable. Si el operador de composición H generado por h aplica $BV^k[a,b]$ en sí mismo, y satisface la desigualdad*

$$||H(u) - H(v)||_{BV^k} \leq \gamma(||u-v||_{BV^k}), \quad u, v \in BV^k[a,b], \tag{5.5}$$

para alguna función $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$*, entonces existen* $\alpha, \beta \in BV^k[a,b]$ *tales que*

$$h(x,y) = \alpha(x)y + \beta(x), \quad x \in [a,b], \;\; y \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

Para $y \in \mathbb{R}$ fijo, consideremos la función $u(t) = y, \; t \in [a,b]$, como una constante, la cual es una función de $k-$variación, y supongamos, $H(u) = h(\cdot, y) \in BV^k[a,b]$. De donde se sigue que $h(\cdot, y)$ es continua.

Fijemos a $x, \; \overline{x} \in [a,b], \;\; x < \overline{x}, \;\; y_1, y_2, \overline{y_1}, \overline{y_2} \in \mathbb{R}$ y definamos la función

$$u_i(t) = \frac{y_i - \overline{y_i}}{x - \overline{x}}(t-x) + y_i, \quad i \in \{1,2\}.$$

Obviamente, $u_i, \;\; i \in \{1,2\}$, son funciones afines pertenecientes a $BV^k[a,b]$ y $V^k(u_i) \; = \; 0, \;\; i \in \{1,2\}$.

Además, vemos que

$$\begin{aligned} ||u_1 - u_2||_{BV^k} &= \left|\left| \frac{y_1 - \overline{y_1}}{x - \overline{x}}(t-x) + y_1 - \left(\frac{y_2 - \overline{y_2}}{x - \overline{x}}(t-x) + y_2 \right) \right|\right|_{BV^k} \\ &= \left|\left| \frac{y_1 - \overline{y_1} - y_2 + \overline{y_2}}{x - \overline{x}}(t-x) + y_1 - y_2 \right|\right|_{BV^k} \end{aligned}$$

luego, por la definición 2.13 tenemos que

$$||u_1 - u_2||_{BV^k} = \left| \frac{y_1 - \overline{y_1} - y_2 + \overline{y_2}}{x - \overline{x}} \right| + \left| \frac{y_1 - \overline{y_1} - y_2 + \overline{y_2}}{x - \overline{x}}(a-x) + y_1 - y_2 \right|. \quad (5.6)$$

De (5.3) y (5.5) con $u = u_1, \; v = u_2$, existe una constante $s(k) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{L_a^b(H(u_1)-H(u_2))}{s(k)} &\leq \frac{L_a^b(H(u_1)-H(u_2))}{s(k)}+\frac{|H(u_1)(a)-H(u_2)(a)|}{s(k)}\\ &\leq ||H(u_1)-H(u_2)||_{BV^k}\\ &\leq \gamma(||u_1-u_2||_{BV^k}),\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{L_a^b(H(u_1)-H(u_2))}{s(k)} \leq \gamma(||u_1-u_2||_{BV^k}),$$

y por lo tanto, de la definición 1.17 se obtiene lo siguiente

$$\left|\frac{(H(u_1)-H(u_2))(x)-(H(u_1)-H(u_2))(\overline{x})}{(x-\overline{x})s(k)}\right| \leq \gamma(||u_1-u_2||_{BV^k}).$$

y así,

$$\left|\frac{H(u_1)(x)-H(u_2)(x)-H(u_1)(\overline{x})+H(u_2)(\overline{x})}{(x-\overline{x})s(k)}\right| \leq \gamma(||u_1-u_2||_{BV^k}).$$

Luego, de la definición 4.1 tenemos

$$\left|\frac{h(x,y_1)-h(x,y_2)-h(\overline{x},\overline{y_1})+h(\overline{x},\overline{y_2})}{(x-\overline{x})s(k)}\right| \leq \gamma(||u_1-u_2||_{BV^k})$$

dado que $u_i(x)=y_i$, $u_i(\overline{x})=\overline{y_i}$ y de (5.6) obtenemos

$$\left|\frac{h(x,y_1)-h(x,y_2)-h(\overline{x},\overline{y_1})+h(\overline{x},\overline{y_2})}{(x-\overline{x})s(k)}\right|$$

$$\leq \gamma\left(\left|\frac{y_1-\overline{y_1}-y_2+\overline{y_2}}{x-\overline{x}}\right|+\left|\frac{y_1-\overline{y_1}-y_2+\overline{y_2}}{x-\overline{x}}(a-x)+y_1-y_2\right|\right).$$

