



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA

# Construcción de un parche triangular de Bézier cuadrático

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre  
Universidad Central de Venezuela por la **Br. Mariana  
Elena García Somaroo** para optar al título de Licen-  
ciado en Matemática.

**Tutor: Dr. Francisco Tovar.**

Caracas, Venezuela

Diciembre 2009

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Construcción de un parche triangular de Bézier Cuadrático**”, presentado por la **Br. Mariana Elena García Somaroo**, titular de la Cédula de Identidad **16.671.068**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

---

**Prof. Francisco Tovar**  
**Tutor**

---

**Prof. Tomás Guardia**  
**Jurado**

---

**Prof. Giovanni Figueroa**  
**Jurado**

Dedicatoria

*A Gab, a mi hermana, a mi mamá y a mi papá.*

*Los amo tanto.*

## Agradecimiento

A tí Señor, muchas gracias.

A mi mamá y a mi hermana por su amor y por todo.

A mi papá por su amor y por darme fuerzas para todo lo demás.

A Mof la mejor amiga que nunca merecí pero que siempre quise. A Peque, la heroína más genial con pinceles y botas de patente. A mi abuela querida por su sentido común. A mis queridos, pachangueros y sabrosos Somaroo. A mi hermano y a su hermosa familia. A mi querida Vio, que llena mi casa de alegría y sabores. A Maria Luisa y a la poca importancia que le da, entre otras cosas, a las copas de cristal rotas. Al tío Antonio y su imaginación color *yellow submarine*. A mi tutor, Prof. Francisco Tovar, por tenerme la paciencia de los mil chinos. Al master Sith Jocer y a sus ideas atiborradas en la pestañita del chat. A José Gregorio y a los muchos cafés que me tomé con él. Gracias a cada uno de los cafés. A los tripulantes del CGGA: Jonnathan, Adriana, Tomás, Julián, Eduardo, Carlos, Giovanni, Prof. Tovar, por hacerme sentir en casa. Al Prof. Paluzsny y su esfuerzo por darnos una esquina con piso de parquet y olor a geometría. A los nuevos tripulantes: Evelyn, José, Daniel, Daniella, por los últimos días de gloria, café y música. A Kenia y la bolsita de ácido a la que llama humor. A Ivens por compartir melodías madrugadoras y sacarme a pasear de vez en cuando y de cuando en vez. A mis amigos del Chapter, por días de gloria, trabajo en equipo y mejores tiempos por venir. A mi querida Chepina y sus ideas multicolores y a J.J. y su humor color azabache. A mi nueva familia. Al sótano y sus blue meanies: Dude, M&M&M, Gussi, Carl, Ini, Troy, Miguel, Andre, por recibirme. A Miguel por salvarme una vez. A Xiomara y Humberto por una noche inolvidable.

A mi hermana otra vez, y a su música, que muchas veces es mi música.

A New Orleans y su gumbo <sup>1</sup> de computación gráfica.

A ésta, la casa que vence mis sombras.

A mi querida familia.

Al G que amo.  $\leq \pi$ .

---

<sup>1</sup>Gumbo: plato tradicional de New Orleans.

## Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Preliminares	3
1. Polinomios de Bernstein	3
2. Curvas de Bézier Polinomiales	5
3. Curvas de Bézier Racionales.	6
4. Plano proyectivo: coordenadas homogéneas y baricéntricas.	9
5. Cónicas de Bézier en el plano proyectivo.	14
6. Forma implícita de una Cónica de Bézier.	16
Capítulo 2. Parches de Bézier triangulares	20
1. Polinomios de Bernstein en 2D	20
2. Parches de Bézier triangulares	22
3. Parches de Bézier Racionales	25
4. Implícitación de un parche racional cuadrático de Bézier.	27
5. Dominio de un parche de Bézier expresado en coordenadas baricéntricas y afines.	31
6. Parche de Bézier en coordenadas homogéneas.	32
Capítulo 3. Construcción de un parche de Bézier cuadrático.	33
1. Construcción de un Haz de Superficies Cuadráticas.	33
2. Construcción del parche de Bézier	37
Conclusión	50
Bibliografía	52

## Introducción

El área de la modelación geométrica estudia curvas y superficies básicas con la finalidad de representar objetos más complejos. Estos objetos pueden ser representados de manera implícita o paramétrica. Uno de los principales problemas que aparecen al trabajar con un objeto expresado implícitamente es que, el grado de este puede ser muy elevado complicando los cálculos. Por lo tanto, en general se trabaja con objetos geométricos expresados de forma paramétrica. En este contexto resaltan las curvas y superficies de Bézier. Estas se construyen a partir de un conjunto de puntos cercanos a la curva (superficie) denominados polígono de control. Al modificarlos, la curva o superficie cambia intuitivamente de manera suave y predecible. Para este trabajo en particular se utilizan superficies racionales cuadráticas de Bézier, caracterizadas por tener parámetros extras de control además del polígono: *los pesos*. Los pesos permiten modificar, hasta cierto punto, la traza de la superficie sin alterar los puntos de control o las tangencias, dándole mayor flexibilidad. En caso de que los pesos sean positivos, la traza de la superficie está completamente contenida en la cápsula convexa definida por sus puntos de control.

Al calcular la ecuación implícita de una superficie racional cuadrática de Bézier resultan que tienen a lo sumo grado algebraico cuatro. El objetivo principal de este trabajo es construir un parche racional cuadrático de Bézier cuya ecuación implícita sea de grado dos. Para esto se construye una cónica de Bézier que interpole tres puntos de control a partir de la cual se define un cono  $C$ . Basándose en la construcción y comportamiento de una cónica de Bézier se consideran los planos tangentes al cono como cápsula convexa, se genera una familia de superficies cuadráticas a partir de  $C$ . Tomando los puntos de control intermedios sobre las rectas de intersección de los planos tangentes, se construye el parche racional de Bézier garantizando que este yace sobre una de las superficies cuadráticas de la familia, por lo que su ecuación implícita sería de grado dos.

Los capítulos están organizados como sigue: En el primer capítulo se presenta el marco teórico correspondiente a las curvas de Bézier, curvas racionales de Bézier y sus propiedades, ver [1], así como una visión intuitiva del plano proyectivo. Se desarrollan las coordenadas homogéneas y las coordenadas baricéntricas, que más adelante ayudarán a definir el parche de Bézier. Por último se estudian las curvas de Bézier en el plano proyectivo y se presentan a las Matrices de Sylvester como método para calcular su expresión implícita, las cuales se pueden estudiar con mayor profundidad en [4]. Para mejor referencia respecto a geometría proyectiva, ver [3].

En el segundo capítulo se desarrolla la teoría correspondiente a los parches triangulares de Bézier, parches racionales de Bézier y sus propiedades. Se utilizan las matrices de Sylvester para obtener su expresión implícita y se estudia su representación en coordenadas homogéneas y tetraédricas. Para una visión más amplia del tema de los parches de Bézier, refiérase a [5].

En el tercer y último capítulo se desarrolla el algoritmo que permite la construcción de un parche racional cuadrático de Bézier cuya expresión implícita tiene de grado dos, para más detalles ver [2]. Este algoritmo caracteriza los puntos de control intermedios y los pesos del parche a través de ciertos parámetros  $\sigma_i$ ,  $\tau_i$  obtenidos a partir de un sistema de ecuaciones generado por la expresión paramétrica de una familia de superficies cuadráticas. La escogencia de estos parámetros garantizan que el parche yace sobre una cuádrica, por lo que su ecuación implícita es de grado dos. Finalmente se muestran los resultados obtenidos varios ejemplos y las conclusiones.

## Preliminares

En este capítulo se introducen los conceptos necesario para comprender completamente el algoritmo que se presenta en el tercer capítulo. Se definen los polinomios de Bernstein y se listan sus propiedades, se presenta la definición de curvas de Bézier polinomiales y curvas racionales de Bézier cada una con sus respectivas propiedades. Se muestra una visión intuitiva del plano proyectivo, su definición formal y se presentan dos tipos de sistemas coordinados: el homogéneo y el baricéntrico. Por último, se estudian las curvas de Bézier en el plano proyectivo y se presenta un método para calcular su expresión implícita.

### 1. Polinomios de Bernstein

Los polinomios de Bernstein de grado  $n$  están definidos de la siguiente manera:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad \text{donde}$$

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

EJEMPLO 1.1. Polinomios de Bernstein de grado tres:

$$B_0^3 = (1-t)^3, \quad B_1^3 = 3t(1-t)^2, \quad B_2^3 = 3t^2(1-t), \quad B_3^3 = t^3$$

Véase Figura 1.1

Estos polinomios satisfacen las siguientes propiedades:

- Los polinomios de Bernstein forman una partición de la unidad

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1.$$

Para todo  $t \in \mathbb{R}$ , nótese que:



$$1 = (t + (1 - t))^n.$$

Usando el binomio de Newton

$$1 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_i^n(t).$$

- Forman una base para los polinomios de grado menor o igual a  $n$ .
- Son simétricos, esto significa:

$$\begin{aligned} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i} = \binom{n}{n-i} t^{(n-i)} (1 - t)^{n-(n-i)} \\ &= \binom{n}{n-i} t^{(n-i)} (1 - t)^i = B_{n-i}^n(1 - t) \end{aligned}$$

- Debido a su definición, sus únicas raíces son 0 y 1.
- Son recursivos:

$$B_i^n(t) = (1 - t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t).$$

- Si  $t \in [0, 1]$ , entonces  $B_i^n(t) \geq 0$ .

