UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Características Combinatorias del Cardinal del Continuo

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Dennis Contreras Añez.** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Jose Gregorio Mijares.

Caracas - Venezuela

12 de enero de 2010

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**TITULO DEL TRABAJO DE GRADO**", presentado por el **Br. Dennis Contreras Añez**. titular de la Cédula de Identidad **V-17.125.398**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Jose Gregorio Mijares

Tutor

Dr. Carlos Di Prisco

Jurado

Dr. Elías Tahan

Jurado

Dedicado a:

A mi abuela Zoilinda y mi tía Ines.

Agradecimiento

A mi familia y amigos.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Notación

- $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.
- ω el conjunto de los ordinales finitos (ver capitulo 2, en algunos casos identificaremos a $\mathbb{N}$ con ω).
- $\mathcal{P}(\omega)$ el conjunto de partes de omega.
- 2^ω el conjunto de todas las funciones $f : \omega \to 2$ o el conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos.
- ω^ω el conjunto de todas las funciones $f : \omega \to \omega$ o el conjunto de todas las sucesiones de numeros naturales.
- $[\omega]^\omega$ el conjunto de todos los conjuntos infinitos de naturales.
- $\aleph_0$ el cardinal de un ordinal numerable infinito.
- $\aleph_1$ el menor cardinal de un ordinal no numerable.
- $\mathfrak{c}$ el cardinal del continuo.
- $2^{\aleph_0}$ el cardinal de $\mathcal{P}(\omega)$.

1.2. Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo investigar determinadas características combinatorias del cardinal del continuo ($\mathfrak{c}$), basadas en el capítulo Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum del libro Hand Book of Set Theory [1].

Para comprender de donde surge la motivación para hacer este estudio de las características combinatorias del cardinal del continuo, es necesario citar el primer teorema relacionado con el tema, que es el resultado de Cantor, que dice que " la cardinalidad $\mathfrak{c}$ del continuo es igual a $2^{\aleph_0}$, y por lo tanto éste es estrictamente mayor que la cardinalidad de $\aleph_0$ de los números naturales".

Esta distinción entre $\aleph_0$ y $\mathfrak{c}$, fue puesta en buen uso, en especial en el análisis real, donde se tienen muchas propiedades útiles que sólo se dan en conjuntos numerables y dejan de ser ciertas si estas se extienden a conjuntos de cardinal $\mathfrak{c}$.

Algunas de estas propiedades son:

1.- La recta real no puede ser cubierta por una cantidad numerable de conjuntos nunca densos (El teorema de Categoría de Baire).

2.- La unión de una cantidad numerable de conjuntos cada uno de medida de Lebesgue cero, tiene medida cero.

3.- Dada una cantidad numerable de sucesiones de numeros reales, entonces, existe una sucesión que eventualmente domina a cada una de estas.

4.- Dada una cantidad numerable de sucesiones acotadas de números reales $S_k =< x_{k,n} >_{n\in\omega}$ ($k \in \omega$), existe un subconjunto infinito $A \subset \mathbb{N}$ tal que todas las subsucesiones $< x_{k,n} >_{n\in A}$ convergen.

Cada uno de estos resultados serían falsos si la hipótesis de numerabilidad fuese debilitada, es decir, si en vez de tomar una cantidad numerable de conjuntos se toma una cantidad no numerable.

Algunas de las preguntas que uno se puede formular son: ¿Hasta qué punto esta hipótesis puede ser debilitada para permitir que se satisfagan dichas propiedades?, y si de ser posible, ¿hasta cuánto?. ¿Existe algún cardinal no numerable para el cual estos resultados permanecen ciertos?

Si se acepta la Hipótesis del Continuo (HC), la respuesta a esta pregunta es trivial, ya que todos los resultados son falsos para $2^{\aleph_0}$, porque hay que recordar que la HC dice que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Pero en vista de que la hipótesis del continuo no es demostrable, ni refutable por los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección (ZFC), se puede preguntar ¿qué pasa si la HC es falsa? de ser así, entonces existen cardinales estrictamente entre $\aleph_0$ y $\mathfrak{c}$ y por ende deja de ser evidente la respuesta a las preguntas realizadas anteriormente.

No sólo no es evidente, además no se puede decidir en ZFC. Por ejemplo, es consistente con ZFC que $\mathfrak{c} = \aleph_2$ y todos los resultados citados anteriormente sean ciertos para $\aleph_1$, pero también es consistente que $\mathfrak{c} = \aleph_2$ y todos los resultados citados fallen para $\aleph_1$. Lamentablemente esto hace que no se pueda decir mucho acerca de extender estos resultados a cardinales más grandes, pero a pesar de esto se puede encontrar conexiones interesantes y profundas entre las extensiones de diferentes resultados. Por ejemplo, si el resultado de medida de Lebesgue mencionado anteriormente se satisface para un cardinal κ, entonces los resultados acerca de la categoría de Baire y eventual dominación serían ciertos para conjuntos de cardinal κ.

En principio nos referiremos a "continuo", como la recta real $\mathbb{R}$ o el intervalo $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. En la práctica es común en la teoría de conjuntos, identificar a $\mathbb{R}$ con los espacios 2^ω, ω^ω y $[\omega]^\omega$.

Dada una propiedad, diremos que su **cardinal característico** es el menor cardinal de un conjunto que la satisface.

Los propiedades que se trabajarán son:

- *Familias Dominantes*: ($\mathcal{D} \subset \omega^\omega$) es una *familia dominante*, si para todo $f \in \omega^\omega$ existe $g \in \mathcal{D}$ tal que $f \leq^* g$. (donde $f \leq^* g$ si para todo n existe un m tal que si $n > m$ entonces $f(n) \leq g(n)$).
- *Familias No Acotadas*: ($\mathcal{B} \subset \omega^\omega$) es una familia *no acotada* si no existe $g \in \omega^\omega$ tal que $g \ ^* \geq f$ para todo $f \in \mathcal{B}$.

- *Familias Separadoras* : un conjunto $X \subseteq \omega$ *separa* a un conjunto infinito $Y \subseteq \omega$ si ambos $Y \cap X$ y $Y - X$ son infinitos. Se dice que una familia S de subconjuntos de ω es una *familia separadora* si para cada conjunto infinito $Y \subseteq \omega$ existe al menos un conjunto $X \in S$ que lo separe.

- *Homogeneidad*: Un conjunto $H \subset \omega$ es *homogéneo* para una función $f : [\omega]^n \rightarrow k$ (es decir una partición de $[\omega]^n$ en k piezas) si f es constante en $[H]^n$. H es casi *homogéneo* para f si existe un conjunto finito F tal que $H - F$ es *homogéneo* para f.

- *Familias Inseparables*: una familia $\mathcal{R}$ de subconjuntos infinitos de ω es *inseparable*, si no existe un único conjunto $S \subset \omega$, que separe a todos los conjuntos de $\mathcal{R}$. Es $\sigma -$ *inseparable*, si no existe una cantidad numerable de conjuntos que pueda separar a todos los elementos de $\mathcal{R}$.

sus respectivos cardinales característicos son:

- $\mathfrak{d} = min\,\{\,|\mathcal{D}|\,:\,\mathcal{D}$ es una familia dominante$\}$.

- $\mathfrak{b} = min\,\{\,|\mathcal{B}|\,:\,\mathcal{B}$ es una familia no acotada$\}$.

- $\mathfrak{s} = min\,\{\,|\mathcal{H}|\,:\,\mathcal{H}$ es una familia separadora$\}$.

- Sea F una familia de particiones de $[\omega]^n$ en dos clases. Decimos que F es *no-homogénea* si $(\forall A \subset \omega)(\exists f \in F)(A$ no es casi homogéneo para f$)$. Entonces:

$$\mathfrak{par}_n = min\{|F| : F \text{ es no homogénea}\}.$$

- $\mathfrak{r} = min\,\{\,|\mathcal{R}|\,:\,\mathcal{R}$ es una familia inseparable$\}$.

- $\mathfrak{r}_\sigma = min\,\{\,|\mathcal{R}|\,:\,\mathcal{R}$ es una familia σ-inseparable$\}$.

De estos cardinales, se estudiaran las relaciones combinatorias con respecto al cardinal del continuo en $ZFC + \neg HC$.

Este trabajo se distribuye de la siguiente manera:

- En los capítulos 2, 3 y 4 se presentarán las nociones sobre las que se fundamenta este trabajo.
- En los capítulos 5 y 6 se estudiarán las relaciones combinatorias mencionadas anteriormente.

Capítulo 2

Axiomas de la Teoría de Conjuntos:

En este capitulo se verá la Teoría Axiomática de Conjuntos de *Zermelo-Fraenkel con el Axioma de Elección* (ZFC), básicamente por conjuntos se dará a entender una colección de objetos que satisfacen una propiedad dada, es decir el conjunto de animales, seres humanos etc, esta noción de conjunto será formalizada hasta llegar a una definición que se pueda derivar de los axiomas de (ZFC).

2.1. Lenguaje de la Teoría de Conjuntos.

Para desarrollar de manera precisa la Teoría de Conjuntos de ZFC, se usará el lenguaje del cálculo de predicado de primer orden. Aparte del predicado de igualdad, el lenguaje de la Teoría de Conjuntos consiste del predicado binario $\in$ de la relación de pertenencia. La exposición que aquí se presenta se basa en las referencias [7] y [4].

Las fórmulas de la Teoría de Conjuntos están construidas a partir de las *fórmulas atómicas*:

$$x \in y, \qquad x = y$$

A partir de las fórmulas atómicas, se define el resto de las fórmulas así:

1. Toda fórmula atómica es una fórmula;

2. Si ϕ y ψ son fórmulas, entonces $\neg\, \phi$ y $\phi \vee \psi$ son fórmulas;

3. Si ϕ es una fórmula y x es una variable, $\forall\, x\, \phi$ es una fórmula.

Además, se utilizarán varias abreviaciones para simplificar la escritura. Si ϕ y ψ son fórmulas, se escribirá $\phi \wedge \psi$ para abreviar $\neg\,((\neg\,\phi) \wedge (\neg\,\psi))$,

$\phi \rightarrow \psi$ para abreviar $(\neg \phi) \wedge \psi$,

$\phi \leftrightarrow \psi$ para abreviar $(\phi \rightarrow psi) \wedge (\psi \leftrightarrow \phi)$,

$\exists x \, \phi$ para abreviar $\neg (\forall x (\neg \phi))$,

$(\exists z \in X)\phi$ para abreviar $\exists z (z \in X \wedge \phi)$, y finalmente

$(\forall z \in X)\phi$ para abreviar $\forall z (z \in X \rightarrow \phi)$

Se dice que una variable aparece en una fórmula ϕ ligada por un cuantificador ($\forall$ o $\exists$), si aparece en la fórmula bajo el alcance de ese cuantificador; en caso contrario, aparece libre. Más formalmente, se definen las variables libres de una fórmula por inducción.

Definición 2.1.1 Si ϕ es una fórmula atómica, las *variables libres* de ϕ son todas las variables que aparecen en ϕ. Las variables libres de $(\neg \phi)$ son las variables libres de ϕ. Las variables libres de $(\phi \vee \psi)$ son las variables libres de ϕ y las variables libres de ψ. Las variables libres de la formula $\forall x \, \phi$ son todas las variables libres de ϕ excepto x ya que ésta, aparece bajo el alcance de un cuantificador.

Cuando se escribe $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, se quiere expresar que las variables libre de ϕ están entre $x_1, \ldots, x_n$.

Se expresará por $\exists ! \, x \, \phi$ que existe un único x tal que $\phi(x)$, es decir, $\exists x (\phi(x) \wedge (\forall y \, \phi(y) \rightarrow x = y))$.

Todos los axiomas de ZFC pueden expresarse en este lenguaje formal.

Una relación binaria dada por una fórmula $\phi(x, y)$ es una *relación funcional* si $\forall x (\exists y \, \phi(x, y) \rightarrow \forall z \forall w (\phi(x, z) \wedge \phi(x, w) \rightarrow z = w))$, es decir, para todo x, si existe y tal que $\phi(x, y)$, entonces existe un único y tal que $\phi(x, y)$.

2.2. Clases.

A continuación se dará una introducción informal de lo que es una *clase*. Se hace por razones prácticas, ya que es más fácil manipular clases, que fórmulas:

Si $\phi(x, p_1, \ldots, p_n)$ es una fórmula, llamamos a:

$$C = \{x : \phi(x, p_1, \ldots, p_n)\}$$

la *clase* C.