Considerando $v,w\in\mathbb{R}$ arbitrarios y $y_1=\overline{y_2}=\dfrac{v+w}{2}$, $\overline{y_1}=v, y_2=w$ obtenemos

$$\left|h\left(x,\frac{v+w}{2}\right)-h(x,w)-h(\overline{x},v)+h\left(x,\frac{v+w}{2}\right)\right|\leq\gamma(|y_1-y_2|)\cdot|x-\overline{x}|s(k).$$

Haciendo tender $\overline{x}$ a x y usando la continuidad de h con respecto a la primera variable, tenemos que

$$\left|h\left(x,\frac{v+w}{2}\right)-h(x,w)-h(x,v)+h\left(x,\frac{v+w}{2}\right)\right|\leq 0$$

y así,

$$2h\left(x,\frac{v+w}{2}\right)-h(x,w)-h(x,v)=0$$

de donde,

$$2h\left(x,\frac{v+w}{2}\right)=h(x,v)+h(x,w),$$

para toda $x\in[a,b]$. Esto demuestra que para algún $x\in[a,b]$, la función $h(x,\cdot)$ es de Jensen y, por lo tanto es continua. En consecuencia, de ([17],p.315) existen

$\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que

$$h(x,y) = \alpha(x)y + \beta(x), \quad x \in I, \ y \in \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Ya que $h(\cdot, y) \in BV^k[a,b]$ para toda $y \in \mathbb{R}$ y de la ecuación (5.7) tenemos

- Si consideramos $y = 0$ obtenemos que

  $$h(x,0) = \beta(x)$$

  como $h \in BV_{(p,2)}[a,b]$ entonces $\beta(x) \in BV_{(p,2)}[a,b]$

- Si consideramos $y = 1$ se tiene que

  $$h(x,1) = \alpha(x)1 + \beta(x)$$

  de donde

  $$\alpha(x) = h(x,1) - \beta(x)$$

  por lo tanto, como $h(x,1)$ y $\alpha(x) \in BV_{(p,2)[a,b]}$ y $BV_{(p,2)}[a,b]$ es un espacio vectorial entonces $\beta(x) \in BV_{(p,2)}[a,b]$. ♣

Proposición 5.6. *(ver [61]) Si la función $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es continua en el 0 por la derecha y $\gamma(0) = 0$, entonces la condición de continuidad de h con respecto a la segunda variable puede ser omitida.*

Demostración:

Para $y, \overline{y} \in \mathbb{R}$ arbitrarios fijo definimos el par de funciones de constantes u,

$\overline{u} : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$u(t) = y, \quad \overline{u}(t) = \overline{y}, \qquad t \in [a,b]. \tag{5.8}$$

entonces $u, \overline{u} \in BV^k[a,b]$ y,

$$||u - \overline{u}||_{BV^k} = |y - \overline{y}|.$$

Además, supongamos, $H(u) = h(\cdot, y)$ y $H(\overline{u}) = h(\cdot, \overline{y})$ pertenecen a $BV^k[a,b]$.

Por el lema 5.4 y (5.5) existe $s(k) > 0$ tales que

$$\frac{L_a^b(H(u) - H(\overline{u})) + |H(u)(a) - H(\overline{u})(a)|}{s(k)} \leq \gamma(|y_1 - \overline{y}|),$$

por lo tanto

$$L_a^b(H(u) - H(\overline{u})) \leq \gamma(|y - \overline{y}|)s(k)$$

y

$$|H(u)(a) - H(\overline{u})(a)| \leq \gamma(|y - \overline{y}|)s(k).$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (5.8), para todo $x \in [a,b]$, obtenemos

$$\left| \frac{h(x,y) - h(x,\overline{y}) - h(a,y) + h(a,\overline{y})}{x - a} \right| \leq \gamma(|y - \overline{y}|)s(k)$$

y

$$|h(a,y) + h(a,\overline{y})| \leq \gamma(|y - \overline{y}|) \cdot s(k).$$

Así, por la desigualdad triangular, obtenemos

$$\begin{aligned}
|h(x,y)-h(x,\overline{y})| &\leq |h(x,y)-h(x,\overline{y})-h(a,y)+h(a,\overline{y})|+|h(a,y)-h(a,\overline{y})| \\
&= \left|\frac{h(x,y)-h(x,\overline{y})-h(a,y)+h(a,\overline{y})}{x-a}\right||x-a|+|h(a,y)+h(a,\overline{y})| \\
&\leq \gamma(y-\overline{y})s(k)|x-a|)+\gamma(|y-\overline{y}|)s(k),
\end{aligned}$$

donde

$$|h(x,y)-h(x,\overline{y})| \leq \gamma(|y-\overline{y}|)s(k)(|x-a|+1).$$

Ahora de la continuidad de γ en 0 y la igualdad $\gamma(0)=0$ implica que h es continua con respecto a la segunda variable. ♣