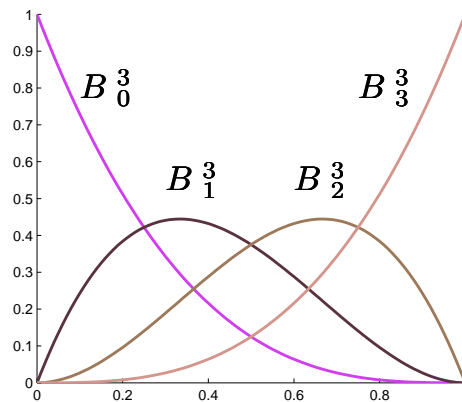


FIGURA 1.1. Polinomios de Bernstein de grado 3.

## 2. Curvas de Bézier Polinomiales

DEFINICIÓN 1.2. Una Curva de Bézier es un segmento de curva paramétrica polinomial de grado  $n$  en  $\mathbb{R}^m$  y está dada por una combinación lineal de polinomios de Bernstein, esto es:

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^n \mathfrak{b}_i B_i^n(t).$$

donde  $t \in \mathbb{R}$  y los coeficientes  $\mathfrak{b}_i, 0 \leq i \leq n$  pertenecientes a  $\mathbb{R}^m$  y se denominan **puntos de control**.

Las curvas de Bézier tienen propiedades particulares y otras heredadas de los polinomios de Bernstein, estas son:

- Dada la **simetría** de los polinomios de Bernstein, se tiene que

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^n \mathfrak{b}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathfrak{b}_{n-i} B_i^n(1-t).$$

La diferencia entre uno y otro es el modo en que se recorre la traza de la curva. En el primero se recorre la curva desde  $\mathfrak{b}_0$  hasta  $\mathfrak{b}_n$  y en el segundo desde  $\mathfrak{b}_n$  hasta  $\mathfrak{b}_0$ .

- La curva de Bézier **interpola** el primer y el último punto de control ya que (Figura 1.2).

$$\mathbf{b}(0) = \mathfrak{b}_0 \quad \text{y} \quad \mathbf{b}(1) = \mathfrak{b}_n.$$

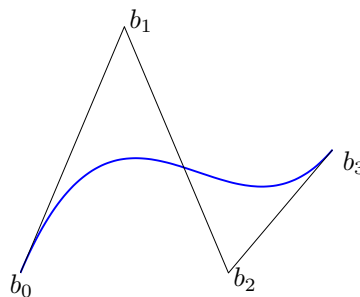


FIGURA 1.2. Una curva de Bézier de grado tres y su propiedad de interpolación por los puntos extremos.

- Una curva de Bézier es tangente a su polígono de control en los puntos extremos (véase Figura 1.3). Nótese que  $\mathbf{b}'(0) = \mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_0$  y  $\mathbf{b}'(1) = \mathfrak{b}_n - \mathfrak{b}_{n-1}$ .

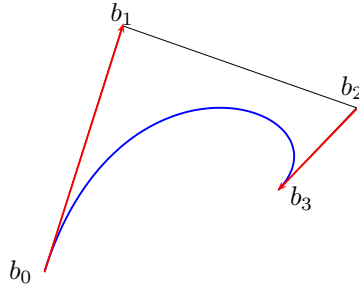


FIGURA 1.3. Tangencia en los puntos extremos.

- Como la suma de los polinomios de Bernstein es igual a 1 y  $B_i^n(t) \geq 0$  para  $t \in [0, 1]$ ,  $\mathbf{b}(t)$  es una combinación afín de sus puntos de control. Esto implica que la curva yace en el interior de la cápsula convexa definida por los puntos de control (Figura 1.4).

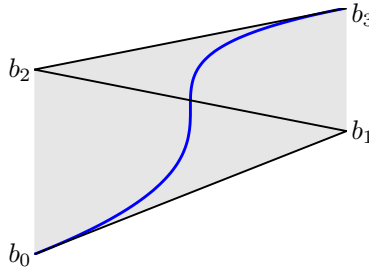


FIGURA 1.4. Cápsula convexa definida los por puntos de control.

- La curva de Bézier **es invariante** bajo transformaciones afines, es decir, dada  $\Phi$  una aplicación afín, se tiene que:

$$\Phi(\mathbf{b}(t)) = \Phi \left( \sum_{i=0}^n \mathbb{b}_i B_i^n(t) \right) = \sum_{i=0}^n \Phi(\mathbb{b}_i) B_i^n(t).$$

Esto significa que es suficiente cambiar sólo los puntos de control, por  $\Phi(\mathbb{b}_i)$   $i = (0, \dots, n)$  como opuesto a aplicar  $\Phi$  a cada punto de la curva  $\mathbf{b}(t)$  (Figura 1.5).

### 3. Curvas de Bézier Racionales.

Es posible cambiar la traza de una curva de Bézier sin modificar sus puntos de control. Para ello se introducen las curvas racionales de Bézier, donde ponderando cada punto de control

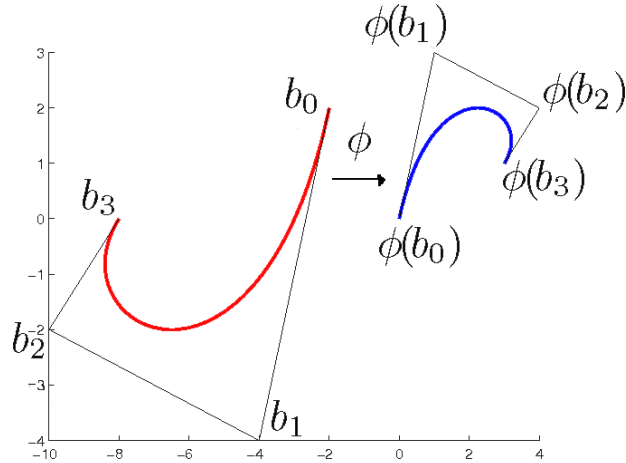


FIGURA 1.5. Ejemplo de la invarianza afín:  $\phi(\mathfrak{b}_i) = \frac{1}{2}\mathfrak{b}_i + (2, -2)$ .

por medio de escalares adecuados llamados pesos, se obtienen diferentes curvas de Bézier a partir de un mismo polígono de control.

DEFINICIÓN 1.3. Una curva de Bézier racional de grado  $n$  está dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{b}(t) = \frac{w_0 \mathfrak{b}_0 B_0^n(t) + \dots + w_n \mathfrak{b}_n B_n^n(t)}{w_0 B_0^n(t) + \dots + w_n B_n^n(t)}.$$

donde los **puntos de control**  $\mathfrak{b}_i$  que yacen en  $\mathbb{R}^m$ , los  $w_i$  son escalares positivos que se denominan **pesos** y  $t \in \mathbb{R}$ .

La figura 1.6 muestra como cambia la curva al variar los pesos:

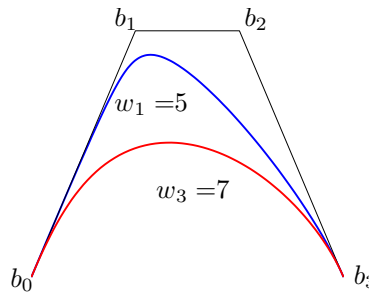


FIGURA 1.6. Curvas racionales con diferentes pesos.

Una Curva de Bézier Racional tiene las siguientes propiedades:

- **Interpola** el primer y último punto de control:

$$\mathbf{b}(0) = \mathbb{b}_0 \text{ y } \mathbf{b}(1) = \mathbb{b}_n.$$

- Es **tangente** al polígono de control en los extremos (Figura 1.7).

$$\mathbb{b}'(0) = n \frac{w_1}{w_0} (\mathbb{b}_1 - \mathbb{b}_0)$$

$$\mathbb{b}'(1) = n \frac{w_{n-1}}{w_n} (\mathbb{b}_n - \mathbb{b}_{n-1}).$$

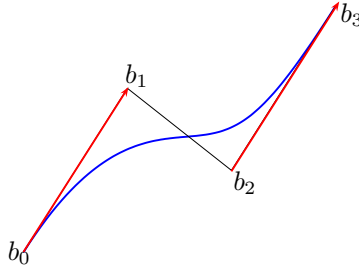


FIGURA 1.7. Tangencia del polígono de control. Pesos  $w_0 = 1, w_1 = 2, w_2 = 3, w_3 = 1$ .

- La curva de Bézier Racional yace en la **cápsula convexa** que definen sus puntos de control. Esta propiedad se desprende del hecho de que los puntos de la curva son combinaciones afines de los puntos de control y los  $w_i > 0$  para  $i = 0, \dots, n$ .
- Es **invariante bajo transformaciones afines**, es decir, dada una función afín  $\Phi$ , se tiene que

$$\Phi(\mathbf{b}(t)) = \Phi \left( \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbb{b}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} \right) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \Phi(\mathbb{b}_i) B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}.$$

- Si los pesos  $w_i$  son todos iguales, el denominador de la curva de Bézier racional es una constante, por lo tanto es una curva polinomial.

Las curvas de Bézier tienen otras propiedades útiles para la modelación geométrica que no se incluyen en este trabajo ya que no son necesarias para su desarrollo, por ejemplo la derivada de una curva de Bézier es otra curva de Bézier. Las curvas de Bézier racionales o polinomiales son fáciles de desplegar por medio del algoritmo de De Casteljaou, ver [1].

#### 4. Plano proyectivo: coordenadas homogéneas y baricéntricas.

*La geometría proyectiva es, en un sentido, la geometría de la imaginación.*

**-J Bloomenthal.**

Sea una recta  $l \subset \mathbb{R}^2$  y un punto  $O$  fuera de ella. Consideremos ahora la recta  $a$  definida por los puntos  $A \in l$  y  $O$ . Existe una correspondencia (llamada proyectividad) entre los puntos de la recta  $l$  y el haz de rectas que pasan por  $O$ . Sin embargo, en el plano euclídeo, esta correspondencia no es biunívoca. A la recta  $\hat{l}$  que pasa por  $O$  paralela a  $l$  no le corresponde ningún punto sobre  $l$ . Esto ilustra intuitivamente que es necesario completar la recta real con un punto adicional para construir la biyección. Este punto adicional se llama *punto en el infinito* (véase Figura 1.8). Si a los puntos de  $l$  se le añade el punto en el infinito, se obtiene *la recta proyectiva real*, la cual se define formalmente como sigue.