Los miembros de la clase C, son todos aquellos conjuntos x que satisfacen $\phi(x, p_1, \ldots, p_n)$:

$$x \in C \text{ si y solo si } \phi(x, p_1, \ldots, p_n).$$

Dos clases son consideradas iguales si tienen los mismos elementos, es decir:

Si $C = \{ x : \phi(x, p_1, \ldots, p_n)\}$, $D = \{ x : \psi(x, p_1, \ldots, p_n)\}$. entonces $C = D$ si y solo si para todo x se tiene que:

$$\phi(x, p_1, \ldots, p_n) \leftrightarrow \psi(x, p_1, \ldots, p_n).$$

Se dice que C es una *subclase* de D si:

$$C \subset D \text{ si y solo si para todo } x,\ x \in C \text{ implica } x \in D,$$

La *clase universal*, es la clase de todos los conjuntos:

$$V = \{x : x = x\}.$$

Se definen las siguientes operaciones de clases:

$$C \bigcap D = \{ x : x \in C \wedge x \in D\},$$

$$C \bigcup D = \{ x : x \in C \vee x \in D\},$$

$$C - D = \{ x : x \in C \wedge x \notin D\},$$

$$\bigcup C = \{ x : x \in S \text{ para algún } S \in C\} = \bigcup \{ S : S \in C\}$$

Todo conjunto puede ser considerado una clase.
Si S es un conjunto, la fórmula $x \in S$ y la clase

$$\{x : x \in S\}.$$

El conjunto S es único y está determinado por sus elementos como se verá en el Axioma de Extensionalidad.

Una clase que no es un conjunto, es una *clase propia*.

2.3. Axiomas de ZFC.

2.3.1. Axioma de Extensionalidad.

Si X e Y tienen los mismos elementos, entonces X = Y:

$$\forall u\,(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y.$$

De manera inversa, $X = Y$ si $u \in X \leftrightarrow u \in Y$, es un axioma del cálculo de predicado. De donde se puede concluir que:

$$X = Y \textit{ si y sólo si } \forall u\,(u \in X \leftrightarrow u \in Y).$$

Este axioma determina la idea básica de lo que es un conjunto: Un conjunto está determinado por sus elementos.

2.3.2. Axioma del Conjunto Vacío.

Existe un conjunto que no tiene ningún elemento.

$$\exists x \forall y\,(\,y \notin x\,).$$

Por el axioma de extensionalidad este conjunto es único, y lo denotaremos por $\emptyset$.

2.3.3. Axioma de Pares.

Para cualquier a y b existe un conjunto $\{a,b\}$ *que contiene exactamente a y b:*

$$\forall a \forall b \exists c \forall x\,(x \in c \leftrightarrow x = a \lor x = b).$$

Por Extensionalidad, se tiene que el conjunto c es único, lo que permite definir al *par*:

$$\{a,b\} = \text{el único } c \text{ tal que } \forall x\,(x \in c \leftrightarrow x = a \lor x = b).$$

El *conjunto unitario* $\{a\}$ es el conjunto:

$$\{a\} = \{a,a\}.$$

En vista de que $\{a,b\} = \{b,a\}$, se define un *par ordenado* como:

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}.$$

que satisface la siguiente condición:

$$(a, b) = (b, a) \text{ si y sólo si } a = b \text{ y } b = a.$$

De manera inductiva se tiene:

$$(a, b, c) = ((a, b), c),$$
$$(a, b, c, d) = ((a, b, c), d),$$
$$(a_1, \ldots, a_{n+1}) = ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1})$$

y al igual que antes, se puede concluir que dos n-tuplas $(a_1, \ldots, a_n)$ y $(b_1, \ldots, b_n)$ son iguales si y sólo si $a_1 = b_1 \ldots a_n = b_n$.

2.3.4. Axioma de Separación.

Sea $\phi(u, p)$ una fórmula del lenguaje de la Teoría de Conjuntos. Para cualquier X y p, existe un conjunto $Y = \{ u \in X : \phi(u, p)\}$:

$$\forall X \forall p \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \phi(u, p)).$$

Para cada fórmula $\phi(u, p)$, se tiene un Axioma de Separación. El conjunto Y antes mencionado, es único por el Axioma de Extensionalidad.

Una forma general del Axioma de Separación es: Dada una formula $\psi(u, p_1, ..., p_n)$, entonces

$$\forall X \forall p_1 \ldots \forall p_n \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \psi(u, p_1, ..., p_n)).$$

Ésta, se puede deducir de la anterior tomando $\phi(u, p)$ como:

$$\exists p_1, \ldots, \exists p_n (p = (p_1, \ldots, p_n) \wedge \psi(u, p_1, \ldots, p_n))$$

entonces, dado X y $p_1, \ldots, p_n$, sea

$$Y = \{ u \in X : \phi(u, (p_1, \ldots, p_n))\}.$$

Si se toma la clase $C = \{u : \psi(u, p_1, \ldots, p_n)\}$ se tiene por la generalización anterior que:

$$\forall X \exists Y (C \bigcap X = Y)$$

De donde se deduce que la intersección de una clase C con cualquier conjunto, es un conjunto.

Una consecuencia del Axioma de Separación es que la intersección y la diferencia entre dos conjuntos es un conjunto; se definen entonces las siguientes operaciones:

$$X \bigcap Y = \{u \in X : u \in Y\} \quad \text{y} \quad X - Y = \{u \in X : u \notin Y\}.$$

Se dice que dos conjuntos $X,\ Y$ son disjuntos si $X \bigcap Y = \emptyset$

Si C es una clase no vacía de conjuntos, se tiene que:

$$\bigcap C = \bigcap \{ X : X \in C\} = \{ u : u \in X \, para \, cada \, X \in C\}$$

Nótese que $\bigcap C$ es un conjunto (ya que es subconjunto de cualquier $X \in C$).

Otra consecuencia del Axioma de Separación, es que la clase universal V es una clase propia, ya que en caso contrario, se tendrá que:

$$S = \{ x \in V : x \notin x\}$$

sería un conjunto.

2.3.5. Axioma de Unión.

Para cualquier X existe un conjunto cuyos elementos son los elementos de los elementos de X:

$$\forall X \, \exists Y \forall u \, (u \in Y \leftrightarrow \exists z \, (z \in X \wedge u \in z))$$

por lo anterior se tiene que, para todo X existe un único conjunto:

$$Y = \{u : (\exists z \in X) \, u \in z\} = \bigcup \{ z : z \in X\}$$

la *unión* de X, a tal conjunto Y lo de notaremos por $\bigcup X$.

Ahora se puede definir la unión entre conjuntos:

$$X \bigcup Y = \bigcup \{X, Y\}, \qquad X \bigcup Y \bigcup Z = \bigcup \{X, Y, Z\} \qquad \text{etc.},$$

De manera similar se tiene:

$$\{a, b, c\} = \{a, b\} \bigcup \{c\}$$

en general:

$$\{a_1, \ldots, a_n\} = \{a_1\} \bigcup \ldots \bigcup \{a_n\}$$

Dados dos conjuntos X e Y definimos su *diferencia simétrica* como:

$$X \triangle Y = (X - Y) \bigcup (Y - X).$$

2.3.6. Axioma del conjunto de partes.

Para cualquier X existe un conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de X:

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \subset X).$$

Se dice que un conjunto U es un subconjunto de X, $U \subset X$, si:

$$\forall z (z \in U \to z \in X)$$

El conjunto de todos los subconjuntos de X,

$$\mathcal{P}(X) = \{ u : u \subset X \},$$

se llama *partes de X*.

Usando el Axioma de Partes se pueden definir otras nociones básicas de la teoría de conjuntos. Dados dos conjuntos X e Y, se define $X \times Y$, el *producto cartesiano* de X e Y, como:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\} = \{u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y)) : \exists x \exists y (u = (x, y) \wedge \phi(x, y))\}$$

donde $\phi(x, y) := (x \in X) \wedge (y \in Y)$.

Entonces $X \times Y$ es un conjunto por el Axioma de Separación. De manera general, se define el producto cartesiano de conjuntos $X_1, \ldots, X_{n+1}$ como:

$$X_1 \times \ldots \times X_{n+1} = (X_1 \times \ldots \times X_n) \times X_{n+1}$$

entonces:

$$X_1 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in X_n\}$$

Abreviado como:

$$X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\, veces}$$

Una *relación n-aria* R es un conjunto de n-tuplas. R es una relación en X si $R \subset X^n$.

En el caso de que R es binaria, tenemos que $(x, y) \in$R se escribirá como $x\ R\ y$.

Si R es una relación binaria, entonces el *dominio* de R es el conjunto:

$$dom(R) = \{u : \exists v\,(u,v) \in R\}$$

y el *rango* de R es el conjunto:

$$ran(R) = \{v : \exists u\,(u,v) \in R\}$$

Una relación binaria f es una *función* si $(x,y) \in f$ y $(x,z) \in f$ implica $y = z$; el único y tal que $(x,y) \in f$ es *el valor de f en x* se usará la notación estándar de $y = f(x)$ para representar lo anterior.

Una función f es *sobreyectiva* en X si $dom(f) = X$, es inyectiva si $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$.

El conjunto de todas las funciones de X en Y se denotará por Y^X. Es un conjunto por el axioma de separación ya que:

$$Y^X \subset \mathcal{P}(X \times Y)$$

Una relación binaria R en $X \times X$ es una relación de equivalencia, si satisface las siguientes propiedades:

1. **Reflexividad:** $(a,a) \in R$ para todo $a \in X$;
2. **Simetría:** Dados $a,b \in X$, si $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \in R$;
3. **Transitividad:** Dados $a,b,c \in X$, si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$ entonces $(a,c) \in R$.

Si R es una relación de equivalencia en X y $a \in X$, la *clase de equivalencia* de a (respecto a la relación R) es el conjunto:

$$[\,a\,]_R = \{\,b \in X : (a,b) \in R\}.$$

2.3.7. Axioma del Infinito.

Para poder enunciar el *El Axioma del Infinito*, antes se definirá que es un conjunto inductivo, en el capitulo de ordinales se dará un ejemplo.

Definición 2.3.1 Se dice que un conjunto es inductivo si:

$$\exists S(\emptyset \in S \wedge (\forall x \in S)\, x \cup \{x\} \in S)$$

Axioma del Infinito: *Existe un conjunto inductivo.*

2.3.8. Axioma de Reemplazo.

Si F es una función, entonces para todo conjunto X, tenemos que F(X) es un conjunto.

En nuestro lenguaje de la teoría de conjuntos se diría que para cada fórmula $\phi(x, y, p)$, se tendrá que la fórmula (2.1) es un axioma de reemplazo:

$$\forall x \forall y \forall z \,(\phi(x, y, p) \wedge \phi(x, z, p) \rightarrow y = z) \rightarrow \forall X \exists Y \forall y \,(y \in Y \leftrightarrow (\exists x \in X) \,\phi(x, y, p)). \quad (2.1)$$

2.3.9. Axioma de Elección.

Axioma de Elección. *Todo conjunto no vacío de conjuntos no vacíos, tiene una función selectora.*

Donde si $\mathcal{S}$ es un conjunto y $\emptyset \notin \mathcal{S}$, entonces una *función selectora* para $\mathcal{S}$ es una función f con dominio $\mathcal{S}$, tal que:

$$f(X) \in X.$$

para todo $X \in \mathcal{S}$.

El axioma de elección trae varias consecuencias; entre ellas cabe destacar:

Lema 2.1 **de Zorn:** Sea u un conjunto ordenado tal que todo subconjunto bien ordenado de u tiene una cota superior. Entonces u tiene un elemento maximal.

Definición 2.3.2 Una familia A de conjuntos es de *carácter finito* si para cada conjunto a, $a \in A$ si y sólo si cada subconjunto finito de a está en A.

Lema 2.2 (**de Tukey**): Existe un miembro maximal de cada familia no vacía de carácter finito.

Demostración : Veamos que el Lema de Zorn implica el Lema de Tukey.

Si A es de carácter finito y C es una cadena en A (es decir, un subconjunto de A totalmente ordenado por la relación $\subseteq$), entonces $\cup C$ es una cota superior de C. (Nótese que $\cup C$ está en A por ser ésta de carácter finito). Entonces existe un elemento maximal de A.

$\square$

Teorema 2.1 (**de Tychonoff**): El producto de espacios topológicos compactos es compacto con respecto a la topología producto.

Demostración : Recordemos que un espacio topológico T es compacto si para toda familia b de subconjuntos de T con la propiedad de intersección finita se tiene que $\cap\{\bar{B} : B \in b\} \neq \emptyset$ (Aquí, B^* es la clausura de B; y recordemos que una colección de conjuntos tiene la propiedad de intersección finita si toda subcolección finita tiene intersección no vacía).

Sea $\{T_i : i \in I\}$ una colección de espacios topológicos compactos, y sea T el espacio producto. Sea b una familia de subconjuntos de T con la propiedad de intersección finita. Como la colección de familias de subconjuntos de T con la propiedad de intersección finita es de carácter finita, por el Lema de Tukey, se puede suponer que b es maximal con la propiedad de intersección finita.

Por ser b maximal, todo subconjunto de T que contiene un miembro de b está en B, y la intersección de dos miembros de b está también en b. Y además, si un conjunto intersecta a todo miembro de b, entonces está en b.