Teorema 5.7. *Sean $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ y $k \in \mathbb{N}$ fijos. Supongamos que el operador de composición H generado por h aplica $BV^k[a,b]$ en sí mismo. Si existe una función $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$ continua en 0 por la derecha y*

$$||H(u)-H(v)||_{BV^k} \leq \gamma(||u-v||_{BV^k}), \quad u,v \in BV^k[a,b],$$

entonces, la representación de Matkowski es:

$$h(x,y)=\alpha(x)y+\beta(x), \quad x \in [a,b], \;\; y \in \mathbb{R},$$

para algún α, $\beta \in BV^k[a,b]$.

La demostración de este teorema es similar al teorema 5.5 y la proposición 5.6.

Corolario 5.8. *Sean $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ y $k \in \mathbb{N}$ fijos. Si el operador de composición*

H generado por h aplica $BV^k[a,b]$ en sí mismo y es uniformemente continuo con respecto a la norma de $BV^k[a,b]$ entonces existen $\alpha,\ \beta \in BV^k[a,b]$, tales que

$$h(x,y) = \alpha(x)y + \beta(x), \quad x \in [a,b], \ \ y \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

Supongamos que H es uniformemente continua. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $u, v \in Lip[a,b]$, entonces

$$||u - v||_{Lip[a,b]} \leq \delta$$

entonces

$$||H(u) - H(v)||_{Lip[a,b]} \leq \varepsilon.$$

Se deduce que en la función $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$ la continuidad del módulo de H

$$\gamma(t) = \sup\{||H(u) - H(v)||_{Lip[a,b]} : ||u - v||_{Lip[a,b]} \leq t\}, \qquad t \geq 0$$

está bien definida, γ es continua en 0 y, además $\gamma(0) = 0$ ya que

$$\gamma(0) = \sup\{||H(u) - H(v)||_{Lip[a,b]} : ||u - v||_{Lip[a,b]} \leq 0\}$$

luego por definición de norma tenemos que

$$||u - v||_{Lip[a,b]} = 0$$

de donde, $u - v = 0$ y $u = v$, lo que implica que $\gamma(0) = 0$, y como

$$\gamma(0) = \sup\{||H(u) - H(v)||_{Lip[a,b]} \leq \gamma(||u - v||_{Lip[a,b]}) \leq 0\}$$

esto implica que h es continua con respecto a la segunda variable, luego por el teorema 5.5 existe un $\alpha, \beta \in BV_k[a,b]$ tales que

$$h(x,y) = \alpha(x)y + \beta(x), \quad x \in [a,b], \;\; y \in \mathbb{R}. \quad \clubsuit$$

Observación 5.9. *Sean $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ y $k \in \mathbb{N}$ fijos. Si el operador de composición H generado por h aplica $BV^k[a,b]$ en sí mismo y es un operador Lipschitziano (en el sentido de la norma de $BV^k[a,b]$) entonces existen $\alpha,\ \beta \in BV^k[a,b]$, tales que*

$$h(x,y) = \alpha(x)y + \beta(x), \quad x \in [a,b], \;\; y \in \mathbb{R}.$$

Observación 5.10. *Para $k = 1$ obtenemos el resultado de Kostrzewski [16].*

Observación 5.11. *Obviamente, todo operador de composición uniformemente continuo u operador Lipschitziano es uniformemente acotado y el reciproco no es cierto.*

Teorema 5.12. *(ver [61]) Sea $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ y $k \in \mathbb{N}$ fijo. Suponga que una función $h : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que, $x \in [a,b]$, la función $h(x,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua con respecto a la segunda variable. Si el operador de composición H generado por h aplica $BV^k[a,b]$ en sí mismo y es uniformemente acotado entonces existen $\alpha, \beta \in BV^k[a,b]$ tales que*

$$h(x,y) = \alpha(x)y + \beta(x), \quad x \in [a,b], \;\; y \in \mathbb{R},$$

y

$$H(u)(x) = \alpha(x)y + \beta(x), \quad u \in BV^k[a,b], \;\; (x \in [a,b]).$$

Demostración:

Considerando algún $t \geq 0$ y $u, v \in BV^k[a,b]$ arbitrarias tales que $||u-v||_{BV^k} \leq t$. Ya que $diam\{u,v\} \leq t$, por la acotación uniforme de H, tenemos $diam\ H(\{u,v\}) \leq$

$\gamma(t)$, es decir,

$$||H(u) - H(v)||_{BV^k} \leq diam\ H(\{u, v\}) \leq \gamma(||u - v||_{BV^k}),$$

y este resultado sigue del teorema 5.5. ♣

Conclusiones

En el presente Trabajo Especial de Grado, se expuso explícitamente la noción de segunda variación acotada en el sentido de De La Vallée Poussin [57] y, además, se demostró que la clase de funciones con segunda variación acotada se puede dotar de una estructura de espacio vectorial, así como también de una norma que hace que sea un espacio normado, un espacio de Banach y un álgebra de Banach.

Se presentó la noción de las funciones de k-variación acotada en el sentido de Popoviciu [46] , como una generalización de la noción de segunda variación acotada y de igual modo se demostró que el espacio de funciones con k-variación acotada es un espacio vectorial y posee una norma que hace que esta clase de funciones sea un espacio normado, un espacio de Banach y un álgebra de Banach. Otro resultado importante es que si una función pertenece a k-variación acotada en el sentido de Popoviciu, entonces esta puede ser escrita como la diferencia de funciones k-convexas, con lo cual se le pueden transferir a estas funciones con k-variación acotada las propiedades de las funciones k-convexas.

Por otro lado, se introdujo la noción de $(p, 2)$-variación acotada introducida por N. Merentes [38] en el año de 1992, la cual surge como una generalización del concepto de p-variación acotada en el sentido de Riesz, y se obtiene como uno de los resultados más importantes que, una función u pertenece a $RV_{(p,2)}$ si y sólo si u' es absolutamente continua en el intervalo $[a, b]$ y $u'' \in L_p[a, b]$. Luego como una nueva contribución del tema al operador de Nemytskij en $RV_{(p,2)}[a, b]$ se demostró que el operador de composición uniformemente acotado que aplica el espacio de funciones de $(p,2)$-variación acotada en el sentido de Riesz en sí mismo satisface la condición de J. Matkowski y así es lineal en este espacio (este trabajo fue realizado por S. Rivas, F. Armao y J. Rojas y sera eviando a una revista especializada para someterlo al arbitraje correspondiente).

Otros resultados relevantes expuestos en este trabajo, de manera explícita, es un resultado de M.Wrobel [61] del 2011, donde se presenta una caracterización del operador de composición uniformemente acotado entre espacios de Banach de las funciones de k-ésima variación acotada en el sentido de Popoviciu y un resultado conocido sobre el operador de composición uniformemente continuo o Lipschitziano en donde se obtiene que tal espacio satisface la condición de Matkowski.

Finalmente, el trabajo con estos espacios de funciones de variación acotada, brinda la oportunidad de introducirse en una linea de investigación con gran campo de acción, ya que es conocido que existen otros tipos de generalizaciones de estos espacios de funciones con variación acotada, como lo son: la variación en el sentido de Wiener, en el sentido de Waterman, en el sentido de Schramm, entre otros.

Bibliografía

[1] L. Avila, *Funciones de p-Variación Acotada en el sentido de Wiener y Riesz.*, Tesis, Universidad Nacional Abierta, Falcon. (1994).

[2] A. Azócar, A. Guerrero, J. Matkowski, N. Merentes, *Uniformly continuous set-valued composition operators in the space of continuous functions of bounded variation in the sense of Wiener*, Opuscula Math. 30 (2010), 53-60.

[3] V.V. Chistyakov, *Generalized variation of mappings with applications*, Real Analysis, Exchange 25 (1999), 2455-2466.

[4] V.V. Chistyakov, *Lipschitzian superposition operators between spaces of functions of bounded generalized variation with weight*, Nonlinear Analysis, 6 (2000), 173-186.

[5] V.V. Chistyakov, *Generalized variation of mappings with applications to composition operators and multifunctions*, Positivy. 5, 4 (2001), 323-358.

[6] V.V. Chistyakov, *Mappings of generalized variation and composition operators*, J. Math. Sci., 110, 2 (2002), 2455-2466.