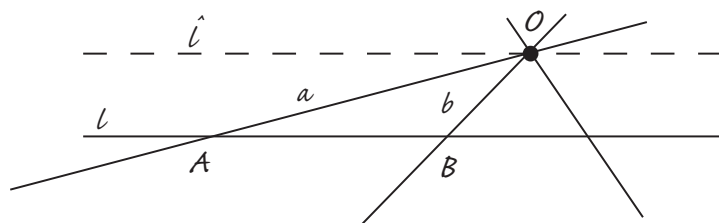


FIGURA 1.8. Modelo de  $\mathbb{P}(\mathbb{R})$  con la recta  $\hat{l}$  asociada al punto en el infinito.

**DEFINICIÓN 1.4.** Sean  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ . Se define una relación de equivalencia tal que, si  $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$  entonces  $x_1 = \lambda x_2$  &  $y_1 = \lambda y_2$  con  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Luego la recta proyectiva se define como  $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 - \{0\} / \sim$ , el conjunto de las clases de equivalencia de  $\mathbb{R}^2$ .

Geoméricamente los elementos de la recta proyectiva se representan por el conjunto de rectas por el origen de  $\mathbb{R}^2$  (véase Figura 1.9).

En general el elemento  $[x, y]$  representa cada elemento de  $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ . Esta representación se denomina coordenadas homogéneas. Nótese que si  $y = 1$ , se tiene exactamente la recta real y si  $y = 0$  el punto  $[1, 0]$  que es el punto en el infinito de la recta proyectiva en coordenadas homogéneas.

Observemos esta relación en el espacio euclídeo:

Sea  $\Pi$  un plano en  $\mathbb{R}^3$  y sea  $O$  un punto fuera de él. Considérese ahora todas las rectas definidas por los puntos  $A, B, \dots \in \Pi$  y el punto  $O$ . Existe una correspondencia entre los

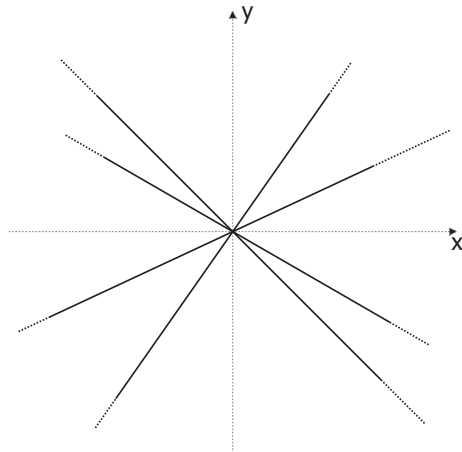


FIGURA 1.9. Representación geométrica de  $\mathbb{P}(\mathbb{R})$  mediante rectas por el origen.

puntos de  $\Pi$  y el haz de rectas que pasa por  $O$ . Sin embargo, existe un conjunto de rectas  $p, q, \dots$  que pasan por  $O$  y que yacen en el plano  $\hat{\Pi}$  paralelo a  $\Pi$  que no se corresponden con ningún punto de  $\Pi$ . Si denotamos por  $P_\infty, Q_\infty, \dots$  los puntos asociados a las rectas  $p, q, \dots$  en  $\hat{\Pi}$  y se completa el plano  $\Pi$  tal que la relación sea biunívoca, se construye el *plano proyectivo real* denotado por  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . El conjunto de los puntos en el infinito se corresponden con el conjunto de rectas que pasan por  $O$  y que son paralelas a  $\Pi$  se denomina *recta en el infinito* (véase Figura 1.10).

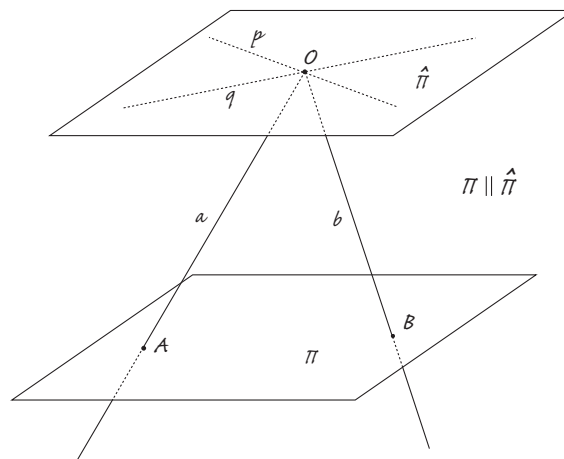


FIGURA 1.10. Modelo de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$  con las rectas  $p$  y  $q$  asociadas a puntos  $P$  y  $Q$  en el infinito.

DEFINICIÓN 1.5. Sean dos puntos  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$  en  $\mathbb{R}^3$ . Se define una relación de equivalencia tal que, si  $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ , entonces  $x_1 = \lambda x_2$ ,  $y_1 = \lambda y_2$  y  $z_1 = \lambda z_2$ , con  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ . El plano proyectivo se define como  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3 - \{0\} / \sim$ .

Es posible generalizar la definición 1.4 y 1.5 a un espacio  $n$ -dimensional y  $X$  un espacio vectorial cualquiera, de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 1.6. Dado un espacio vectorial  $X$  de dimensión  $n + 1$ , sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ . Se define una relación de equivalencia tal que, si  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$  entonces  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ , con  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ . El espacio proyectivo  $\mathbb{P}(X)$ , asociado a  $X$ , se define como  $\mathbb{P}(X) = X - \{0\} / \sim$ .

De ahora en adelante, utilizaremos  $\mathbb{P}^n$  para representar a  $\mathbb{P}(X)$  donde  $X$  es un espacio de dimensión  $n + 1$ . A continuación se presentan dos sistemas de coordenadas para trabajar en el espacio proyectivo.

**4.1. Coordenadas Homogéneas en  $\mathbb{P}^n$ .** Sea  $X$  un espacio vectorial de dimensión  $n + 1$  y sean  $U_0, \dots, U_n$  una base para este espacio. Cada vector  $\mathbf{x} \in X$  se puede escribir como una combinación lineal de los elementos de su base, es decir, existen coeficientes  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  tal que

$$\mathbf{x} = x_0 U_0 + x_1 U_1 + \dots + x_n U_n.$$

Ahora bien, para el punto  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^n$  relacionado a  $\mathbf{x}$ , los coeficientes están determinados, salvo la relación de equivalencia, por:

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Para todo  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

DEFINICIÓN 1.7. Dada una base  $U_0, U_1, \dots, U_n$  de un espacio vectorial  $X$ , denominamos coordenadas homogéneas de un punto  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^n$  respecto a la base  $U_i$ , a los coeficientes  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$  que determinan a cualquiera de los representantes  $\mathbf{x} \in X$  de  $[\mathbf{x}]$ .

Utilizar estas coordenadas presenta ciertas ventajas como la posibilidad de estudiar las curvas de Bézier racionales definidas en  $\mathbb{R}^m$  como una curva polinomial de  $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ .



4.1.1. *Homogenización de una curva:* Considérese una recta general en  $\mathbb{R}^2$

$$ax + by + c = 0.$$

Para estudiar esta recta en  $\mathbb{P}^2$ , utilizamos coordenadas homogéneas. Dado que  $[x, y] \sim [\hat{x}, \hat{y}]$  si y solo si  $x = \lambda\hat{x}$  y  $y = \lambda\hat{y}$  y tomando  $\lambda = \frac{1}{\hat{z}}$  se tiene que la recta  $ax + by + c = 0$  en  $\mathbb{R}^2$  se representa como  $a\hat{x} + b\hat{y} + \hat{z}c = 0$  en  $\mathbb{P}^2$ . Nótese que  $[x, y, z] \sim [\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$  entonces se satisface la ecuación  $x = \lambda\hat{x}, y = \lambda\hat{y}, z = \lambda\hat{z}$ . Luego, si

$$ax + by + cz = a\lambda\hat{x} + b\lambda\hat{y} + c\lambda\hat{z} = \lambda(a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z}) = 0.$$

De donde se deduce que el punto  $[x, y, z]$  yace sobre la recta independiente del representante de la clase.

Dada una cónica general en  $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Se tiene que su representación en  $\mathbb{P}^2$  en coordenadas homogéneas es:

$$f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = a\hat{x}^2 + b\hat{y}^2 + c\hat{x}\hat{y} + d\hat{x}\hat{z} + e\hat{y}\hat{z} + f\hat{z}^2 = 0.$$

Nótese que cada monomio de la cónica homogeneizada tiene grado dos y si  $[x, y, z]$  satisface la ecuación de  $f(x, y, z) = 0$ , esto no depende del representante evaluado.

**4.2. Coordenadas Baricéntricas.** Considérese un triángulo en  $\mathbb{R}^2$  de vértices  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y un cuarto punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ . Siempre es posible escribir  $\mathbf{p}$  como combinación baricéntrica de  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , es decir, existen coeficientes  $(s, t, u)$  tales que

$$\mathbf{p} = s(x_0, y_0) + t(x_1, y_1) + u(x_2, y_2).$$

Bajo la condición  $s + t + u = 1$  (véase Figura 1.11).