Dado $i \in I$, el conjunto de proyecciones de miembros de b al espacio T_i tiene la propiedad de intersección finita, por lo tanto se puede tomar un punto x_i en la intersección de las clausuras de esas proyecciones $\cap\{\overline{P_i[B]} : B \in b\}$.

Sea ahora $x = \langle x_i : i \in I\rangle$.

Veamos que $x \in \cap\{B : B \in b\}$. Cada vecindad U de x_i intersecta a $P_i[B]$ para cada B en b, por lo que $P_i^{-1}[U] \cap B \neq \emptyset$ para cada $B \in b$. De aquí que $P_i^{-1}[U] \in b$, y como b tiene la propiedad de la intersección finita, intersecciones finitas de conjuntos de ese tipo están en b.

Entonces, toda vecindad de x perteneciente a la base de la topología producto es un elemento de b y por eso intersecta a todo elemento de b. Entonces, se puede concluir que $x \in B^*$ para cada B de b.

$\square$

Capítulo 3

Ordinales:

En este capítulo se presenta una introducción de los números ordinales, basado en las referencias [4],[7] y [8].

3.1. Órdenes.

Definición 3.1.1 Una relación binaria R en un conjunto P, es un *orden parcial(débil)* si:

i) $\forall x \in P\,(x\,R\,x)$;

ii) $\forall x, y \in P\,(x\,R\,y \wedge y\,R\,x \rightarrow x = y)$;

iii) $\forall x, y, z \in P\,(x\,R\,y \wedge y\,R\,z \rightarrow x\,R\,z)$.

(Esto es, R es una relación del tipo $\leq$).

Se dice que R es una relación de orden parcial *estricto* en A si:

i) $\forall x \in P\,\neg\,(x\,R\,x)$;

ii) $\forall x, y \in P\,(x\,R\,y \rightarrow \neg\,y\,R\,x)$;

iii) $\forall x, y, z \in P\,(x\,R\,y \wedge y\,R\,z \rightarrow x\,R\,z)$.

(En este caso se tiene una relación del tipo $<$).

Ejemplos:

1. $P = \mathbb{R}$ y $R = <$ (el orden usual en los números reales)

2. $P = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y R es el orden dado por $(n, m)\, R\, (p, q) \iff n < p \vee (n = p \wedge m < q)$

Definición 3.1.2 Si $(P, <)$ es un conjunto parcialmente ordenado, X es un subconjunto no vacío de P, y $a \in P$, entonces:

- a es un elemento *maximal* de X si $a \in X$ y $(\forall x \in X)\, a \not< x$;
- a es un elemento *minimal* de X si $a \in X$ y $(\forall x \in X)\, x \not< a$;
- a es el *menor elemento* de X si $a \in X$ y $(\forall x \in X)(x = a \vee a < x)$;
- a es el *mayor elemento* de X si $a \in X$ y $(\forall x \in X)(x = a \vee a < x)$;
- a es una *cota inferior* de X si $(\forall x \in X)(x = a \vee a < x)$;
- a es una *cota superior* de X si $(\forall x \in X)(x = a \vee x < a)$;
- a es el *supremo* de X si a es el menor de las cotas superiores de X;
- a es el *ínfimo* de X si a es la mayor de las cotas inferiores de X;

Si $(P, <)$ y $(Q, <)$ son conjuntos parcialmente ordenados y $f : P \to Q$, entonces f *preserva el orden* si $x < y$ implica $f(x) < f(y)$.

Definición 3.1.3 Dos conjuntos ordenados *(P,<)* y $(Q, <)$ son *isomorfos* si existe una biyección $f : P \to Q$ tal que:

$$x < y \iff f(x) < f(y)$$

para todo par de elementos $x, y \in P$.

La función f es un *isomorfismo* de P en Q. Si el isomorfismo es de P en el mismo, se dice que f es un *automorfismo* de $(P, <)$.

3.2. Buen Orden.

Definición 3.2.1 Un orden parcial $<$ sobre un conjunto P es un *buen orden*, si todo subconjunto no vacío de P tiene un menor elemento. En este caso diremos que P es un conjunto bien ordenado.

Lema 3.1 Si $(W, <)$ es un conjunto bien ordenado y $f : W \to W$ preserva el orden, entonces $f(x) \geq x$ para cada $x \in W$.

Demostración : Si se asume que el conjunto $X = \{x \in W : f(x) < x\}$ es distinto de vacío, por ser W un conjunto bien ordenado y $X \subset W$, existe $z \in X$ tal que z es el menor elemento de X. Si $w = f(z)$ entonces $w < z$; como f preserva el orden se tendrá que $f(w) < f(z)$ de donde $f(w) < w$ por tanto X no posee primer elemento, lo que es una contradicción ya que $X \subset W$ y W está bien ordenado; de donde $f(x) \geq x$. $\square$

Corolario 3.1 El único automorfismo de un conjunto bien ordenado es la identidad.

Demostración : Sea $f : W \to W$ un automorfismo. Como f y f^{-1} preservan el orden se tiene por lema (3.1) que $f(x) \geq x$ y $f^{-1}(x) \geq x$ respectivamente, de donde $f(x) = x$ que es lo que se quería demostrar. $\square$

Corolario 3.2 Si dos conjuntos bien ordenados W_1, W_2 son isomorfos, entonces el isomorfismo de W_1 en W_2 es único.

Demostración : Sean f, g dos isomorfismos de W_1 en W_2. Entonces $g^{-1} \circ f$ es un automorfismo de W_1. Por (3.1) se tendrá que $g^{-1} \circ f$ es igual a la identidad de donde $g = f$. $\square$

Definición 3.2.2 Si $\mathcal{S} \subset W$ es *segmento inicial propio*, existe $u \in W$ tal que $\mathcal{S} = \{x \in W : x < u\}$. Es decir , el *segmento inicial* de W esta determinado o dado por u.

Lema 3.2 Ningún conjunto bien ordenado W es isomorfo a un segmento inicial propio del mismo.

Demostración : Sea S un segmento inicial propio de W y f un isomorfismo de W en S. Tomando $ran(f) = \{x : x < u\} = \mathcal{S}$, con $u \in W$, se tendrá que $f(u) < u$, que es una contradicción con (3.1). Por lo que S no es isomorfo a W. $\square$

Teorema 3.1 Si W_1 y W_2 son conjuntos bien ordenados, entonces se satisface solo uno de los siguientes casos:

i) W_1 es isomorfo a W_2;

ii) W_1 es isomorfo a un segmento inicial de W_2;

iii) W_2 es isomorfo a un segmento inicial de W_1.

Demostración : Para $u_i \in W_i$ con $i = 1, 2$, se tomará a $W_i(u_i)$ como el segmento inicial de W_i dado u_i. Sea:

$$f = \{ (x, y) \in W_1 \times W_2 : W_1(x) \text{ es isomorfo a } W_2(y)\}$$

Veamos que f es una función (de manera similar se demuestra que f es inyectiva), es decir, si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$ entonces $y = z$. Sea f el isomorfismo de $W_1(x)$ a $W_2(y)$ y g el isomorfismo de $W_1(x)$ a $W_2(z)$, si suponemos que $z \neq y$ y sin perdida de generalidad se toma a $y < z$ tendríamos que $g^{-1} \circ f$ es un isomorfismo entre $W_2(z)$ y $W_2(y)$ lo que es una contradicción ya que $W_2(z)$ es un segmento inicial de $W_2(y)$ y por lema (3.2) ningún conjunto bien ordenado es isomorfo a un segmento inicial de si mismo, de donde $y = z$.

Para ver que f preserva el orden, sea h un isomorfismo entre $W_1(x)$ en $W_2(y)$, y $z < x$, entonces $W_1(z)$ es isomorfo a $W_2(h(z))$.

- Si $dom(f) = W_1$ y $ran(f) = W_2$ se tiene el caso (i).
- Si $ran(f) \neq W_2$, sea y_0 el menor elemento de $W_2 - ran(f)$, entonces $ran(f) = W_2(y_0) = \{y \in W_2 : y < y_0\}$ esto es cierto ya que si $y_1 < y_2$ y $y_2 \in ran(f)$ entonces $y_1 \in ran(f)$. Veamos que $W_1 = dom(f)$, Supóngase lo contrario, sea x_0 el menor elemento de $W_1 - dom(f)$, entonces $W_1(x_0)$ es isomorfo a $W_2(y_0)$ de donde $(x_0, y_0) \in f$, lo que es una contradicción ya que $y_0 \notin ran(f)$, por lo tanto $dom(f) = W_1$.
- De manera similar tomando $dom(f) \neq W_1$, se tendrá que el caso (iii) se satisface.

Por (3.2) se tiene que los tres casos son excluyentes.

□

Si W_1 y W_2 son isomorfos, se dice que son del mismo *tipo de orden.*

3.3. Números Ordinales.

Definición 3.3.1 Decimos que un conjunto T es *transitivo*, si todo elemento de T es un subconjunto de T.

Definición 3.3.2 Un conjunto es un *número ordinal* si es transitivo y está bien ordenado por $\in$.

Lema 3.3 (i) $0 = \emptyset$ es un ordinal.

(ii) Si $\alpha \in \beta$ es un y β es un ordinal, entonces α es un ordinal.

(iii) Si $\alpha \neq \beta$ son ordinales y $\alpha \subset \beta$, entonces $\alpha \in \beta$.

(iv) si α, β son ordinales, entonces pasa una de las siguientes $\alpha \subset \beta$, $\beta \subset \alpha$ o $\alpha = \beta$.

Demostración : Por definición se tiene (i) y (ii).

(iii) Si $\alpha \subset \beta$, sea δ el menor elemento del conjunto $\beta - \alpha$. Como α es transitivo, se sigue que α es un segmento inicial de β dado por δ. Entonces $\alpha = \{\xi \in \beta : \xi < \delta\} = \delta$, y por lo tanto $\alpha \in \beta$.

(iv) Es claro que, $\alpha \cap \beta$ es un ordinal, sea $\delta = \alpha \cap \beta$. Entonces $\delta = \alpha$ o $\delta = beta$, ya que de lo contrario, $\delta \in \alpha$, y $\delta \in \beta$, por (iii). De donde $\delta \in \delta$, lo que es una contradicción con la definición de ordinal. □

Teorema 3.2 Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.

Demostración : Dado un conjunto $\mathcal{W}$ bien ordenado, se obtendrá un ordinal que es isomorfo a el de la siguiente manera: Definiendo a $F(x) = \alpha$ si α es isomorfo al segmento inicial de $\mathcal{W}$ dado por x. Si tal α existe, entonces es único. Entonces por el axioma de reemplazo, $F(\mathcal{W})$ es un conjunto. Para cada $x \in \mathcal{W}$, tal α existe (de otra manera considérese el menor elemento de x para que tal alpha no exista). Si δ es el menor $\delta \neq F(\mathcal{W})$, entonces $F(\mathcal{W}) = \delta$ y se tendrá un isomorfismo de $\mathcal{W}$ en δ.

La unicidad viene dada por el lema (3.2) □

Si $\alpha = \beta + 1$, entonces α es un *ordinal sucesor.* Si α no es un ordinal sucesor, entonces a $\alpha = sup\{\beta : \beta < \alpha\} = \cup\alpha$, se le dice un *ordinal límite.*

Definición 3.3.3 Se dice que el menor *ordinal límite* distinto del 0 es ω. Los ordinales menores que ω, se les llama *ordinales finitos*, o *números naturales.*

Específicamente se tendrá que:

$$0 = \emptyset,\ 1 = \{\emptyset\},\ 2 = \{0, 1\},\ 3 = \{0, 1, 2\}\ \ etc.$$

Un conjunto X es *finito* si existe una función 1-1 entre X y algún $n \in \omega$. X es infinito si no es finito.

Teorema 3.3 **(Inducción Transfinita).** Sea $\mathcal{C}$ una clase de ordinales y asumamos que:

(i) $0 \in \mathcal{C}$;

(ii) si $\alpha \in \mathcal{C}$, entonces $\alpha + 1 \in \mathcal{C}$;

(iii) si α es un ordinal límite distinto de cero y $\beta \in \mathcal{C}$ para todo $\beta < \alpha$, entonces $\alpha \in \mathcal{C}$.

Entonces $\mathcal{C}$ es la clase de todos los ordinales.

Teorema 3.4 **(Recursión Transfinita).** Si F es una relación funcional, para todo ordinal α y todo conjunto a, existe una única función definida en $\{\beta :\ \beta < \alpha\}$ tal que

$f(0) = a$.