[7] V.V. Chistyakov, *Superposition operators in the algebra of functions of two variables with finite total variation*, Monatsh, Math., 137 (2002), 99-114.

[8] V.V. Chistyakov, *A Banach algebra of functions of several variables of finite total variation and Lipschitzian superposition operators I*, Nonlinear Analysis, 62 (2005), 559-578.

[9] P.L. Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométricas que servent áreprésenter une fonction arbitraire entre des limites donnés*, Journal für die Reine und Angewandte mathematik **4** (1829), 157-159.

[10] J. Fourier, *The analytical of Heat*, translated by A.Freeman,*Dover Publications, Inc., New York,*(1955).

[11] D. Glazowska, J. Matkowski, N. Merentes and J. Sánchez. *Bounded Composition operators in the Banach space of absolutely continuous functions*, enviado (2010).

[12] A. Guerrero, H. Leiva , J. Matkowski, N. Merentes, *Uniformly continuous composition operators in the space of bounded φ-variation functions*, Nonlinear Analysis, 72 (2010), 3119-3123.

[13] V. Hernández, *El Espacio de Funciones con k-Variación Acotada en el sentido de Popoviciu*, Tesis, Universidad central de Venezuela, Caracas. (2008).

[14] C. Jordan, *Sur la série de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris, 2 (1881), 228-230.

[15] J. Knop, *On globally Lipschitzien Nemytskii operator in special Banach space of functions*, Fasciculi Math. 21 (1990), 79-85.

[16] T. Kostrzewski, *Globally Lipschitzian operators of substitution in Banach space $BC[a,b]$*, Scientific Bulletin of Lódz Technical University, Mat. 602 (1993), 17-27.

[17] M. Kuzma, *A Introduction to Theory of Functional Equations and Inequalities*, Polish scientific Editors and Silesian University, Warszawa - Kraków - Katowuce, 1985.

[18] H. Leiva, N. Merentes, J. Sánchez, S. Rivas, *On functions of bouded* (φ, k)-*variation.* Enviado a publicacion.

[19] M. Lupa, *From of Lipschitzian operator of subtitution in some class of functions*, Zeszyty Nauk. Politek. Tódz, 21 (1989), 87-96.

[20] L. Maligranda and W. Orlicz, *On some properties of functions of generalized variation*, Mh. Math.**104** (1987), 53-65.

[21] J. Matkowski, *Functional equation and Nemytskij operators*, Funkcial Ekv. 25 (1982), 127-132.

[22] J. Matkowski, *Form of Lipschitz operators of substitution in Banach spaces of differentiable functions*, Sci. Bull. Lódz Techn. Univ. 17 (1984), 5-10.

[23] J. Matkowski, *On characterization of Lipschitzian operators of substitution in the class of Hölder function*, Sci. Bull. Lódz Techn. Univ. 17 (1984), 81-85.

[24] J. Matkowski, *Lipschitzian composition operators in some function spaces*, Nonlinear Analysis. 30, 2 (1997), 719-726.

[25] J. Matkowski, *Uniformly continuous superposition operators in the space of differentiable functions and absolutely continuous functions*, Internat. Ser. Numer. Math. 157, (2008), 155-156.

[26] J. Matkowski, *Uniformly continuous superposition operators in the Banach space of Hölder functions*, J. Math. Anal. App. 359, (2009), 56-61.

[27] J. Matkowski, *Uniformly continuous superposition operators in the space of bounded variation functions*, Math. Nach. 283, 7 (2010), 1060-1064.

[28] J. Matkowski, *Uniformly bounded composition operators between general Lipschitz functions normed spaces*, (Aceptado) (2011) Top. Math. Nonl. Anal.

[29] J. Matkowski, N. Merentes, *Characterization of Globally Lipschitzian composition operators in the Banach space $BV_p^2[a,b]$*, Archivum Math. 28 (1992), N°. 3-4, 181-186.

[30] J. Matkowski, N. Merentes, *Characterization of Globally Lipschitzian composition operators in the Sobolev space $W_p^n[a,b]$*, Zeszyty Nauk. Politech. Lódz. Mat. 24 (1993), 90-99.

[31] J. Matkowski and J. Miś, *On a characterization of Lipschitzian operators of substitution in the space $BV\langle a,\, b\rangle$*, Math. Nachr. **117** (1984), 155–159.

[32] J. Matkowski and M. Wróbel, *Uniformly bounded Nemytskij operators generated by set-valued functions between generalized Hölder function spaces*, enviado.