**DEFINICIÓN 1.8.** *Los coeficientes  $(s, t, u)$  se denominan coordenadas baricéntricas de  $\mathbf{p}$  respecto a  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ .*

Dados los puntos  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$   $\mathbf{p} = (px, py)$  y usando la expresión anterior, tenemos un sistema de tres ecuaciones de donde se despejan  $(s, t, u)$ .

$$\begin{cases} sx_0 + tx_1 + ux_2 = p_x \\ sy_0 + ty_1 + uy_2 = p_y \\ s + t + u = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por Cramer, tenemos que:

$$s = \frac{p_x y_1 + p_y x_2 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - p_x x_1 - p_x y_2}{x_0 y_1 - x_0 y_2 - y_0 x_1 + y_0 x_2 + x_1 y_2 - x_2 y_1}.$$

$$t = \frac{x_0 p_y + y_0 x_2 + p_x y_2 - x_2 p_y - p_x y_0 - y_2 x_0}{x_0 y_1 - x_0 y_2 - y_0 x_1 + y_0 x_2 + x_1 y_2 - x_2 y_1}.$$

$$u = \frac{x_0 y_1 + y_0 p_x + x_1 p_y - p_x y_1 - x_1 y_0 - p_y x_0}{x_0 y_1 - x_0 y_2 - y_0 x_1 + y_0 x_2 + x_1 y_2 - x_2 y_1}.$$

Las coordenadas baricéntricas son un tipo particular de coordenadas homogéneas, donde el plano  $s + t + u = 1$  se corresponde con los puntos del plano afín, y el plano  $s + t + u = 0$  con la recta en el infinito de  $\mathbb{P}^2$ .

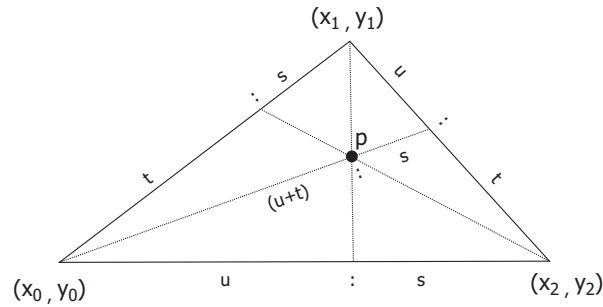


FIGURA 1.11. Relación  $\mathbf{p}$  con sus coordenadas baricéntricas.

Por ejemplo en la Figura 1.11, el punto  $(x_0, y_0)$  se corresponde con el punto  $(1, 0, 0)$  en coordenadas baricéntricas. Además son válidas las siguientes correspondencias:  $(x_1, y_1) \sim (0, 1, 0)$  y  $(x_2, y_2) \sim (0, 0, 1)$ . Usando estas coordenadas definiremos el dominio triangular de un parche de Bézier racional en el siguiente capítulo.

### 5. Cónicas de Bézier en el plano proyectivo.

DEFINICIÓN 1.9. Se llama **Cónica de Bézier Racional** a las curvas paramétricas de Bézier de grado dos dada por:

$$\mathbf{b}(t) = \frac{w_0 \mathbf{b}_0 (1-t)^2 + 2w_1 \mathbf{b}_1 t(1-t) + w_2 \mathbf{b}_2 t^2}{w_0 (1-t)^2 + 2w_1 t(1-t) + w_2 t^2}.$$

Para este trabajo utilizaremos únicamente esta clase de curvas de Bézier (véase Figura 1.12).

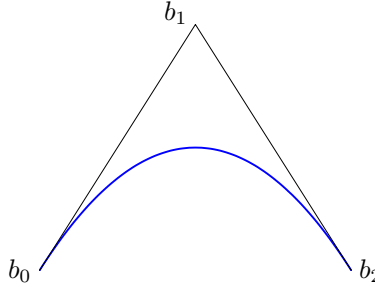


FIGURA 1.12. Cónica de Bézier.

Estudiemos el siguiente cambio de parámetro. Sean

$$t = \frac{\hat{t}}{\hat{\rho}(1-\hat{t}) + \hat{t}}, \quad (1-t) = \frac{\hat{\rho}(1-\hat{t})}{\hat{\rho}(1-\hat{t}) + \hat{t}}.$$

Con  $\rho \neq 0$ . Sustituyendo estas expresiones en  $\mathbf{b}(t)$ , se obtiene:

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\hat{\rho}^2 w_0 \mathbf{b}_0 (1-\hat{t})^2 + 2\hat{\rho} w_1 \mathbf{b}_1 \hat{t}(1-\hat{t}) + w_2 \mathbf{b}_2 \hat{t}^2}{\hat{\rho}^2 w_0 (1-\hat{t})^2 + 2\hat{\rho} w_1 \hat{t}(1-\hat{t}) + w_2 \hat{t}^2}.$$

La traza de la curva queda inalterada si se reemplaza cada peso por  $\hat{w}_i = \hat{\rho}^{2-i} w_i$ . Tomando  $\hat{\rho} = \sqrt{\frac{w_2}{w_0}}$ , se obtiene que  $\hat{w}_0 = w_2$ . Dividiendo los pesos por  $w_2$  tenemos que  $\hat{w}_0 = \hat{w}_2 = 1$ . Una cónica que satisfaga esta condición, se denomina *cónica en su forma estandar*. Por lo tanto, toda Cónica de Bézier se puede reparametrizar utilizando los cambios anteriores a su forma estandar, siempre y cuando  $\frac{w_2}{w_0} \geq 0$ .

Esta reparametrización deja únicamente a  $w_1$  como parámetro libre, restringiendo a  $w_0 = w_2 = 1$ . De ahora en adelante consideraremos únicamente la forma estandar de las cónicas racionales de Bézier, con  $w > 0$ , dada por:

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{b}_0 (1-t)^2 + 2w \mathbf{b}_1 t(1-t) + \mathbf{b}_2 t^2}{(1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2}.$$

Sea  $\mathbf{b}(t)$  una cónica de Bézier en  $\mathbb{R}^2$ , y sean  $\mathfrak{b}_0 = (x_0, y_0)$ ,  $\mathfrak{b}_1 = (x_1, y_1)$ , y  $w$  escalares positivos y  $\mathfrak{b}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$  sus puntos de control, entonces:

$$\mathbf{b}(t) = \left( \frac{x_0(1-t)^2 + 2wx_1t(1-t) + x_2t^2}{(1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2}, \frac{y_0(1-t)^2 + 2wy_1t(1-t) + y_2t^2}{(1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2} \right).$$

En  $\mathbb{P}^2$  esta cónica se define como:

$$[\mathbf{b}(t)] = [\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t), \mathbf{Z}(t)].$$

Donde

$$\mathbf{X}(t) = x_0(1-t)^2 + 2wx_1t(1-t) + x_2t^2.$$

$$\mathbf{Y}(t) = y_0(1-t)^2 + 2wy_1t(1-t) + y_2t^2.$$

$$\mathbf{Z}(t) = (1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2.$$

es decir una cónica polinomial en  $\mathbb{P}^2$  con puntos de control  $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ , donde  $\mathfrak{b}_0 = [x_0, y_0, 1]$ ,  $\mathfrak{b}_1 = [wx_1, wy_1, w]$ ,  $\mathfrak{b}_2 = [x_2, y_2, 1]$ . Nótese que la definición depende de los representantes de sus puntos de control (véase Figura 1.13). Es importante destacar que la cónica  $[\mathbf{b}(t)] \subset \mathbb{P}^2$  depende directamente del representante de clase escogido ya que  $\mathbb{P}^2$  no es un espacio vectorial, es decir:

$$[\mathfrak{b}_0](1-t)^2 + 2w[\mathfrak{b}_1]t(1-t) + [\mathfrak{b}_2]t^2 \neq [\mathfrak{b}_0(1-t)^2 + 2w\mathfrak{b}_1t(1-t) + \mathfrak{b}_2t^2].$$

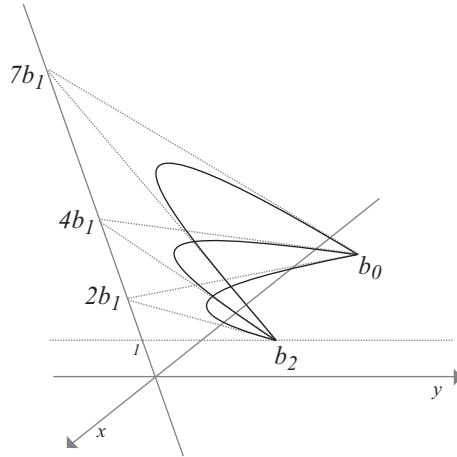


FIGURA 1.13. Cónica reparametrizada en  $\mathbb{P}^2$  y diferentes proyecciones.



$$(X, Y) = (x_0, y_0)t + (x_1, y_1)(1 - t).$$

Los polinomios correspondientes en coordenadas  $x$  y  $y$  de la parametrización son:

$$P_x = X - x_0t - x_1(1 - t) = X - t(x_1 - x_0) - x_1$$

$$P_y = Y - y_0t - y_1(1 - t) = Y - t(y_1 - y_0) - y_1$$

y la matriz de Sylvester asociada, es

$$Syl(P_x, P_y, t) = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ X - x_1 & Y - y_1 \end{pmatrix}.$$

de donde resulta:

$$Res(P_x, P_y, t) = (x_1 - x_0)(Y - y_1) - (y_1 - y_0)(X - x_1).$$

Despejando la ordenada resulta:

$$Y = \frac{(y_1 - y_0)(X - x_1) + y_1(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(X - x_1) + y_1.$$

Es posible constatar por medio de cualquier otro proceso de eliminación de parámetros, que la ecuación implícita de la recta satisface los puntos dados.

EJEMPLO 1.11. Sean  $f$  y  $g$  dos curvas implícitas como se muestra a continuación:

$$f = xy - 1 = 0.$$

$$g = x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

La matriz de Sylvester asociada es

$$Syl(f, g) = \begin{pmatrix} y & 0 & 1 \\ -1 & y & 0 \\ 0 & -1 & y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Nótese que el polinomio  $f$  se repite dos veces puesto que  $g$  es un polinomio de segundo grado y este, a su vez, solo se escribe una vez puesto que  $f$  es de primer grado. Luego, el resultante es

$$\text{Res}(f, g, x) = \det(\text{Syl}(f, g)) = y^4 - 4y^2 + 1.$$

Este resultado, donde se eliminó la variable  $x$ , permite obtener un polinomio en  $y$ , cuyas raíces son las posibles ordenadas de los puntos comunes de las curvas  $f$  y  $g$ . Esta aplicación sirve para calcular los puntos comunes de dos curvas algebraicas.