$f(\beta) = F(f \restriction \beta)$ para $0 < \beta < \alpha$

Capítulo 4

Números Cardinales

4.1. Conjuntos Equipotentes

Para orientar la idea de cuándo dos conjuntos A y B poseen la misma cantidad de elementos. Se verá el siguiente ejemplo: Si se quiere determinar que el conjunto de todas las personas que van para un teatro tiene el mismo número de elementos que el conjunto de todas las butacas que hay en éste, sin necesidad de tener que chequear cuantos hay en cada uno basta con ver que a cada persona se le puede asignar una y solo una butaca y que cada butaca está ocupada por una y solo una persona; de esta manera, sin necesidad de contarlos a todos se podrá determinar si tienen la misma cantidad de elementos. Esa idea tiene más sentido, si ahora en vez de tomar finitas personas y butacas se toman infinitas, sería imposible contarlas a cada uno, pero si es posible determinar la relación anterior. Véase las referencias [4], [7] y [8].

Con lo anterior se da paso a la siguiente definición:

Definición 4.1.1 Los conjuntos A y B son *equipotentes* si existe una función biyectiva de A en B. Se denota esto por $A \backsim B$.

Sean los siguientes ejemplos:

- Los conjuntos $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y $B = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ son equipotentes ya que; sea $f(\emptyset) = \{\{\emptyset\}\}$, $f(\{\emptyset\}) = \{\{\{\emptyset\}\}\}$.
- $\{\emptyset\}$ y $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ no son equipotentes.
- El conjunto de todos los números reales positivos es equipotentes al conjunto de todos los números reales negativos; sea $f(x) = -x$ para todos los números reales positivos.

Teorema 4.1 Se verán las siguientes propiedades:

a) A es equipotente a A.

b) Si A es equipotente a B, entonces B es equipotente a A.

c) Si A es equipotente a B y B es equipotente a C, entonces A es equipotente a C.

Demostración : a) La identidad es una biyección de A en A.

b) Si f es una biyección de A en B, entonces f^{-1} es una biyección de B en A.

c) Si f es una biyección de A en B y g es una biyección de B en C, entonces $g \circ f$ es una biyección de A en C.

□

Definición 4.1.2 Escribiremos $A \lesssim B$ si existe una función inyectiva de A en B y $A \prec B$ si $A \lesssim B$ y $A \nsim B$.

Teorema 4.2 **(Cantor)**. Para todo conjunto X, $X \prec \mathcal{P}(X)$

Demostración : La función $f(x) = \{x\}$ es claramente una inyección de X en $\mathcal{P}(X)$. Falta por probar que no existe una función sobreyectiva de X en $\mathcal{P}(X)$.

Sea f una función inyectiva de X en $\mathcal{P}(X)$. Consideremos el conjunto $S = \{x \in X : x \notin f(x)\}$, Veamos que S no está en el rango de f. Supongamos que $S = f(z)$ para algún $z \in X$. Por definición de S, $z \in S$ si y solo si $z \notin f(z)$ de donde se tendrá que $z \in S$ si y solo si $z \notin S$, lo que es una contradicción. Esto prueba que f no puede ser sobreyectiva, de donde $X \prec \mathcal{P}(X)$. □

Teorema 4.3 **(Schroeder-Bernstein)**. Si $A \lesssim B$ y $B \lesssim A$, entonces $A \backsim B$

Demostración : Sean $f : A \to B$ y $g : A \to B$ inyectivas.

Claramente, B es equipotente con $Ran(g) \subset A$ y $g \circ f$ es una inyección de A en $Ran(g)$, luego $|A| \leq |Ran(g)|$. □

Entonces, para demostrar el teorema basta probar el siguiente lema:

Lema 4.1 Si $C \subset A$ y $A \lesssim C$ entonces $A \backsim C$

Demostración : Sea $h : A \to C$ una inyección.

Si $A_0 = A - C$, $A_1 = h[A_0]$, y en general $A_{n+1} = h[A_n]$ ($h[B] = \{x : x = h(a)$ para algún $a \in B\}$), y se define $F : A \to C$ de la manera siguiente: Dado $a \in A$,

$$F(a) = \begin{cases} a, & \text{si } a \notin \bigcup_n A_n \\ h(a), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que F es una biyección:

(1) F es inyectiva; es decir si $a \neq b$ entonces $F(a) \neq F(b)$.

Hay varios casos que considerar; Sean $a \neq b$ elementos de A.

(i) Si $a \notin \cup A_n$ y $b \notin \cup A_n$ entonces, $F(a) = a$ y $F(b) = b$; como $a \neq b$, entonces $F(a) \neq F(b)$.

(ii) Si $a \notin \cup A_n$ y $b \in \cup A_n$ entonces $F(a) = a$ y $F(b) = h(b)$. Se tendrá que $a \notin \cup A_n$ y $h(b) \in \cup A_n$, entonces $F(a) \neq F(b)$.

(iii) Si $a \in \cup A_n$ y $b \in \cup A_n$ se tendrá $F(a) = h(a)$ y $F(b) = h(b)$ pero como h es inyectiva, $h(a) \neq h(b)$.

(2) F es sobreyectiva: es decir, para cada $c \in C$ existe un $a \in A$ tal que $F(a) = c$.

Sea $c \in C$, si $c \notin \cup A_n$, entonces $F(c) = c$. Si en cambio, $c \in \cup A_n$, se observará que como $c \in C$, $c \notin A_0 = A - C$, y $c \in A_p$ para algún $1 \leq p$. Por lo tanto existe $d \in A_{p-1}$ tal que $F(d) = h(d) = c$.

□

4.2. Cardinales

Definición 4.2.1 Un ordinal α es un *cardinal* si no es equipotente a ningún ordinal menor (es decir, no es equipotente a ninguno de sus elementos).

Ejemplo: Todo ordinal finito es un cardinal. ω es un cardinal, pero $\omega + 1$, $\omega + n$ ($n \in \omega$), $\omega + \omega$, $\omega \cdot \omega$, ω^ω no son cardinales ya que cada uno de éstos es equipotente a ω.

Si un conjunto x se puede bien ordenar, entonces existe un único cardinal α equipotente a x. A este cardinal se le llama *cardinalidad* de x, que denotaremos por $|x|$. En Efecto, si x está bien ordenado, entonces su tipo de orden es el único ordinal isomorfo a x con ese orden, pero todo ordinal β es equipotente a un único cardinal, el menor ordinal equipotente a β.

Lema 4.2 Si $|A| = \kappa$, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^\kappa$.

Demostración : Para todo $X \subset A$, sea C_χ la función definida por 1 si $x \in X$ y 0 si $x \in A - X$. La función $f : \mathcal{P}(A) \to \{0, 1\}$ es una correspondencia biyectiva entre $\mathcal{P}(A)$ y $\{0, 1\}^A$ □

El **Teorema de Cantor** ahora se podrá formular de la siguiente manera:

$$\kappa < 2^\kappa \text{ para todo cardinal } \kappa.$$

Todo número natural es un cardinal (un cardinal finito); y si S es un conjunto finito entonces $|S| = n$ para algún $n \in \omega$.

El ordinal ω es el menor cardinal infinito.

Denotaremos a los cardinales infinitos con la letra $\aleph$ con subíndices.

4.3. Aritmética de Cardinales.

A continuación se definirán la suma, producto y exponenciación de cardinales, y se enunciara algunas propiedades relevantes de estos.

Definición 4.3.1 La *Suma de Cardinales* se definirá de la siguiente manera:

Dados cardinales κ y λ, se dice que $\kappa + \lambda = \mu$ si existen conjuntos disjuntos A y B tales que $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$ y $\mu = |A \cup B|$.

Definición 4.3.2 El *Producto de Cardinales* se definirá de la siguiente manera:

Se dirá que $\kappa \cdot \lambda = \mu$ si existen conjuntos A y B tales que $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$ y $\mu = |A \times B|$.

Definición 4.3.3 La *Exponenciación de Cardinales* se definirá de la siguiente manera:

$\kappa^\lambda = \mu$ si existen conjuntos A y B tales que $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$ y $\mu = |A^B|$.

En el siguiente teorema daremos algunas de las propiedades de estas operaciones:

Teorema 4.4 Sean κ, λ, μ cardinales, y sea I un conjunto.

1.- $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$, $\lambda \cdot \kappa = \lambda \cdot \kappa$.

2.- $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$, $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa + \cdot\lambda) \cdot \mu$.

3.- Si $\kappa \leq \lambda$, entonces $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$ y también $\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$.

4.- $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.

5.- Para todo $i \in I$ $\kappa_i = \kappa$ entonces $\sum_{i \in I} \kappa_i = |I| \cdot \kappa$.

6.- $2^{|I|} = |\mathcal{P}(I)|$.

7.- $\kappa^{\lambda + \mu} = \kappa^{\lambda} + \kappa^{\mu}$.

8.- $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$.

4.4. Cofinalidad.

Sea $\alpha > 0$ un ordinal límite. Se dice que una sucesión creciente $\langle \alpha_\xi : \xi < \beta \rangle$, tal que$\beta$ es un ordinal límite, es *cofinal* en α si el *lím*$_{\xi \to \beta}\, \alpha_\xi = \alpha$. De manera similar $A \subset \alpha$ es *cofinal* en α, si $sup\, A = \alpha$. Si α es un ordinal límite infinito, la cofinalidad de α es:

$$cof(\alpha) = \text{ el menor ordinal límite } \beta \text{ tal que existe una sucesión creciente } \langle \alpha_\xi : \xi < \beta \rangle \text{ con } \\ lím_{\xi \to \beta}\, \alpha_\xi = \alpha.$$

Es claro que $cof(\alpha)$ es un ordinal límite, y que $cof(\alpha) \leq \alpha$.

Lema 4.3 $cof(cof(\alpha)) = cof(\alpha)$

Demostración : Si $\langle \alpha_\xi : \xi < \beta \rangle$ es cofinal en α y $\langle \xi(\nu) : \nu < \delta \rangle$ es cofinal en β, entonces $\langle \alpha_{\xi(\nu)} : \nu < \delta \rangle$, es cofinal con α.

$\square$

Definición 4.4.1 Se dice que el cardinal infinito κ es *regular* si $cof(\kappa) = \kappa$, si $cof(\kappa) < \kappa$, entonces, κ es singular.

Lema 4.4 Un cardinal infinito κ es singular si y solo si existe un cardinal $\lambda < \kappa$ y una familia $\{S_\xi : \xi < \lambda\}$ de subconjuntos de κ tal que $|S_\xi| < \kappa$ para cada $\xi < \lambda$, y $\kappa = \cup_{\xi<\lambda} S_\xi$. El menor cardinal λ que satisface tal condición es $cof(\kappa)$.

Demostración : Existe una sucesión creciente $\langle \alpha_\xi : \xi < cof(\kappa)\rangle$ tal que $lím_{\xi\to cof(\kappa)}\alpha_\xi = \kappa$. Sea $\lambda = cof(\kappa)$, y $S_\xi = \alpha_\xi$ para todo $\xi < \lambda$.

Supóngase que se satisface la condición dada al inicio, y sea $\lambda < \kappa$ el menor cardinal para el que existe una familia $\{S_\xi : \xi < \lambda\}$ tal que $\kappa = \cup_{\xi<\lambda} S_\xi$ y $|S_\xi| < \kappa$ para cada $\xi < \lambda$. Para todo $\xi < \lambda$, sea β_ξ el tipo de orden de $\cup_{\nu<\xi} S_\nu$. La sucesión $\langle \beta_\xi : \xi < \lambda\rangle$ es no decreciente, por minimalidad de λ, $\beta_\xi < \kappa$ para todo $\xi < \lambda$. Se debe demostrar que $lím_\xi \beta_\xi = \kappa$, de esta manera se tendrá que $cof(\kappa) \leq \lambda$.

Sea $\beta =lím_{\xi\to\lambda}\beta_\xi$. Existe una función 1-1 de $\kappa = \cup_{\xi<\lambda} S_\xi$ en $\lambda \times \beta$: Si $\alpha \in \kappa$, sea $f(\alpha) = (\xi, \gamma)$, donde ξ es el menor ξ tal que $\alpha \in S_\xi$ y γ es el tipo de orden de $S_\xi \cap \alpha$. Como $\lambda < \kappa$ y $|\lambda \times \beta| = \lambda \cdot |\beta|$, se sigue que $\beta = \kappa$.

□

Lema 4.5 Sea H un conjunto cuyo cardinal es κ entonces existen conjuntos $H_\xi \subset B$ con cardinal menor que κ tal que $H = \bigcup_{\xi<cof(\kappa)} H_\xi$.

Demostración : Por definición de cardinalidad, existe una función $f : \kappa \to H$ biyectiva, por lema 4.4 tenemos que $\kappa = \bigcup_{\xi<cof(\kappa)}\{\kappa_\xi : \kappa_\xi < \kappa\}$ tomando los $H_\xi = f \restriction \kappa_\xi$ se tendrá que $H = \bigcup_{\xi<cof(\kappa)} H_\xi$ que es lo que se quiere demostrar. □

4.5. Números Reales.

Teorema 4.5 El conjunto de todos los números reales es no numerable.