[33] A. Matkowska, J. Matkowski, N. Merentes, *Remark on globally Lipschitzian composition operators*, Demostratio. Math. 4, 27 (1994). (por aparecer)

[34] A. Matkowska, *On the characterization of Lipschitzian operator of substitution in the class Hölder's funtions*, Zeszyty Nauk. Politech. Tódz. Mat. 17 (1984), 81-85.

[35] Yu. T. Medvedev, *A generalization of certain theorem of Riesz*(en ruso), Uspekhi Mat. Nauk. 6 (1953), 115-118.

[36] N. Merentes, *About the composition operator on the space of bounded Riesz variation*, Doctoral dissertation. L. Eotvos University, Budapest, 1991.

[37] N. Merentes, *On a characterization of Lipschitzian operators of substitution in the space of bounded Riesz φ-variation*, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. 34 (1991).

[38] N. Merentes, *On funtions of bounded* $(p,2)-$*variation*, Collet. Math. 43 (1992), N°. 2, 117-123.

[39] N. Merentes, S. Rivas, On Characterization of te Lipschitzian composition operator between spaces of functions of bounded p-variation, Math. J. 45 (120) (1995), 627-637.

[40] N. Merentes y S. Rivas, *El Operador de Composición en Espacios con algun tipo de Variación Acotada*, Escuela Venezolana de Matemáticas, asociación Matemática Venezolana, Centro de estudios Avanzados- Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, 18 (1996).

[41] N. Merentes, S. Rivas, *Characterization of globally Lipschitzian composition operators between spaces* $RV_p[a,b]$ *and* $RV_q[a,b]$, Czech. Math. 1 (por aparecer).

[42] N. Merentes, J. Sánchez, S. Rivas, *On functions of bounded* (p,k)*-variation.* J. Funct. Sapces Appl. Por aparecer.

[43] R. H. Martin, *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney-Toronto, 1976.

[44] Sz. B. Nagy, *Introduction to real functions and ortogonal expansion*, Académiai. Kiadó, Bedapest, 1964.

[45] M. T. Popoviciu, *Sur les fonctions convexes d'une variable reelle*, C.R. Acad. Sci. Paris, 190 (1930), 1481-1483.

[46] M. T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une variaable réelle convexes d'order superior*, D. Sc. Thesis, Paris (1933).

[47] F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer functionen*, Mathematische Annalen, 69 (1910), 449-497.

[48] A. W. Roberts and D. E. Varberg, *Convex functions*, Academic Press, New York and London, 1973.

[49] A.M. Russell, *Functions of bounded second variation and Stieljes-type integrals*, J. London Math. Soc. 2, 2 (1970), 193-203.

[50] A.M. Russell, *Functions of bounded kth variation*, Proc. London Math. Soc. 3, 26 (1973), 547-563.

[51] A. M. Russell, *A Banach space of functions of generalized variation*, Bull. Austral. Math. Soc., 15 (1976), 431-438.

[52] A. M. Russell, *Futher results on an integral representation of function of generalized variation*, Bull. Austral. Math. Soc.**18** (1978), 407-420.

[53] A. M. Russell, *A Commutative Banach Algebra of functions of generalized variation*, Pacific Journal of Matematics **84** (1979), Nº2, 455-463.

[54] M. Sanoja, *Funciones de χ-Variación Acotada en un intervalo y un Teorema de Representación de Korenblum*, Tesis, Universidad central de Venezuela, Caracas. (2011).

[55] M. Schramm, *Functions of Φ-Bounded Variation and Riemman-Stieltjes Integration*, Trans. Amer. Math. Soc., 287 (1985), no.1, 49-63.

[56] A. Sieczko, *Characterization of globally lipschitzian Nemytskii operators in the Banach space*, ACr-1, Math. Nach. 141 (1989), 7-11.

[57] Ch. J. de la Valée Poussin, *Sur la convergence des formules d'interpolatin entre ordennées equidistantes*, Bull. Acad. Sci. Belg. (1908), 314-410.

[58] D. Waterman, *On the convergence of Fourier series of Functions of generalizad bounded vatiation*, Studia Math. 44 (1972), 107-117.

[59] D. Waterman, *On* $\Lambda-$*bounded variation*, Studia Math. 52 (1976), 33-45.

[60] M. Wróbel, *On functions of bounded* $n-th$ *variation*, Annales Mathematicae Silesianae. 15 (2001), 79-86.

[61] M. Wrobel, *Uniformly bounded Nemytskij operators beteween the Banach space of functions of bounded n-th variation*, aceptado (2011).