En nuestro caso particular, es de nuestro interés implícitar una cónica de Bézier. Dados

$$X = \frac{x_0(1-t)^2 + 2wx_1t(1-t) + x_2t^2}{(1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2}.$$

$$Y = \frac{y_0(1-t)^2 + 2wy_1t(1-t) + y_2t^2}{(1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2}.$$

Se construyen los polinomios.

$$Px = ((1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2)X - (x_0(1-t)^2 + 2wx_1t(1-t) + x_2t^2).$$

$$Py = ((1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2)Y - (y_0(1-t)^2 + 2wy_1t(1-t) + y_2t^2).$$

Sin pérdida de generalidad y por conveniencia, los puntos de control son  $\mathfrak{b}_0 = (0, 0)$ ,  $\mathfrak{b}_1 = (x_1, 0)$ ,  $\mathfrak{b}_2 = (x_2, y_2)$  (Véase Figura 1.14). Es posible escribir cualquier cónica de Bézier bajo este sistema de puntos de control, y para ubicarla en cualquier otra parte del plano, basta con aplicar una simple isometría. Con este cambio, los polinomios  $P_x$  y  $P_y$  se reducen a:

$$Px = ((1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2)X - (2wx_1t(1-t) + x_2t^2).$$

$$Py = ((1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2)Y - (y_2t^2).$$

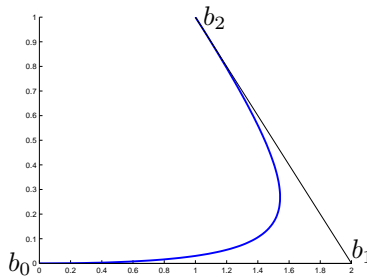


FIGURA 1.14. Cónica de Bézier con  $\mathfrak{b}_0 = (0, 0)$ ,  $\mathfrak{b}_1 = (2, 0)$  y  $\mathfrak{b}_2 = (1, 1)$ .

El polinomio resultante al eliminar el parámetro  $t$  es una cónica en variables  $(X, Y)$ , está dada por:

$$y_2^2 X^2 + (x_2^2 + 4x_1 w^2 (x_1 - x_2)) Y^2 - 4x_1^2 w^2 y_2 Y + 2y_2 (2x_1 w^2 - x_2) Y X = 0.$$

Esta expresión será muy útil en la construcción de un parche de Bézier cuadrático, tópico que estudiaremos en el próximo capítulo.



## Parches de Bézier triangulares

Para extender el capítulo anterior a un espacio tridimensional, es necesario presentar la teoría correspondiente a las superficies de Bézier. Para ello se definen los polinomios de Bernstein en 2D y se estudian sus propiedades. A partir de estos, se definen los parches triangulares de Bézier y sus propiedades para introducir los parches racionales triangulares de Bézier. Se presenta un método para calcular su expresión implícita y por último se estudia su representación en coordenadas homogéneas y tetraédricas.

### 1. Polinomios de Bernstein en 2D

El dominio de una superficie paramétrica es una sección del plano, existen dominios complicados como pentágonos, octágonos y, en general, cualquier polígono cerrado. Hay una variedad de polinomios base definidos de acuerdo al dominio, en particular los polinomios de Bernstein bidimensionales están definidos en dominios triangulares y rectangulares.

Para este trabajo se utilizan los polinomios de Bernstein con dominio triangular, los cuales están definidos por:

$$B_i^n(\mathbf{u}) = \binom{n}{ijk} u^i v^j w^k.$$

Donde  $\binom{n}{ijk}$  es el coeficiente multinomial y  $\mathbf{u} = [u, v, w] \in \mathbb{P}^2$  son las coordenadas baricéntricas del dominio, por lo que se considera la condición  $u + v + w = 1$ , para obtener los puntos en el plano afín.

A continuación se muestran algunos ejemplos de polinomios de Bernstein cúbicos y un diagrama triangular que se corresponde con cada función base del punto de control correspondiente (véase Figura 2.1).

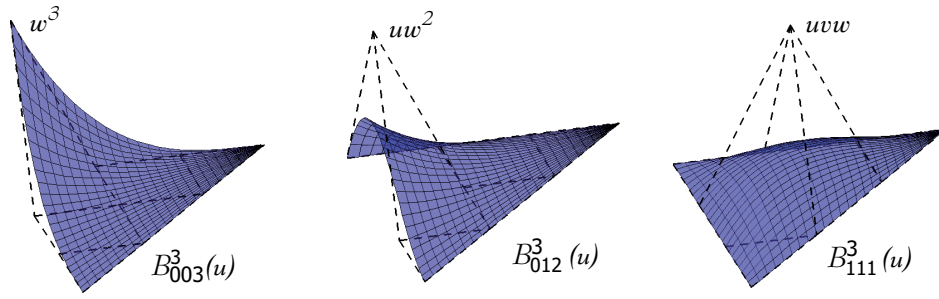
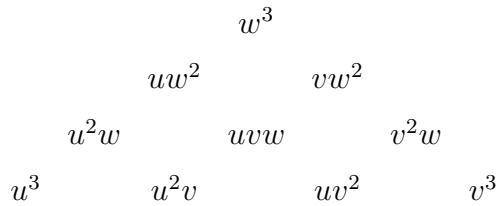


FIGURA 2.1. Polinomios de Bernstein de grado tres.



En el diagrama anterior, los polinomios de Bernstein ubicados en los extremos se corresponden con los puntos de control extremos del parche, en este caso,  $u^3$ ,  $v^3$  y  $w^3$  se corresponden con los puntos  $\mathfrak{b}_{300}$ ,  $\mathfrak{b}_{030}$  y  $\mathfrak{b}_{003}$ . Así mismo, los lados del parche están definidos por los polinomios ubicados a los lados del diagrama triangular, en el caso anterior por ejemplo, los polinomios  $u^2w$  y  $uw^2$  se corresponden con los puntos de control  $\mathfrak{b}_{201}$  y  $\mathfrak{b}_{102}$  del parche. Los polinomios de Bernstein multiparamétricos tienen las siguientes propiedades:

- **Partición de la unidad:** Para cada vector  $\mathbf{u}$  la suma de los polinomios es igual a uno.

$$1 = 1^n = (u + v + w)^n = \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{\mathbf{i}} u^i v^j w^k = \sum_{i+j+k=n} B_{ijk}^n(\mathbf{u}) = 1.$$

Donde  $\binom{n}{\mathbf{i}} = \frac{n!}{i!j!k!}$  es el coeficiente multinomial.

- **Son positivos:** para  $0 \leq u, v, w \leq 1$  todo polinomio de Bernstein es positivo.
- **Cápsula convexa:** De las dos propiedades anteriores y bajo la condición que los escalares  $w_i \geq 0$ , las superficies de Bézier están contenidas en la cápsula convexa que definen sus puntos de control.
- **Recursión:** Utilizando la propiedad de combinatoria

$$\binom{n}{\mathbf{i}} = \binom{n-1}{\mathbf{i} - e_1} + \binom{n-1}{\mathbf{i} - e_2} + \binom{n-1}{\mathbf{i} - e_3}.$$

Donde  $\mathbf{i} = (i, j, k)$  y  $e_1, e_2, e_3$  son vectores canónicos. Es posible demostrar que los polinomios de Bernstein satisfacen la siguiente recursión:

$$B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = uB_{\mathbf{i}-e_1}^{n-1}(\mathbf{u}) + vB_{\mathbf{i}-e_2}^{n-1}(\mathbf{u}) + wB_{\mathbf{i}-e_3}^{n-1}(\mathbf{u}).$$

Donde  $|\mathbf{i}| = n$ .

- **Condiciones de Dominio:** siempre que  $\mathbf{i} = (i, j, k)$  sea de la forma  $(n, 0, 0)$ ,  $(0, n, 0)$ , ó  $(0, 0, n)$ , el polinomio de Bernstein asociado será igual a 1 (véase Figura 2.2), es decir:

$$B_{(n,0,0)}^n(1, 0, 0) = 1 \quad B_{(0,n,0)}^n(0, 1, 0) = 1 \quad B_{(0,0,n)}^n(0, 0, 1) = 1.$$

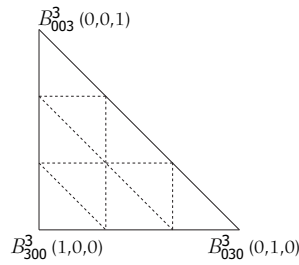


FIGURA 2.2. Dominio triangular y polinomios de Bernstein iguales a uno.

## 2. Parches de Bézier triangulares

Un parche de Bézier triangular es la generalización de una curva de Bézier a su forma bidimensional. Son construidos a partir de dominios triangulares, usando coordenadas baricéntricas, dado que estas son apropiadas para representar puntos en el espacio respecto a un dominio triangular canónico (véase Figura 2.3).

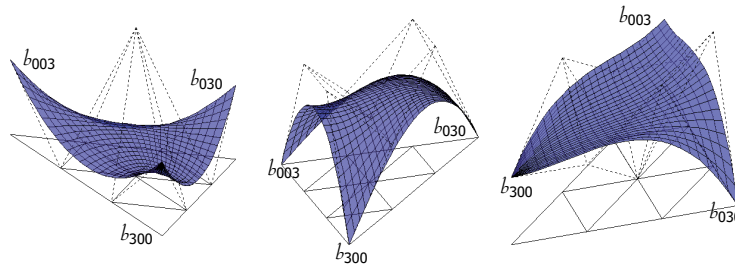


FIGURA 2.3. Parches triangulares de Bézier con su dominio.