Demostración : Recordemos antes que cada número real tiene una única expansion decimal es decir, si x es un número real, $x = N,\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5 \ldots$. Supongamos entonces que $\mathbb{R}$ es numerable, es decir existe una biyección f entre este y los números naturales. Usando f, reordenamos los elementos de $\mathbb{R}$ de la siguiente forma (vamos a tomar en consideración a los $x_{i\,i}$ de este arreglo):

$$\begin{array}{lcllllll}
f(1) & = & N_1 & x_{1\,1} & x_{1\,2} & x_{1\,3} & x_{1\,4} & x_{1\,5}\ldots \\
f(2) & = & N_2 & x_{2\,1} & x_{2\,2} & x_{2\,3} & x_{2\,4} & x_{2\,5}\ldots \\
f(3) & = & N_3 & x_{3\,1} & x_{3\,2} & x_{3\,3} & x_{3\,4} & x_{3\,5}\ldots \\
f(4) & = & N_4 & x_{4\,1} & x_{4\,2} & x_{4\,3} & x_{4\,4} & x_{4\,5}\ldots
\end{array}$$

Para cada i, sea $y_i \neq x_{i\,i}$ entonces tómese el número $y = 0, y_1\, y_2\, y_3 \ldots$ véase que $y \neq f(1)$ ya que $x_{1\,1} \neq y_{1\,1}$ de igual modo $y \neq f(n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ ya que $x_{n\,n} \neq y_n$ por tanto existe un número real que no pertenece a nuestro arreglo, de donde se puede concluir que $\mathbb{R}$ es no numerable.

$\square$

4.5.1. La Cardinalidad del Continuo.

Sea $\mathfrak{c}$ el cardinal del conjunto $\mathbb{R}$. Como el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es denso en $\mathbb{R}$, todo número real r es igual al $sup\{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$ y como $\mathbb{Q}$ es numerable nos queda que $\mathfrak{c} \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| \leq 2^{\aleph_0}$.

Sea **C** (el *Conjunto de Cantor*), el conjunto de todos los números reales de la forma $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$, donde cada $a_n = 0$ o 2. Obtenemos a **C** removiendo del intervalo cerrado $[0, 1]$, los intervalos abiertos $(1/3, 2/3)$, $(1/9, 2/9)$, $(7/9, 8/9)$, etc. **C** es 1-1 con el conjunto de todas las $\omega-$sucesiones de ceros y dos, de donde $|\mathbf{C}| = 2^{\aleph_0}$.

Por lo tanto $\mathfrak{c} \geq 2^{\aleph_0}$, usando el Teorema de Schroeder-Bernstein podemos concluir que:

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}.$$

Por el Teorema de Cantor, tenemos que $\mathfrak{c} > \aleph_0$. Cantor conjeturo que cualquier conjunto de números reales o es numerable o tiene la cardinalidad del continuo. En ZFC, todo cardinal infinito es un $\aleph_\alpha$ para algún α, y por tanto $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$. De donde la conjetura de cantor se convierte en la siguiente sentencia:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

conocida como la *Hipótesis del Continuo* (HC).

En otras palabras, la HC nos dice que todo conjunto de numeros reales es finito, numerable o tiene la cardinalidad de los números reales.

La *hipótesis generalizada del continuo* (HGC) es la afirmación, para todo α

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

En 1936, Kurt Gödel demostró que si la teoría de ZF es consistente, entonces la negación de la HC no es demostrable a partir de los axiomas de esa teoría. Esto lo hizo construyendo una clase, llamada la clase de los conjuntos constructibles y denotada por L, que tiene la propiedad siguiente: si suponemos que los axiomas de ZF valen en nuestro universo de conjuntos, entonces también valen en L, y más aun, en L también vale la HGC y el Axioma de Elección. La clase de los conjuntos constructibles tiene, por decirlo de una manera poco precisa pero quizás sugestiva, solamente aquellos conjuntos que es necesario tener para poder satisfacer los axiomas. En particular, allí solo hay $\aleph_1$ subconjuntos de ω, y por lo tanto esa cantidad de números reales.

Mucho después, en 1964, Paul Cohen demostró que la HC tampoco es demostrable a partir de los axiomas de ZFC, con esto se completó la demostración de la indecidibilidad de la HC en la teoría de ZFC. Cohen también demostró que el Axioma de Elección es indemostrable en ZF. La vía que uso Cohen para obtener sus resultados fue también la de construir un modelo apropiado de ZF, y para ello desarrollo una técnica llamada *forcing* que ha sido una de las herramientas más útiles para el desarrollo de la teoría de conjuntos durante la segunda mitad del siglo.

Capítulo 5

Funciones Crecientes:

En este capítulo se define lo que son las familias dominantes y no acotadas, se establecerán las relaciones combinatorias que existen entre sus cardinales característicos (ver introducción).

También se estudiarán las condiciones necesarias que debe satisfacer ω^ω para que se pueda obtener la igualdad de estos cardinales. Para complementar el estudio de estos cardinales investigaremos la relación de estos con el $\sigma-$*ideal* generado por los subconjuntos compactos de ω^ω que llamaremos $\mathcal{K}_\sigma$.

Los resultados de este trabajo serán en $ZFC + \neg HC$.

Este capítulo se basa en las referencias [1], [2], [3] y [7].

5.1. Familias Dominantes y No Acotadas

A continuación se presentarán los dos conceptos base de este capítulo:

Definición 5.1.1 Se dice que una familia $\mathcal{D} \subset \omega^\omega$ es una *familia dominante*, si para todo $f \in \omega^\omega$ existe $g \in \mathcal{D}$ tal que $f \leq^* g$. Denotaremos al cardinal característico de las familias dominantes como:

$$\mathfrak{d} = min\{\,|\mathcal{D}| \,:\, \mathcal{D} \text{ es una familia dominante}\}$$

Definición 5.1.2 Se dice que una familia $\mathcal{B} \subset \omega^\omega$ es una *familia no acotada* si no existe $g \in \omega^\omega$ tal que $g \,^* \geq\, f$ para todo $f \in \mathcal{B}$. Denotaremos al cardinal característico de las familias no acotadas como:

$$\mathfrak{b} = min\{\,|\mathcal{B}| \,:\, \mathcal{B} \text{ es una familia no acotada}\}$$

El siguiente lema establece la relación entre (5.1.1) y (5.1.2). También servirá para determinar la primera relación que se dará en este trabajo entre sus cardinales.

Lema 5.1 Toda familia dominante es una familia no acotada.

Demostración : Sea $\mathcal{D}$ una familia dominante, supongamos que es acotada. Entonces existe $g \in \omega^\omega$ tal que $g \ ^* \geq \ f$ para todo $f \in \mathcal{D}$, como $\mathcal{D}$ es una familia dominante existe $h \in \mathcal{D}$ tal que $g + 1 \leq^* \ h$ por tanto $g \leq^* \ h$ de donde g no acota a $\mathcal{D}$ lo que es una contradicción.

□

Un detalle interesante es que de haberse tomado la relación de orden "para todo" es decir, $f \leq g$ si $\forall\, x\, (f(x) \ \leq \ g(x))$ se tendría que $\mathfrak{b}$ sería numerable, esto se debe a que la familia de funciones constantes no sería acotada por algún $g \in \omega^\omega$. Cabe destacar que $\mathfrak{d}$ seguiría manteniéndose, ya que con este nuevo orden, cualquier familia dominante $\mathcal{D}$ seguiría siendo dominante. Solo bastaría hacer modificaciones finitas a cada uno de los elementos de $\mathcal{D}$ para conseguir la relación deseada. En el lema que se verá a continuación se demostrará que al usar el orden $\leq^*$ se tendrá que $\mathfrak{b} \ > \ \aleph_0$.

Lema 5.2 Toda familia numerable $\mathcal{F} \subset \omega^\omega$, es acotada.

Demostración : Sea $\mathcal{F} \ = \ \{f_0,\, f_1,\, \ldots\}$ se definirá a $g \in \omega^\omega$ como $g(n) \ = \ max\{f_k(n) \ : \ k \ \leq \ n\}$, veamos que $f_k \leq^* g$ para todo $f_k \in \mathcal{F}$, sea $f_{k_0} \in \mathcal{F}$ tomando $m = k_0$; se tendrá que si $m \leq n$ entonces $f_{k_0}(n) \leq \ max\{f_k(n) : \ k \leq n\}$ de donde $f_{k_0} \leq^* g$. Esto demuestra que $\mathcal{F}$ es acotada.

□

Por los lemas anteriores se puede concluir que $\aleph_1 \ \leq \ \mathfrak{b} \leq \ \mathfrak{d}$.

De igual manera veremos en el siguiente teorema, que se puede establecer una relación entre estos cardinales y sus respectivas cofinalidades:

Teorema 5.1 Los cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$ se encuentran relacionados de la siguiente manera:

$$\aleph_1 \leq \ cof(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \leq \ cof(\mathfrak{d}) \leq \ \mathfrak{d} \leq \ \mathfrak{c}$$

Demostración : En el lema (5.2) se vio que toda familia numerable es acotada, por tanto $\aleph_1 \leq \ \mathfrak{b}$.

Veamos que $cof(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$:

Sea $\mathcal{B}$ una familia no acotada de cardinal $\mathfrak{b}$, por lema 4.5 se tiene que para todo $\xi < cof(\mathfrak{b})$ si $B_\xi \subset \mathcal{B}$ y $|B_\xi| < \mathfrak{b}$ entonces $\mathcal{B} = \bigcup B_\xi$.

Como cada B_ξ tiene cardinal menor que $\mathfrak{b}$ entonces dado B_ξ existe $f_\xi \in \omega^\omega$ que lo domine.

Sea $G = \{f_\xi : f_\xi$ domina a $B_\xi\}$, veamos que G es una familia no acotada: Supongamos que no lo es, es decir existe $h \in \omega^\omega$ que domina a G, pero de ser esto cierto, entonces h domina a cada B_ξ y por tanto domina a la unión es decir a $\mathcal{B}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $cof(\mathfrak{b}) \geq \mathfrak{b}$, como por definición tenemos que $cof(\mathfrak{b}) \leq \mathfrak{d}$ entonces se puede concluir que $cof(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$.

Veamos ahora que $\mathfrak{b} \leq cof(\mathfrak{d})$:

Sea $\mathcal{D}$ una familia dominante de cardinalidad $\mathfrak{d}$, por lema 4.5 se tiene que para todo $\xi < cof(\mathfrak{d})$ si $D_\xi \subset \mathcal{D}$ y $|D_\xi| < \mathfrak{d}$ entonces $\mathcal{D} = \bigcup D_\xi$.

Como cada D_ξ tiene cardinal menor que $\mathfrak{d}$, entonces dado un D_ξ existe un $f_\xi \in \omega^\omega$ tal que este no se encuentra dominado por ningún $g \in D_\xi$.

Tómese $G = \{f_\xi : f_\xi \text{ no sea dominado por } D_\xi\}$, veamos que G es una familia no acotada: Supongamos que no lo es, es decir existe $h \in \omega^\omega$ que domina a G.

Ahora veamos que h no es dominado por $\mathcal{D}$, para esto supongamos que existe $g \in \mathcal{D}$ que domina a h, como $g \in \mathcal{D}$ entonces existe $\xi < cof(\mathfrak{d})$ tal que $g \in D_\xi$, pero para D_ξ se sabe que existe $f \in \omega^\omega$ tal que $f \not\leq^* g$ para todo $g \in D_\xi$ a su vez por construcción $f \leq^* h$ y como $h \leq^* g$ entonces $f \leq^* g$, lo que es una contradicción de donde h no es dominado por $\mathcal{D}$, pero $\mathcal{D}$ es una familia dominante por lo tanto hay otra contradicción pero esta vez con el hecho de que h puede acotar a G, de donde se concluye que G es una familia de funciones no acotadas es decir $\mathfrak{b} \leq cof(\mathfrak{d})$. $\square$

Haciendo uso de [12], la *técnica de forcing* y asumiendo *la hipótesis generalizada del continuo* (GCH) se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 5.2 Asumiendo GCH, sea $\mathfrak{b}$', $\mathfrak{d}$' y $\mathfrak{c}$' cualquiera de los tres cardinales que satisfacen que:

$$\aleph_1 \leq cof(\mathfrak{b}') = \mathfrak{b}' \leq cof(\mathfrak{d}') \leq \mathfrak{d}' \leq \mathfrak{c}', \text{ y } cof(\mathfrak{c}') > \aleph_0.$$

Entonces existe una extension del universo que satisface que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}'$ y $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$.

Definición 5.1.3 Una *escala* en ω^ω es una familia dominante bien ordenada por $\leq^*$.

Teorema 5.3 $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ si y solo si existe una *escala* en ω^ω.

Demostración : Sea $\mathcal{D} = \{f_\xi : \xi < \mathfrak{b}\}$ una familia dominante de cardinal $\mathfrak{b}$. Se quiere construir una familia dominante que esté bien ordenada por $\leq^*$ como $\mathcal{D}$ es una familia de conjuntos indexada por un ordinal, se sabe que tiene un primer elemento: sea $f_0 \in \mathcal{D}$ dicho elemento por ser $\mathcal{D}$ una familia dominante, tenemos que existe $g_0 \in \mathcal{D}$ tal que $f_0 \leq^* g_0$ entonces tomando $D_0 = \{g_0, f_0, f_1\}$ por ser D_0 finito existe $h_0 \in \omega^\omega$ que lo acote.

Como $\mathcal{D}$ es una familia dominante, existe $g_1 \in \mathcal{D}$ que domina a h_0, ahora tomando a $D_1 = \{f_0, f_1, f_2, g_0, g_1\}$ por ser este finito existe $h_2 \in \omega^\omega$ que acote a D_1. Como $h_2 \in \omega^\omega$ existe $g_2 \in \mathcal{D}$ que domina a h_2.

Suponiendo que tenemos definido g_n, por inducción, se tiene que:

$D_n = \{f_0, \dots f_n, f_{n+1}, g_0, \dots, g_n\}$ es finito y acotado por h_n, como $h_n \in \omega^\omega$ tenemos que existe $g_{n+1} \in \mathcal{D}$ tal que $h_n \leq^* g_{n+1}$, (Cabe destacar que por la forma como estamos construyendo el conjunto, tenemos que si $i < j$ entonces $g_i \leq^* g_j$ y además $f_i \leq^* g_i$).

Sea $\xi < \mathfrak{b}$, supongamos que para todo $\eta < \xi$, g_η está definido. Tenemos que si $\eta < \xi < \mathfrak{b}$ se tendrá que:

$D_\xi = \{g_\eta : \eta < \xi\} \bigcup \{f_\eta : \eta \leq \xi\}$ como $|D_\xi| < \mathfrak{b}$ existe $h_\xi \in \omega^\omega$ que acota a D_ξ y de igual manera existe $g_{\xi+1} \in \mathcal{D}$ que domina a h_ξ.

Por inducción transfinita supongamos definidos a $g_\xi \in \omega^\omega$ con $\xi < \mathfrak{b}$ y sea $\mathcal{G} = \{g_\xi \in D_\xi : \xi < \mathfrak{d}\}$, de donde hemos obtenido una familia dominante que satisface las siguientes propiedades:

- Dado $f_\xi \in \mathcal{D}$, $f_\xi \leq^* g_\xi$.
- $g_\eta \leq^* g_\xi$ si $\eta < \xi$.

Con lo que demostramos la primera implicación del teorema.

Ahora veamos la otra implicación: Sea $\mathcal{H} = \{h_\xi : \xi < \mathfrak{d}\}$ una familia dominante bien ordenada por $\leq^*$ y sea $\mathcal{B} = \{f_\xi : \xi < \mathfrak{b}\}$ una familia no acotada de tamaño $\mathfrak{b}$. Sea $g_\xi = min\{h \in \mathcal{H} : f_\xi \leq^* h\}$ para $\xi < \mathfrak{b}$ y $\mathcal{G} = \{g_\xi : \xi < \mathfrak{b}\}$, es claro que es una familia no acotada de cardinal $\mathfrak{b}$.

Veamos que $\mathcal{G}$ es una familia dominante, para eso sea $f \in \omega^\omega$ como $\mathcal{H}$ es dominante entonces existe $h_\xi \in \mathcal{H}$ tal que $f \leq^* h_\xi$ por ser $\mathcal{G}$ no acotada existe $g_\xi \in \mathcal{G}$ tal que $g_\xi \nleq^* f$ pero como $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ y $\mathcal{H}$ esta bien ordenado por $\leq^*$ entonces $h_\xi \leq^* g_\xi$ de donde $f \leq^* g_\xi$, con lo que podemos concluir que $\mathcal{G}$ es una familia dominante, por tanto $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ que es lo que se quería demostrar.

□

Antes de continuar se recordará la definición de ideal:

Definición 5.1.4 Un *ideal* $\mathcal{I}$ en un conjunto no vacío S, es una colección de subconjuntos de S tal que:

- $\emptyset \in \mathcal{I}$ y $S \notin \mathcal{I}$.
- Si $X \in \mathcal{I}$ y $Y \in \mathcal{I}$, entonces $X \cup Y \in \mathcal{I}$.
- Si $X, Y \subset S$, $X \in \mathcal{I}$ y $Y \subset X$, entonces $Y \in \mathcal{I}$.

Se dice que un ideal $\mathcal{I}$ es un *σ-ideal*, si para una cantidad numerable de $X_n \in \mathcal{I}$ com $n \in \mathbb{N}$ se tiene que la unión de ellos está en $\mathcal{I}$, es decir:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \in \mathcal{I}$$

Definición 5.1.5 Sea $\mathcal{I}$ un $\sigma-$ideal propio de subconjuntos de un conjunto X, que contiene todos los elementos unitarios de X.

- La *aditividad* de $\mathcal{I}$, $\mathbf{add}(\mathcal{I})$, es el menor cardinal de una colección de conjuntos en $\mathcal{I}$ cuya unión no está en $\mathcal{I}$
- El *número de cubrimiento* de $\mathcal{I}$, $\mathbf{cov}(\mathcal{I})$, es el menor número de conjuntos en $\mathcal{I}$ cuya unión es X.
- La $uniformidad$ de $\mathcal{I}$, $\mathbf{non}(\mathcal{I})$, es la menor cardinalidad de una colección de subconjuntos en X cuya unión no está en $\mathcal{I}$.
- la $cofinalidad$ de $\mathcal{I}$, $\mathbf{cof}(\mathcal{I})$, es el menor cardinal de un subconjunto B de $\mathcal{I}$ tal que, todo elemento de $\mathcal{I}$ es un subconjunto de algún elemento de B. A tal B se le llamará, la *base* de $\mathcal{I}$.

Si tomamos a $\mathcal{I}$ como un σ-*ideal* se tendría que $\aleph_1 \leq \mathbf{add}(\mathcal{I})$.

Ahora estudiaremos las relaciones que existen entre estos cardinales:

Lema 5.3 Sea $\mathcal{I}$ un σ-*ideal* propio de subconjuntos de un conjunto X, que contiene todos los elementos unitarios de X, entonces:

$$\mathbf{add}(\mathcal{I}) \leq \mathbf{non}(\mathcal{I}) \leq \mathbf{cof}(\mathcal{I}).$$

Demostración : Veamos que:

- $\mathbf{add}(\mathcal{I}) \leq \mathbf{non}(\mathcal{I})$.

  Sea $H = \{J : J \subset \mathcal{I}$ y $\cup J \notin \mathcal{I}\}$ y $K = \{A : A \subset X$ y $A \notin \mathcal{I}\}$. Veamos que $K \subset H$:

  Sea $A \in K$. Entonces $A \subset X$ y $A \notin \mathcal{I}$. Como $A \subset X$, entonces $A = \bigcup\{\{x\} : x \in A\}$. Sea $J = \{\{x\} : x1 \in A\}$, entonces $A = \cup J$, por hipótesis tenemos que $\mathcal{I}$, tiene todos los conjuntos unitarios de X, entonces $J \subset \mathcal{I}$ de donde $\bigcup J \notin \mathcal{I}$ como $|J| = |A|$ se tiene que, $|A| \in \{|J| : J \in H\}$. Por tanto, $min\{|J| : J \in H\} \leq min\{|A| : A \in K\}$, de donde $\mathbf{add}(\mathcal{I}) \leq \mathbf{non}(\mathcal{I})$.

- $\mathbf{non}(\mathcal{I}) \leq \mathbf{cof}(\mathcal{I})$.

  Sea $H = \{B : B \subset \mathcal{I} \wedge (\forall \xi \in \mathcal{I} \exists \kappa \subset B(\xi \in \kappa))\}$ y $K = \{A : A \subset X \wedge A \notin \mathcal{I}\}$, sea $B \in H$ veamos que existe $A \in K$ tal que $B \subset A$, como $B \subset \mathcal{I}$ entonces por definición de ideal se tiene que $B \subset X$. Basta con tomar a A como la unión de B con una unión no numerable de elementos unitarios de X, en vista de que todos los elementos unitarios de X son elementos de $\mathcal{I}$ se tiene que la unión no numerable de estos no pertenece a $\mathcal{I}$, entonces $A \notin \mathcal{I}$ y $B \subset A$. Por lo tanto se tiene que para cualquier $B \in H$ existe $A \in K$ que lo contiene, de donde $H \subset K$.

$\square$

Lema 5.4 Sea $\mathcal{I}$ un σ-*ideal* propio de subconjuntos de un conjunto X, que contiene todos los elementos unitarios de X, entonces:

$$\mathbf{add}(\mathcal{I}) \leq \mathbf{cov}(\mathcal{I}) \leq \mathbf{cof}(\mathcal{I}).$$

Demostración : Veamos que:

- $\mathbf{add}(\mathcal{I}) \leq \mathbf{cov}(\mathcal{I})$.

  Sea $H = \{J : J \subset \mathcal{I} \text{ y } \cup J = X\}$, $K = \{J : J \subset \mathcal{I} \text{ y } \bigcup J \notin \mathcal{I}\}$. Veamos que $H \subset K$:

  Sea $J \in H$ entonces $\bigcup J = X$ pero $x \notin \mathcal{I}$ por tanto, $J \in K$ de donde $H \subset K$. De donde $\mathbf{add}(\mathcal{I}) \leq \mathbf{cov}(\mathcal{I})$.

- $\mathbf{cov}(\mathcal{I}) \leq \mathbf{cof}(\mathcal{I})$.

  Sea $A = \{ J : J \subset \mathcal{I} \text{ y } \bigcup J = X\}$ y $B = \{ J : J \subset \mathcal{I} \wedge \forall \varepsilon \in \mathcal{I} \exists \delta \subset J (\varepsilon \subset \delta)\}$, veamos que $B \subset A$:

  Sea $J \in B$, como $\mathcal{I}$ contiene todos los elementos unitarios de X y por hipótesis se tiene que todo elemento de $\mathcal{I}$ es subconjunto de algún conjunto subconjunto de J, se concluye que $\bigcup J = X$, de donde $J \in A$. Por tanto $\mathbf{cov}(\mathcal{I}) \leq \mathbf{cof}(\mathcal{I})$.

□

De los lemas (5.3) y (5.4) se puede concluir que:

Teorema 5.4 Sea $\mathcal{I}$ un σ-*ideal* propio de subconjuntos de un conjunto X, que contiene todos los elementos unitarios de X, entonces:

$$\aleph_1 \leq \mathbf{add}(\mathcal{I}) \leq min\{\mathbf{cov}(\mathcal{I}), \mathbf{non}(\mathcal{I})\} \leq max\{\mathbf{cov}(\mathcal{I}), \mathbf{non}(\mathcal{I})\} \leq \mathbf{cof}(\mathcal{I})$$

El σ-*ideal* que se va a estudiar es el σ-*ideal* $\mathcal{K}_\sigma$, generado por los subconjuntos compactos de ω^ω; es decir, el ideal de los conjuntos que se pueden cubrir por una cantidad numerable de conjuntos compactos, recordemos que un conjunto es *compacto* si todo cubrimiento por abiertos tiene un subcubrimiento finito.

Teorema 5.5 $\mathbf{add}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathbf{non}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathfrak{b}$ **y** $\mathbf{cov}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathbf{cof}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathfrak{d}$

Demostración : Como todo subconjunto del espacio discreto ω es compacto si y solo si es finito, se tiene por el teorema de Tychonoff que todo subconjunto de ω^ω es compacto si es cerrado y es producto de subconjuntos finitos de ω. No hay pérdida de generalidad si en vez de tomar subconjuntos finitos, se tomasen segmentos iniciales, de esta manera tenemos que todos los conjuntos de la forma:

$$\{ f \in \omega^\omega : f \leq g\} = \prod_{n \in \omega}[0, g(n)]$$

Son compactos y todo conjunto compacto está incluido en alguno de esa forma. De esto sigue que todos los conjuntos de la forma $\{ f \in \omega^\omega : f \leq^* g\}$ (con $\leq^*$ en vez de $\leq$) están en $\mathcal{K}_\sigma$ y todo subconjunto de $\mathcal{K}_\sigma$ es subconjunto de alguno de esos.

Ahora se usarán estas afirmaciones para demostrar el teorema.

- $\mathbf{add}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathbf{non}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathfrak{b}$.

Veamos que $\mathfrak{b} \leq \mathbf{add}(\mathcal{K}_\sigma)$:

Sea $\mathcal{B}$ una familia de conjuntos de $\mathcal{K}_\sigma$ cuya unión no está en $\mathcal{K}_\sigma$ además $|\mathcal{B}| = \mathbf{add}(\mathcal{K}_\sigma)$.