DEFINICIÓN 2.1. Dado un conjunto de puntos de control un parche triangular de grado  $n$  se define como:

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbb{b}_i B_i^n(\mathbf{u}).$$

Donde  $\mathbb{b}_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{i} = (i, j, k)$  tal que  $|\mathbf{i}| = n$  y  $\mathbf{u} = [u, v, w]$  son las coordenadas baricéntricas del punto.

Dado que estos parches son la generalización de las curvas de Bézier, muchas de sus propiedades se derivan de las curvas.

- **Interpolación de extremos:** El parche interpola los tres puntos de control del dominio triangular (véase Figura 2.4), esto es

$$\mathbf{b}(1, 0, 0) = B_{(n,0,0)}^n(1, 0, 0) = \mathbb{b}_{n00}.$$

$$\mathbf{b}(0, 1, 0) = B_{(0,n,0)}^n(0, 1, 0) = \mathbb{b}_{0n0}.$$

$$\mathbf{b}(0, 0, 1) = B_{(0,0,n)}^n(0, 0, 1) = \mathbb{b}_{00n}.$$

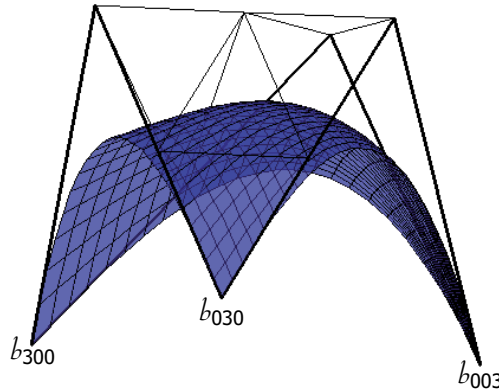


FIGURA 2.4. El parche interpola los tres puntos de control extremos.

- **Curvas borde:** Los puntos que definen la frontera de la cápsula convexa definen polígonos de control para las curvas de Bézier que delimitan al parche, y estas son a lo sumo de grado  $n$  (Figura 2.5).
- **Simetría:** Se puede reindexar el dominio triangular de manera que cualquiera de los tres puntos se corresponda con cualquiera de los índices  $(n, 0, 0)$ ,  $(0, n, 0)$ ,  $(0, 0, n)$ .

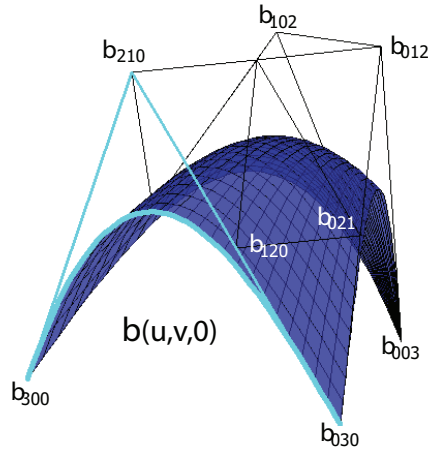


FIGURA 2.5. Curva delimitadora y su cápsula convexa.

Al evaluarlo se obtendría un parche con la misma traza del parche original. Esto es simplemente una reparametrización.

- **Invarianza Afín:** Sea  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una transformación afín. La estructura del parche es invariante bajo transformaciones afines:

$$\phi(\mathbf{b}(\mathbf{u})) = \phi \left( \sum_{|i|=n} \mathbb{b}_i B_i^n(\mathbf{u}) \right) = \sum_{|i|=n} \phi(\mathbb{b}_i) B_i^n(\mathbf{u}).$$

Esto significa que es suficiente aplicar  $\phi$  a cada uno de los los puntos de control como opuesto a aplicar  $\phi$  a cada punto del parche.

- **Cápsula Convexa:** Para  $0 \leq u, v, w \leq 1$ , el parche de Bézier es una combinación convexa de sus puntos de control, por lo que yace en la cápsula convexa que estos definen (véase Figura 2.6). La condición sobre las coordenadas  $[u, v, w]$  significa que el dominio considerado es el interior de un triángulo.
- **Planos tangentes:** Los planos tangentes  $t_i$ ,  $\mathbf{i} = (n, 0, 0), (0, n, 0), (0, 0, n)$  al parche cuadrático en sus extremos  $\mathbb{b}_{n00}, \mathbb{b}_{0n0}, \mathbb{b}_{00n}$  están definidos por el punto de interpolación y los dos puntos adyacentes correspondientes en el polígono de control (véase Figura 2.7).

$$\mathbb{b}_{n00} \longrightarrow t_{n00} = \mathbb{b}_{n00} + (\mathbb{b}_{p0q} - \mathbb{b}_{n00})\alpha + (\mathbb{b}_{pq0} - \mathbb{b}_{n00})\beta.$$

$$\mathbb{b}_{0n0} \longrightarrow t_{0n0} = \mathbb{b}_{0n0} + (\mathbb{b}_{qp0} - \mathbb{b}_{0n0})\alpha + (\mathbb{b}_{0pq} - \mathbb{b}_{0n0})\beta.$$

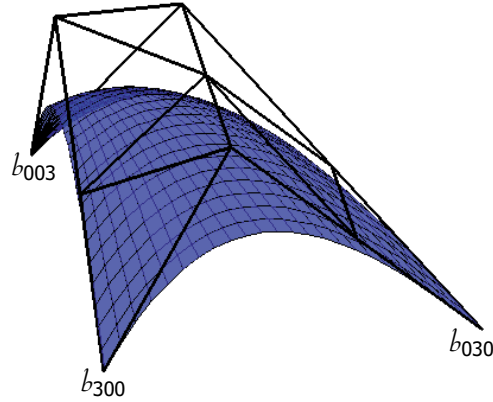


FIGURA 2.6. El parche yace en la cápsula convexa.

$$\mathbb{b}_{00n} \longrightarrow t_{00n} = \mathbb{b}_{00n} + (\mathbb{b}_{0qp} - \mathbb{b}_{00n})\alpha + (\mathbb{b}_{q0p} - \mathbb{b}_{00n})\beta.$$

Donde  $p = n - 1$ ,  $q = n - p$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

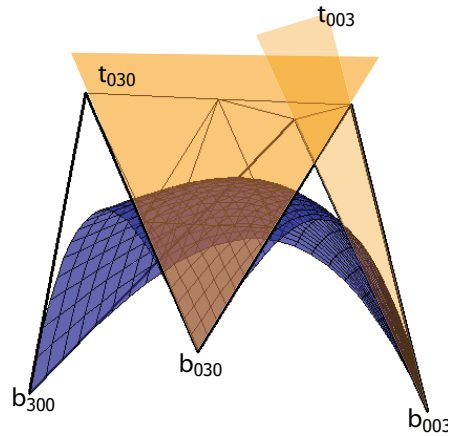


FIGURA 2.7. Parche de Bézier con planos tangentes

### 3. Parches de Bézier Racionales

DEFINICIÓN 2.2. *Un Parche de Bézier Racional se define como:*

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \sum_{|i|=n} \frac{w_i \mathbb{b}_i B_i^n(\mathbf{u})}{w_i B_i^n(\mathbf{u})}.$$

Donde los  $\mathbb{b}_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ ,  $0 \leq u, v, w \leq 1$  son las coordenadas baricéntricas del punto y los  $w_i$  son escalares positivos que se denominan **pesos**.

Para nuestros propósitos, de ahora en adelante se considerarán únicamente parches cuadráticos racionales de Bézier, es decir, los parches de la forma:

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=2} \frac{\mathfrak{b}_{\mathbf{i}} w_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})}{w_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})}.$$

Donde  $w_{200} = w_{020} = w_{002} = 1$ . Por lo tanto, los únicos puntos de control ponderados serán  $\mathfrak{b}_{011}$ ,  $\mathfrak{b}_{101}$  y  $\mathfrak{b}_{110}$ .

Estos parches heredan sus propiedades de sus contrapartes polinomiales.

- **Interpolación de extremos:** El parche racional de Bézier interpola los tres puntos de control del dominio triangular:  $\mathfrak{b}_{n00}$ ,  $\mathfrak{b}_{0n0}$ ,  $\mathfrak{b}_{00n}$ .
- **Curvas borde:** Las curvas de Bézier que delimitan al parche racional de Bézier están definidas por los puntos de control que definen la frontera de la cápsula convexa. Estas curvas de Bézier tienen a lo sumo grado  $n$ .
- **Simetría:** Se puede reindexar el dominio triangular de manera que cualquiera de los tres puntos extremos se corresponda con cualquiera de los índices  $(n, 0, 0)$ ,  $(0, n, 0)$  ó  $(0, 0, n)$ . Al evaluarlo se obtendría un parche racional de Bézier con la misma traza del parche original, lo cual simplemente es una reparametrización.
- **Invarianza Afín:** Sea  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una transformación afín. La estructura del parche racional es invariante bajo transformaciones afines:

$$\phi(\mathbf{b}(\mathbf{u})) = \phi \left( \sum_{|\mathbf{i}|=2} \frac{\mathfrak{b}_{\mathbf{i}} w_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})}{w_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})} \right) = \sum_{|\mathbf{i}|=2} \frac{\phi(\mathfrak{b}_{\mathbf{i}}) w_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})}{w_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})}.$$

Es decir, es suficiente aplicar  $\phi$  a cada uno de los los puntos de control como opuesto a aplicar  $\phi$  a cada punto del parche.