Como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}_\sigma$ sabemos que para todo $X \in \mathcal{B}$ existe $g_X \in \omega^\omega$ tal que

$$X = \{f \in \omega^\omega : f \leq^* g_X\}.$$

Sea $\mathcal{F} = \{g_X : X \in \mathcal{B}\}$. Veamos que $\mathcal{F}$ es una familia no acotada: Para eso supongamos lo contrario, es decir existe $f \in \omega^\omega$ tal que f domina g_X para todo $X \in \mathcal{B}$.

Entonces tomando $\mathcal{H} = \{g \in \omega^\omega : g \leq^* f\}$ se tiene que $X \subseteq \mathcal{H}$, para todo $X \in \mathcal{B}$, por lo tanto $\bigcup \mathcal{B} \subseteq \mathcal{H}$.

Como $\mathcal{H}$ es un conjunto compacto tenemos que $\mathcal{H} \in \mathcal{K}_\sigma$, y como $\mathcal{K}_\sigma$ es un $\sigma-$ideal tenemos que $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{K}_\sigma$ lo que es una contradicción con nuestra elección inicial de $\mathcal{F}$, por tanto $\mathcal{F}$ es una familia no acotada, de donde $\mathfrak{b} \leq |\mathcal{F}| = |\mathcal{B}| = \mathbf{add}(\mathcal{K}_\sigma)$.

Ahora veamos que $\mathbf{non}(\mathcal{K}_\sigma) \leq \mathfrak{b}$:

Sea $\mathcal{F}$ una familia no acotada de cardinal $\mathfrak{b}$. Se quiere ver que $\mathcal{F} \notin \mathcal{K}_\sigma$.

Supóngase que $\mathcal{F} \in \mathcal{K}_\sigma$, entonces este se puede escribir de la forma $\{f \in \omega^\omega : f \leq^* h\}$ de donde $g \leq^* h$ para todo $g \in \mathcal{F}$, lo que es una contradicción ya que $\mathcal{F}$ es una familia no acotada. Por tanto $\mathcal{F} \notin \mathcal{K}_\sigma$, de donde $\mathbf{non}(\mathcal{K}_\sigma) \leq |\mathcal{F}| = \mathfrak{b}$.

Por lema (5.3) se sabe que $\mathbf{add}(\mathcal{K}_\sigma) \leq \mathbf{non}(\mathcal{K}_\sigma)$ de donde se puede concluir que:

$$\mathbf{add}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathbf{non}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathfrak{b}.$$

- $\mathbf{cov}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathbf{cof}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathfrak{d}$.

Veamos que $\mathbf{cov}(\mathcal{K}_\sigma) \geq \mathfrak{d}$, para eso sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de $\mathcal{K}_\sigma$ cuya unión cubra ω^ω de cardinal $\mathbf{cov}(\mathcal{K}_\sigma)$, es decir:

$$\omega^\omega = \bigcup\{Y : Y \in \mathcal{C}\},\ |\mathcal{C}| = \mathbf{cov}(\mathcal{K}_\sigma).$$

De manera análoga a la demostración anterior, se tiene que para todo $Y \in \mathcal{C}$ existe $g_Y \in \omega^\omega$ tal que $Y = \{f \in \omega^\omega : f \leq^* g_Y\}$, de donde se tiene que:

$$\omega^\omega = \bigcup\{f \in \omega^\omega : f \leq^* g_Y\} \text{ para todo } Y \in \mathcal{C}.$$

Es claro que $\mathcal{D} = \{g_Y : Y \in C\}$ es una familia dominante, ya que de no serlo existiría $f \in \omega^\omega$ tal que $f \notin \bigcup\{f \in \omega^\omega : f \leq^* g_Y\} = \omega^\omega$ lo que sería una contradicción, por tanto se tiene que: $\mathbf{cov}(\mathcal{K}_\sigma) \geq |\mathcal{D}| = |\mathcal{C}| = \mathfrak{d}$.

Ahora veamos que $\mathbf{cof}(\mathcal{K}_\sigma) \leq \mathfrak{d}$. Sea $\mathcal{D}$ una familia de dominante de cardinal $\mathfrak{d}$.

Sea $\mathcal{B} = \{\{f : f \leq^* g\} : g \in \mathcal{D}\}$, veamos que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{K}_\sigma$, sea $X \in \mathcal{K}_\sigma$ por lo tanto X es de la forma:

$$X = \prod_{n\in\omega}[0, h_x(n)] = \{f \in \omega^\omega : f \leq^* h_x\} \text{ para algún } h_X \in \omega^\omega.$$

Entonces como $\mathcal{D}$ es una familia dominante, existe $g_X \in \mathcal{D}$ tal que $h_x \leq^* g$. Tomando a $B_x = \{f : f \leq^* g_x\}$ se tiene que $\{f : f \leq^* h_x\} \subseteq B_X$, de donde $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{K}_\sigma$.

Por lo tanto $\mathbf{cof}(\mathcal{K}_\sigma) \leq |\mathcal{B}| = \mathfrak{d}$, que es lo que se quería demostrar.

Por lema (5.4) se sabe que $\mathbf{cov}(\mathcal{K}_\sigma) \leq \mathbf{cof}(\mathcal{K}_\sigma)$ de donde se puede concluir que

$$\mathbf{cov}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathbf{cof}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathfrak{d}.$$

$\square$

Definición 5.1.6 Dados $a, b \in \omega$ con $a < b$, el *intervalo* $I = [a, b)$ es el conjunto de los $n \in \omega$ tal que $a \leq n$ y $n < b$.

Definición 5.1.7 Una *partición en intervalos de* ω (PI) , es una colección infinita $\mathcal{J}$ de intervalos $I_n = [i_n, i_{n+1})$ con $n \in \omega$ tal que $\cup\mathcal{J} = \cup\{I_n : n \in \omega\} = \omega$.

Siempre se supondrá que los intervalos se encuentran enumerados por el orden natural, es decir $i_0 = 0$ e $i_n < i_{n+1}$.

Se dice que una partición en intervalos $\{I_n : n \in \omega\}$ *domina* a otra partición en intervalos $\{J_n : n \in \omega\}$ si existe $m \in \omega$ tal que para todo $n \geq m$ existe $k \in \omega$ tal que $J_k \subset I_n$.

Una familia $\mathcal{B}$ de particiones en intervalos es *no acotada*, si no existe una PI que domine a todas las PI de $\mathcal{B}$.

Una familia $\mathcal{D}$ de particiones de intervalos es *dominante*, si para cualquier PI, existe una PI en $\mathcal{D}$ que la domine.

Teorema 5.6 $\mathfrak{d}$ es el menor cardinal de una familia de particiones en intervalos dominante.

$\mathfrak{b}$ es el menor cardinal de una familia en particiones de intervalos no acotada.

Demostración : Supóngase que se tiene una familia de particiones en intervalos $\mathcal{F}$ dominante.

Entonces, a cada una de las particiones en intervalos $\{I_n = [i_n, i_{n+1})\}$ en $\mathcal{F}$, se le va asociar a la función $f \in \omega^\omega$ definida de la siguiente manera: si $x \in I_n$ entonces $f(x) = i_{n+2} - 1$, (es decir; si $x \in I_n$ entonces $f(x)$ es el ultimo elemento de I_{n+1}).

Ahora se va a demostrar que la familia $\mathcal{K}$ de todas las funciones f, forman una familia dominante.

Con eso tendríamos nuestra primera desigualdad: $\mathfrak{d} \leq |\mathcal{F}|$.

Para eso se va a construir una partición de intervalos que nos ayudara a encontrar, dado $g \in \omega^\omega$, cual $f \in \mathcal{K}$ domina a g.

Sea $\mathcal{J} = \{J_n = [j_n, j_{n+1}) : n \in \omega\}$ dicha partición, dada por:

- $J_0 = [j_0, j_1)$ donde $j_0 = 0$ y $j_1 > g(0)$.
- $J_1 = [j_1, j_2)$ donde j_2 se tomará de la siguiente manera: Sea $k_1 = max\{g(x) : x \in (J_0 \cup \{j_1\})\}$ entonces:

$$j_2 = \begin{cases} k_1 + 2, & \text{si } k_1 > j_1 \\ j_1 + 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- De manera general $J_n = [j_n, j_{n+1})$, donde

$$j_{n+1} = \begin{cases} k_n + 2, & \text{si } k_n > j_n \\ j_n + 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con esto se tiene que si $x \in J_n$ entonces $g(x) \in J_{n+1}$ o $g(x) < j_{n+1}$.

Sea $\mathcal{I} \in \mathcal{F}$ una partición en intervalos que domine a $\mathcal{J}$, y sea f la función asociada a $\mathcal{I}$, se verá que $g(x) \leq^* f(x)$.

Sea $I_n \in \mathcal{I}$ el menor intervalo tal que existe $J_k \in \mathcal{J}$ contenido en I_n.

Queremos ver que a partir de k se tiene que $g(x) \leq f(x)$. Por construcción si $x \in J_k$ se tiene que $g(x) \in J_{k+1}$ o $g(x) < j_{k+1}$ como $J_k \subset I_n$ se tiene por ser $\mathcal{I}$ dominante que J_{k+1} satisface tres de los siguientes casos:

1.- $J_{k+1} \subset I_{n+1}$

2.- $J_{k+1} \subset I_n$

3.- J_{k+1} esta estrictamente contenido en la unión de I_n e I_{n+1}, es decir $i_n < j_{k+1} < i_{n+1}$ e $i_{n+1} < j_{k+2} < i_{n+2}$

Sea $k_0 = min\{k : (\exists n)(J_k \subset I_n)\}$, $m_0 = j_{k_0}$.

Veamos que para todo $x \geq m_0$, se tiene que $f(x) \leq g(x)$.

Sea n tal que $x \in I_n$ y $x \in J_k$ donde $k \geq k_0$, por lo anterior tenemos que: Para los casos 2 y 3 es claro que $g(x) \leq f(x)$ ya que $f(x)$ es exactamente el ultimo elemento de I_{n+1}. En el caso 1 también es fácil ver que se satisface la desigualdad ya que $g(x) < j_{k+2} \leq f(x) < i_{n+2}$. Con esto obtenemos que $g(x) \leq^* f(x)$ y por lo tanto que $\mathfrak{d} \leq |K| = |F|$.

Para demostrar la otra implicación ($\mathfrak{d} \geq |\mathcal{F}|$), se comienza con una familia dominante $\mathcal{D} \subset \omega^\omega$ de cardinal $\mathfrak{d}$ (sin perdida de generalidad todas las funciones de $\mathcal{D}$ serán estrictamente crecientes), tal que a cada $g \in \mathcal{D}$ se le asocia a una partición de intervalos $\mathcal{J}_g = \{J_n = [j_n, j_{n+1}) : n \in \omega\}$ de la misma manera que se hizo en la parte anterior con g.

Veamos que la familia $\mathcal{P} = \{\mathcal{J}_g : g \in \mathcal{D}\}$ es dominante:

Para esto, sea $\mathcal{I} = \{I_n = [i_n, i_{n+1}) : n \in \omega\}$ una partición de intervalos cualquiera, veamos que existe $\mathcal{J} \in \mathcal{P}$ tal que $\mathcal{J}$ domina a $\mathcal{I}$.

Primero se asociara a la partición de intervalos $\mathcal{I}$ una función, de la misma manera que se hizo antes con f.

Luego como $f \in \omega^\omega$ existe $g \in \mathcal{D}$ tal que $f \leq^* g$, debemos ver que el intervalo $\mathcal{J} \in \mathcal{P}$ asociado a g domina a $\mathcal{I}$.

Recordemos que $f \leq^* g$ si existe m tal que $x \leq n$ entonces $f(n) \leq g(n)$.

Sea m tal que $f \leq^* g$ entonces si $m \leq x$ tenemos que $f(x) \leq g(x)$ en particular para $j_n > x$ tenemos que $f(j_n) \leq g(j_n) \leq j_{n+1} - 1$, esto es por construcción de $\mathcal{J}_g$ ya que $g(x)$ esta en algún J_n para $x \leq n$.

Además $j_n \in I_m$ es decir $i_m < j_n < i_{m+1}$, a su vez $f(j_n) = i_{m+2} - 1$ de donde $f(j_n) < i_{m+2} < j_{n+1}$ como $i_{m+1} < i_{m+2}$ entonces $I_{m+1} \subset J_m$, que es lo que queríamos demostrar.

De donde se puede concluir que $\mathfrak{d} = |\mathcal{F}|$.

$\square$

Capítulo 6

Familias Separadoras y Homogeneidad

En este capítulo, se estudiaran algunas relaciones que existen entre las familias separadoras y familias homogéneas de conjuntos de numeros naturales. Véase las referencias [1]. Al igual que en el capitulo anterior estaremos trabajando en $ZFC + \neg HC$.

6.1. Familias Separadoras y Homogéneas

Definición 6.1.1 Se dice que un conjunto $X \subseteq \omega$ *separa* a un conjunto infinito $Y \subseteq \omega$ si ambos $Y \cap X$ y $Y - X$ son infinitos.

Definición 6.1.2 Se dice que una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos de ω es una $familia\ separadora$ si para cada conjunto infinito $Y \subseteq \omega$ existe al menos un conjunto $X \in \mathcal{S}$ que lo separe.

$$\text{Sea } \mathfrak{s} = min\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \text{ es una familia separadora}\}$$

Teorema 6.1 $\aleph_1 \leq \mathfrak{s}$

Demostración : Supóngase que existe una familia separadora numerable.

Sea $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i\in\omega}$ dicha familia, se quiere construir un conjunto $K_\sigma \subseteq \omega$ tal que este no es separado por ninguno de los $S_i \in \mathcal{S}$.

Sea $K_1 \subseteq \omega$ infinito, como $\mathcal{S}$ es una familia separadora, existe $S_1 \in \mathcal{S}$ tal que S_1 separa a K_1 es decir $S_1 \cap K_1$ y $K_1 - S_1$ son infinitos, tomando a $K_2 = Y - S_1$ como K_2 es un conjunto infinito de ω y $K_2 \cap S_1 = \emptyset$ entonces existe $S_2 \in \mathcal{S}$ tal que S_2 lo separe, por tanto $K_2 - S_2$ y $K_2 \cap S_2$ son infinitos.

De manera general si se tiene definido hasta K_n como este es infinito, se tiene que existe $S_n \in \mathcal{S}$ que lo separe, de donde $K_{n+1} = K_n - S_n$, cabe destacar que ningún $S_i \in \mathcal{S}$ separa a K_{n+1} si $i < n+1$ y además $K_i \subset K_j$ si $i < j$.

Por inducción supongamos definidos a K_n con $n \in \omega$ y sea $K_\sigma = \cap_{i\in\omega} K_i$.

Antes de continuar veamos que K_σ es infinito, para eso supongamos que $\cap_{i\in\omega} K_i$ es finito, es decir existe algún $i \in \omega$ tal que K_i es finito, por construcción este es de la forma $K_i = K_{i-1} - S_i$ pero S_i separa a K_{i-1} es decir $K_{i-1} - S_i$ es infinito, lo que es una contradicción y por tanto K_σ es infinito.

Ahora por ser $K_\sigma \subseteq \omega$ infinito debería existir $S_i \in S$ que lo separe pero $K_\sigma \cap S_i = \emptyset$ para cualquier $i \in \omega$ lo que es una contradicción ya que $\mathcal{S}$ es una familia separadora. De donde se concluye que $\mathfrak{s}$ es mayor igual a $\aleph_1$.

$\square$

Teorema 6.2 $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$

Demostración : Se quiere ver que existe una familia dominante $\mathcal{D}$ de cardinal $\mathfrak{d}$ que sea separadora. Por el teorema (5.6) se puede construir una familia de particiónes de intervalos dominante $\mathcal{D}_p$ de cardinal $\mathfrak{d}$. A cada partición de intervalos $\prod = \{I_n : n \in \omega\}$ en $\mathcal{D}_p$, se asociará con la unión $\phi(\prod) = \bigcup_n I_{2n}$ es decir la unión de los intervalos pares de $\prod$.

Vamos a demostrar que estos $\mathfrak{d}$ conjuntos $\phi(\prod)$ constituyen una familia separadora:

Dado un subconjunto arbitrario X de ω, asociemos a X una partición en intervalos $\psi(X)$ en la cual cada intervalo posee al menos un elemento de X. Como D_p es una familia dominante de particiones en intervalos, se sabe que existe $\prod \in \mathcal{D}_p$ tal que $\prod$ domina a $\psi(X)$.

Si se tiene que cada intervalo de $\psi(X)$ está contenido en algún intervalo de $\prod$ (salvo una cantidad finita de estos) es claro entonces, que cada intervalo de $\prod$ posee al menos un elemento de X. Ahora tomando $\phi(\prod)$ se obtendrá un conjunto, cuya intersección con X es infinita y además como $(\phi(\prod))^c = \bigcup_n I_{2n+1}$ entonces $X \cap (\phi(\prod))^c$ es infinita de donde $\phi(\prod)$ separa a X por tanto $\mathcal{D}$ es una familia separadora.

$\square$

Cabe destacar del teorema anterior, que los propiedades básicas de la construcción de ϕ y ψ de la demostración, dejan que:

Para cualquier partición de intervalos $\prod$ y cualquier conjunto infinito $X \subseteq \omega$ se tiene que si:

$$\prod \text{ domina a } \psi(X) \implies \phi(X) \text{ separa a } X.$$

Definición 6.1.3 Decimos que un conjunto $\mathcal{H} \subset \omega$ es *homogéneo* para una función $f : [\omega]^n \to k$ es decir, una partición de $[\omega]^n$ en k piezas, si f es constante en $[\mathcal{H}]^n$.

Definición 6.1.4 Decimos que $\mathcal{H}$ es *casi homogéneo* para una partición $f : [\omega]^n \to k$ si existe un conjunto finito $\mathcal{F}$ tal que el conjunto $\mathcal{A} = \mathcal{H} - \mathcal{F}$ es *homogéneo* para f.

Llamaremos a $\mathfrak{par}_n$ el menor cardinal de una familia de particiones $\mathcal{P} = \{f : f$ *es una partición de* $[\omega]^n$ *en* 2 *clases*$\}$ tal que no existe un conjunto $\mathcal{H}$ que sea *casi homogéneo* con todas las $f \in P$.

Nótese que $\mathfrak{par}_1$ es $\mathfrak{s}$, y que la definición de $\mathfrak{par}_n$ permanecería igual, si se usara una cantidad finita de piezas, ya que tal partición pudiera ser reemplazada por una cantidad finita de particiones de 2 piezas.

La necesidad de usar *casi homogéneo* en vez de *homogéneo* en la definición de $\mathfrak{par}_\mathfrak{n}$ esta en que es posible definir una familia numerable de particiones tales que no existe un conjunto que sea homogéneo para todas al mismo tiempo.

Teorema 6.3 para todo número $n \geq 2$, $\mathfrak{par}_n = min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$.

Demostración : Nótese que $\mathfrak{par}_n \leq \mathfrak{par}_m$ si $m \leq n$. Esto se debe a que cualquier partición de $[\omega]^m \to 2$ se puede ver como una partición de $[\omega]^n$ si se ignora los últimos $n - m$ elementos cuando se está evaluando la función.

Se verá primero que $\mathfrak{par}_2 \leq \mathfrak{b}$: Sea $\mathcal{B}$ una familia no acotada de cardinal $\mathfrak{b}$, sin pérdida de generalidad vamos a tomar a cada $g \in \mathcal{B}$ como monótona creciente, y a cada g la vamos a asociar a una partición de $[\omega]^2$ tal que a el par $\{x < y\}$ le asignamos el 0 si $g(x) < y$ y 1 si sucede lo contrario. Nótese, que un conjunto homogéneo de clase 1 tiene que ser finito, ya que de lo contrario, de ser infinito, si tomásemos x como el primer elemento, se tendría que $g(x) > g(y)$ para cualquier $y > x$ a pesar de nuestra elección de que cada g fuese monótona creciente.

Vamos a demostrar que no existe $\mathcal{H} \subset \omega$ infinito que sea casi homogéneo para todas esta particiones de manera simultánea.

En vista de que la clase 1 es finita, supóngase que $\mathcal{H}$ es infinito y esta casi contenido en la clase 0 de todas las particiones asociadas a las funciones $g \in \mathcal{B}$.

Considérese la función h tal que a cada número natural x lo mande al segundo miembro de $\mathcal{H}$ que esté por encima de x es decir, para cada x, vamos a tener que: $x < y < h(x)$ con y y $h(x)$ en $\mathcal{H}$.

Como $\mathcal{H}$ es casi homogéneo, se tendrá que para cada $g \in \mathcal{B}$ existe un x lo suficientemente grande tal que $g(y) < h(x)$ y por monotonía de g, $g(x) < h(x)$ de donde $g \leq^* h$ para toda $g \in \mathcal{B}$, lo que es una contradicción ya que $\mathcal{B}$ es no acotada. Con esto tenemos que $\mathfrak{par}_n \leq min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$.

Se verá ahora que $\mathfrak{par}_n \geq min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$. Dada una familia de particiones $f_\xi : [\omega]^2 \to 2$ de cardinal $\kappa < min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$, se debe conseguir un conjunto infinito que es casi homogéneo con todas ellas. Para eso, considérese las siguientes funciones:

$$f_{\xi,n} : \omega \to 2 : x \to f_\xi\{n, x\}$$

Como el número de estas funciones es $\kappa \cdot \aleph_0 < \mathfrak{s}$, entonces existe un conjunto infinito $A \subset \omega$ en el que son casi constantes, es decir $f_{\xi,n}(x) = j_\xi(n)$ para todo $x \geq g_\xi(n)$ en A. Además como $\kappa < \mathfrak{s}$ se puede conseguir un $B \subset A$ en el que cada j_ξ es constante, es decir $j_\xi(n) = i_\xi$, $n \geq b_\xi$ para algún b_ξ en B. Como también $\kappa < \mathfrak{b}$ entonces se tiene que existe una función h que acota a cada g_ξ, a partir de cierto entero c_ξ. Sea $H = \{x_0, x_1, \ldots\}$ un subconjunto infinito de B de forma tal que $h(x_n) < x_{n+1}$ para todo n. Veamos que H es casi homogéneo para cada f_ξ: si $x < y$ son elementos de H mayores que b_ξ y c_ξ, entonces $y > h(x) \geq g_\xi(x)$ y de esta manera $f_\xi(\{x, y\}) = f_{\xi,x}(y) = j_\xi(x) = i_\xi$.

□

Definición 6.1.5 Una familia $\mathcal{R}$ de subconjuntos infinitos de ω es *inseparable* si no existe un subconjunto de ω que *separe* a todos los elementos de $\mathcal{R}$.

$$\mathfrak{r} = min\{\mathcal{R} : \mathcal{R} \textit{ es una familia inseparable } \}.$$

Teorema 6.4 $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{r}$

Demostración : Al igual que en el teorema(6.2), se tomará a ϕ como la función que manda una partición de intervalos a la unión de sus intervalos pares, además sea ψ la función que manda un conjunto infinito $X \subset \omega$ a una partición de intervalos tal que todo intervalo contenga al menos un elemento de X.

Sea $\mathcal{R}$ una familia inseparable de cardinal $\mathfrak{r}$, se quiere ver que no existe una partición de intervalos $\prod$ que domine a todas las particiones $\psi(X)$ para $X \in \mathcal{R}$, con esto se demostraría que $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{r}$ ya que $\mathfrak{b}$ es el menor cardinal de una familia particiones de intervalos no acotada por una sola partición de intervalos.

Pero se sabe por el teorema (6.2), que si $\prod$ dominase a todos los $\psi(X)$, entonces $\phi(\prod)$ separaría a todos los $X \in \mathcal{R}$, lo que sería una contradicción ya que $\mathcal{R}$ es una familia inseparable, por tanto $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{r}$, que es lo que se quería demostrar. □

Bibliografía

[1] BLASS ANDREAS, *Handbook of Set Theory.* Springer ed.,a aparecer. Disponible en: http://www.math.lsa.umich.edu/ ablass/set.html. Consultado el día 1 de abril de 2009.

[2] BLASS ANDREAS, *Reduction Between Cardinal Characteristics of the Continuum* disponible en: http://arxiv.org/abs/math/9407203v1. Consultado el día 1 de abril de 2009.

[3] BLASS ANDREAS, *Nearly Countable Cardinals* disponible en: http://www.math.lsa.umich.edu/ ablass/set.html. Consultado el día 1 de abril de 2009.

[4] DI PRISCO. (1997): *Una introducción a la teoría de conjuntos y los fundamentos de las matemáticas.* Vol 20 Coleção cle.

[5] DUGUNDJI, J. (1966): *Topology.* Allyn and Bacon, INC. Boston.

[6] IRIBARREN, I. (2006): *Introducción a la Teoría de la Medida.* Universidad Central de Venezuela, Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico, Caracas.

[7] JECH, T. (2006) *Set Theory*, Springer ed., Alemania.

[8] JECH, T y HRBACEK, K. (1999): *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker.

[9] KUNEN KENNETH. (2006): *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Elsevier ed., Amsterdam, Holanda.

[10] LIPSCHUTZ, S. (1965): *Topología General* McGraw-Hill CO.

[11] ROYDEN, H.L. (1968): *Real Analysis* Macmillan Publishihg CO., INC.

[12] STEPHEN HECHLER (1974): *On the existence of certain cofinal subsets of* ω^ω T. Jech Editor, Axiomatic Set Theory, Part II Volume 13(2) of Proc. Symp Math Amer. Math Soc, paginas 155-173.