- **Cápsula Convexa:** Para  $0 \leq u, v, w \leq 1$ , el parche racional de Bézier es una combinación convexa de sus puntos de control, por lo que yace en la cápsula convexa que estos definen.
- **Planos tangentes:** Los planos tangentes  $t_{\mathbf{i}}$  al parche cuadrático racional de Bézier en sus extremos  $\mathfrak{b}_{200}$ ,  $\mathfrak{b}_{020}$ ,  $\mathfrak{b}_{002}$  están definidos por el punto de interpolación y los dos puntos adyacentes correspondientes en el polígono de control:

$$\mathfrak{b}_{200} \longrightarrow t_{200} = \mathfrak{b}_{200} + (w_{101} \mathfrak{b}_{101} - \mathfrak{b}_{200})\alpha + (w_{110} \mathfrak{b}_{110} - \mathfrak{b}_{200})\beta.$$

$$\mathbb{b}_{020} \longrightarrow t_{020} = \mathbb{b}_{020} + (w_{110}\mathbb{b}_{110} - \mathbb{b}_{020})\alpha + (w_{011}\mathbb{b}_{011} - \mathbb{b}_{020})\beta.$$

$$\mathbb{b}_{002} \longrightarrow t_{002} = \mathbb{b}_{002} + (w_{011}\mathbb{b}_{011} - \mathbb{b}_{002})\alpha + (w_{101}\mathbb{b}_{101} - \mathbb{b}_{002})\beta.$$

Donde  $\alpha, \beta \in (\mathbb{R})$ .

La razón fundamental para usar parches de Bézier triangulares racionales es que por medio de los pesos, es posible cambiar la traza de una superficie de Bézier sin necesidad de cambiar los puntos de control ni las condiciones de tangencia en los extremos (véase Figura 2.8).

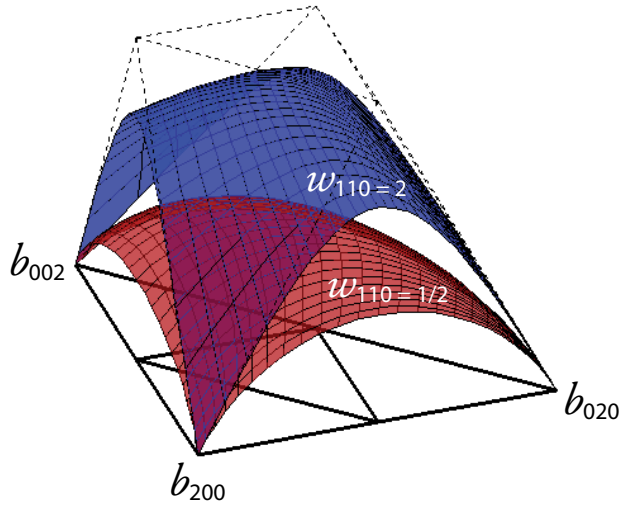


FIGURA 2.8. Parches racionales de Bézier definidos por la misma cápsula convexa al variar los pesos.

#### 4. Implicitación de un parche racional cuadrático de Bézier.

Para esta sección se generaliza las coordenadas baricéntricas a un espacio tridimensional. Para ello basta considerar como dominio, un tetraedro, y cada punto del espacio como combinación tetraédrica de sus vértices.

Sean  $\mathbb{b}_{200} = [x_{200}, y_{200}, z_{200}, 1]$ ,  $\mathbb{b}_{020} = [x_{020}, y_{020}, z_{020}, 1]$ ,  $\mathbb{b}_{002} = [x_{002}, y_{002}, z_{002}, 1] \in \mathbb{P}^3$  tres puntos de control que definen el dominio para un parche triangular racional de Bézier y  $\mathbb{p} = [p_x, p_y, p_z, p_q]$  un cuarto punto en  $\mathbb{P}^3$  no coplanar con  $\mathbb{b}_{200}, \mathbb{b}_{020}, \mathbb{b}_{002}$ . Considérese  $T$  el tetraedro de vértices  $\mathbb{b}_{200}, \mathbb{b}_{020}, \mathbb{b}_{002}, \mathbb{p}$ . Siempre es posible escribir cualquier punto del espacio, y en particular el parche racional como combinación tetraédrica de los vértices de  $T$ , es decir, existen coeficientes  $[U, V, W, S]$  tales que:



$$\mathbf{b}(\mathbf{u}_0) = U_0 \mathbb{b}_{200} + V_0 \mathbb{b}_{020} + W_0 \mathbb{b}_{002} + S_0 \mathbb{P}.$$

Bajo la condición  $U + V + W + S = 1$ .

Los coeficientes  $[U_0, V_0, W_0, S_0]$  se denominan coordenadas tetraédricas de  $\mathbf{b}(\mathbf{u}_0)$  respecto a  $\mathbb{b}_{200}, \mathbb{b}_{020}, \mathbb{b}_{002}, \mathbb{P}$ . Sin pérdida de generalidad y por conveniencia, se hace la siguiente correspondencia entre los vértices del tetraedro y la combinación tetraédrica canónica:

$$\mathbb{b}_{200} = [x_{200}, y_{200}, z_{200}, 1] \rightarrow [1, 0, 0, 0].$$

$$\mathbb{b}_{020} = [x_{020}, y_{020}, z_{020}, 1] \rightarrow [0, 1, 0, 0].$$

$$\mathbb{b}_{002} = [x_{002}, y_{002}, z_{002}, 1] \rightarrow [0, 0, 1, 0].$$

$$\mathbb{P} = [p_x, p_y, p_z, p_q] \rightarrow [0, 0, 0, 1].$$

Dado que los puntos de control intermedios yacen en las caras de  $T$ , su representación en coordenadas tetraédricas es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{b}_{110} &= U_{110} \mathbb{b}_{200} + V_{110} \mathbb{b}_{020} + W_{110} \mathbb{b}_{002} + S_{110} \mathbb{P} \\ &= [U_{110}, V_{110}, 0, S_{110}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{b}_{011} &= U_{011} \mathbb{b}_{200} + V_{011} \mathbb{b}_{020} + W_{011} \mathbb{b}_{002} + S_{011} \mathbb{P} \\ &= [0, V_{011}, W_{011}, S_{011}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{b}_{101} &= U_{101} \mathbb{b}_{200} + V_{101} \mathbb{b}_{020} + W_{101} \mathbb{b}_{002} + S_{101} \mathbb{P} \\ &= [U_{101}, 0, W_{101}, S_{101}] \end{aligned}$$

Nótese que las coordenadas nulas en los puntos intermedios se corresponden los vértices del triángulo que yacen en la cara de  $T$  respectiva (véase Figura 2.9). El parche racional cuadrático triangular de Bézier escrito en función de sus coordenadas tetraédricas queda como sigue:

$$\mathbf{b}(\mathbf{u})_x = u^2 + 2U_{110}w_{110}uv + 2U_{101}w_{101}uw.$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{u})_y = v^2 + 2V_{110}w_{110}uv + 2V_{011}w_{011}vw.$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{u})_z = w^2 + 2W_{101}w_{101}uw + 2W_{011}w_{011}vw.$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{u})_q = 2S_{110}w_{110}uv + 2S_{101}w_{101}uw + 2S_{011}w_{011}vw.$$

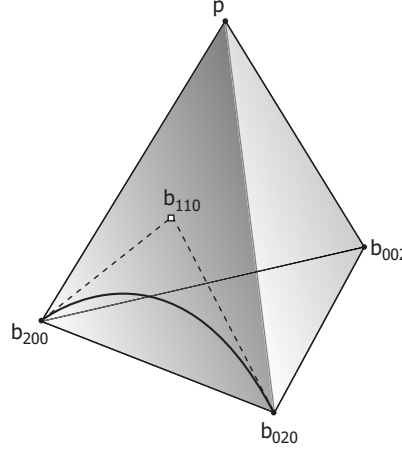


FIGURA 2.9. Dominio tetraédrico con un punto de control intermedio.

Luego, la representación del parche en  $\mathbb{R}^3$  en sus coordenadas afines será:

$$X = \frac{u^2 + 2U_{110}w_{110}uv + 2U_{101}w_{101}uw}{2S_{110}w_{110}uv + 2S_{101}w_{101}uw + 2S_{011}w_{011}vw}.$$

$$Y = \frac{v^2 + 2V_{110}w_{110}uv + 2V_{011}w_{011}vw}{2S_{110}w_{110}uv + 2S_{101}w_{101}uw + 2S_{011}w_{011}vw}.$$

$$Z = \frac{w^2 + 2W_{101}w_{101}uw + 2W_{011}w_{011}vw}{2S_{110}w_{110}uv + 2S_{101}w_{101}uw + 2S_{011}w_{011}vw}.$$

Usando la técnica de eliminación de parámetros, basada en las matrices de Sylvester, se eliminan los parámetros  $u, v, w$ . Sean:

$$\mathbf{P}_x = (2S_{110}w_{110}uv + 2S_{101}w_{101}uw + 2S_{011}w_{011}vw)X$$

$$- (u^2 + 2U_{110}w_{110}uv + 2U_{101}w_{101}uw)$$

$$\mathbf{P}_y = (2S_{110}w_{110}uv + 2S_{101}w_{101}uw + 2S_{011}w_{011}vw)Y$$

$$- (v^2 + 2V_{110}w_{110}uv + 2V_{011}w_{011}vw)$$

$$\mathbf{P}_z = (2S_{110}w_{110}uv + 2S_{101}w_{101}uw + 2S_{011}w_{011}vw)Z$$

$$- (w^2 + 2W_{101}w_{101}uw + 2W_{011}w_{011}vw)$$

Por la extensión del resultado se hará el siguiente cambio, únicamente con propósitos demostrativos:

$$U_{110} = \hat{a}, U_{101} = \hat{b}, V_{110} = \hat{c}, V_{011} = \hat{d}, W_{101} = \hat{e}, W_{011} = \hat{f}$$

$$S_{110} = \hat{g}, S_{101} = \hat{h}, S_{011} = \hat{i}.$$

Se calculan los resultantes de los polinomios  $\mathbf{P}_x, \mathbf{P}_y, \mathbf{P}_z$  obteniendo dos polinomios en función de  $v, w$ .

$$\begin{aligned} Res(\mathbf{P}_x(v, w), \mathbf{P}_y(v, w), u) &= 4vw_{011}\hat{i}w(-\hat{i}w_{011}vw + 2\hat{b}w_{101}^2\hat{h}w^2 + 2wv\hat{b}w_{101}\hat{g}w_{110} + \\ &2wv\hat{a}w_{110}\hat{h}w_{101} + 2v^2\hat{a}w_{110}^2\hat{g})Y^2 - 4v(v\hat{g}w_{110} + \hat{h}w_{101}w)(-v^2\hat{g}w_{110} - 2\hat{g}w\hat{d}w_{011}w_{110}v + \\ &2v\hat{c}\hat{i}w_{011}ww_{110} - v\hat{h}w_{101}w - 2\hat{h}w_{101}w^2\hat{d}w_{011})YX - 4v(2v^2\hat{a}w_{110}^2\hat{c}\hat{i}w_{011}w + v^2\hat{b}w_{101}w\hat{g}w_{110} - \\ &w_{011}\hat{i}wv^2 - 2v\hat{d}w_{011}^2w^2\hat{i} + v^3\hat{a}w_{110}^2\hat{g} + 2\hat{b}w_{101}^2w^3\hat{h}\hat{d}w_{011} + 2v^2\hat{a}w_{110}^2\hat{g}\hat{d}w_{011}w + v\hat{b}w_{101}^2w^2\hat{h} + \\ &2v\hat{b}w_{101}w^2\hat{c}w_{110}\hat{i}w_{011} + 2v\hat{a}w_{110}\hat{h}w_{101}w^2\hat{d}w_{011} + v^2\hat{a}w_{110}\hat{h}w_{101}w + 2v\hat{b}w_{101}w^2\hat{g}w_{110}\hat{d}w_{011})Y + \\ &4v^2\hat{c}w_{110}(-v^2\hat{g}w_{110} - 2\hat{g}w\hat{d}w_{011}w_{110}v + 2v\hat{c}\hat{i}w_{011}ww_{110} - v\hat{h}w_{101}w - 2\hat{h}w_{101}w^2\hat{d}w_{011})X + v^2(v + \\ &2w\hat{d}w_{011})(-v + 4v\hat{a}w_{110}^2\hat{c} - 2w\hat{d}w_{011} + 4\hat{b}w_{101}w\hat{c}w_{110}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Res(\mathbf{P}_y(v, w), \mathbf{P}_z(v, w), u) &= -2vw(v\hat{e}w_{101} - 2v\hat{f}w_{011}\hat{c}w_{110} + 2w\hat{d}w_{011}\hat{e}w_{101} - w\hat{c}w_{110}) + \\ &2w(-\hat{h}w_{101}w^2 - 2w\hat{f}w_{011}v\hat{h}w_{101} + 2w\hat{i}w_{011}v\hat{e}w_{101} - wv\hat{g}w_{110} - 2\hat{f}w_{011}v^2\hat{g}w_{110})Y - \\ &2v(-v^2\hat{g}w_{110} - 2\hat{g}w\hat{d}w_{011}w_{110}v + 2v\hat{c}\hat{i}w_{011}ww_{110} - v\hat{h}w_{101}w - 2\hat{h}w_{101}w^2\hat{d}w_{011})Z \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo el resultante a los polinomios obtenidos, y sacando  $w$  factor común, resulta una superficie implícita de grado cuatro en términos de  $X, Y$  y  $Z$ . Por la extensión del resultado sustituyen los coeficientes de cada monomio por  $A_{xyz}$  donde el subíndice se corresponde con el grado de cada monomio:

$$\begin{aligned} &A_{101}ZX + A_{110}YX + A_{210}X^2Y + A_{001}Z + A_{012}YZ^2 + A_{201}ZX^2 + A_{022}Y^2Z^2 + A_{220}X^2Y^2 + \\ &A_{211}X^2YZ + A_{130}XY^3 + A_{200}X^2 + A_{121}XY^2Z + A_{210}X^2Y + A_{020}Y^2 + A_{310}X^3Y + A_{011}YZ + \\ &A_{103}XZ^3 + A_{013}YZ^3 + A_{111}XYZ + A_{202}X^2Z^2 + A_{100}X + A_{301}X^3Z + A_{030}Y^3 + A_{002}Z^2 + \\ &A_{003}Z^3 + A_{010}Y + A_{102}XZ^2 + A_{003}X^3 + A_{021}Y^2Z + A_{012}YZ^2 + A_{031}Y^3Z + A_{000} \end{aligned}$$

Por ejemplo, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 A_{003} = & 6\hat{a}\hat{b}\hat{h}\hat{d}w_{101}^2w_{011}^2(4\hat{b}^2\hat{c}\hat{g}w_{101}^2w_{110}^2 - 4\hat{a}\hat{b}\hat{h}\hat{c}w_{101}^2w_{110}^2 + \hat{b}\hat{h}w_{101}^2 - 2\hat{b}\hat{i}\hat{c}w_{101}w_{110}w_{011} + \\
 & 8\hat{a}\hat{b}\hat{i}\hat{c}^2w_{101}w_{110}^3w_{011} - 2\hat{b}\hat{d}\hat{g}w_{101}w_{110}w_{011} - 8\hat{a}\hat{b}\hat{g}\hat{d}\hat{c}w_{101}w_{110}^3w_{011} - 2\hat{a}\hat{d}\hat{h}w_{101}w_{110}w_{011} + \\
 & 8\hat{a}^2\hat{h}\hat{c}\hat{d}w_{101}w_{110}^3w_{011} - 4\hat{a}\hat{i}\hat{c}\hat{d}w_{110}^2w_{011}^2 + 4\hat{d}^2\hat{g}w_{110}^2w_{011}^2 + \hat{d}\hat{i}w_{011}^2)
 \end{aligned}$$

El resto de los coeficientes se puede obtener calculando estos resultantes con un programa de cálculo simbólico como Maple 7.

### 5. Dominio de un parche de Bézier expresado en coordenadas baricéntricas y afines.

En el capítulo anterior se presentaron las coordenadas baricéntricas como una terna de coeficientes  $(u, v, w)$  que representan a un punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  respecto a un dominio triangular en el plano. Usando la condición  $u + v + w = 1$ , el dominio triangular baricéntrico se escribe como un dominio triangular afín que depende únicamente de dos variables  $(s, t)$  (Figura 2.10):

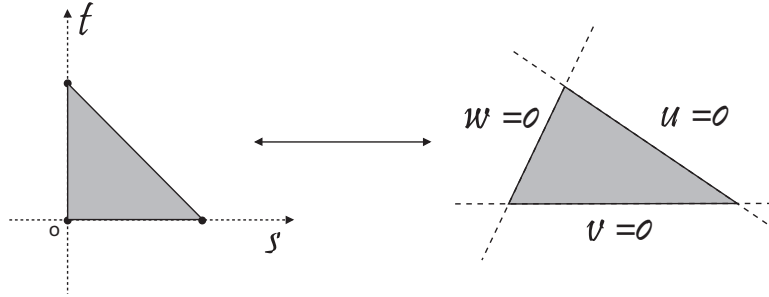


FIGURA 2.10. Dominio en coordenadas  $(u, v, w)$  y coordenadas  $(s, t)$ .

$$\mathbf{p} = u(x_0, y_0) + v(x_1, y_1) + w(x_2, y_2).$$

Su representación en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ux_0 + vx_1 + wx_2 \\ uy_0 + vy_1 + wy_2 \\ u + v + w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con este cambio de base el dominio queda expresado en términos de dos variables, por lo que cada punto del parche ahora depende de  $(s, t)$ , donde

$$s = ux_0 + vx_1 + wx_2, \quad t = uy_0 + vy_1 + wy_2, \quad 1 = u + v + w.$$

### 6. Parche de Bézier en coordenadas homogéneas.

Sea  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  un parche cuadrático racional triangular de Bézier y sean  $\{\mathbb{b}_i\}_{|i|=2}$ ,  $\mathbf{i} = (i, j, k)$  sus puntos de control en  $\mathbb{R}^3$ . Para estudiar el parche en el espacio proyectivo, se procede de manera similar al caso ya visto de curvas de Bézier racionales en  $\mathbb{P}^2$ . Esta superficie en  $\mathbb{P}^3$  se define como:

$$[\mathbf{b}(\mathbf{u})] = [\mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y, \mathbf{b}_z, \mathbf{b}_w].$$

Donde

$$\mathbf{b}_x = x_{200}u^2 + x_{020}v^2 + x_{002}w^2 + 2x_{110}uv + 2x_{101}uw + 2x_{011}vw.$$

$$\mathbf{b}_y = y_{200}u^2 + y_{020}v^2 + y_{002}w^2 + 2y_{110}uv + 2y_{101}uw + 2y_{011}vw.$$

$$\mathbf{b}_z = z_{200}u^2 + z_{020}v^2 + z_{002}w^2 + 2z_{110}uv + 2z_{101}uw + 2z_{011}vw.$$

$$\mathbf{b}_w = u^2 + v^2 + w^2 + 2w_{110}uv + 2w_{101}uw + 2w_{011}vw.$$

Obsérvese que el parche depende del representante de clase que se escoja para sus puntos de control, es decir:

$$\sum_{|i|=n} \frac{w_i [\mathbb{b}_i] B_i^n(\mathbf{u})}{w_i B_i^n(\mathbf{u})} \neq \sum_{|i|=n} \left[ \frac{w_i \mathbb{b}_i B_i^n(\mathbf{u})}{w_i B_i^n(\mathbf{u})} \right].$$

Con esta representación se puede considerar un parche de Bézier en  $\mathbb{P}^3$ , como un parche polinomial. Esta representación la usaremos en el próximo capítulo.

## Construcción de un parche de Bézier cuadrático.

En general la expresión implícita de un parche cuadrático racional de Bézier, tiene grado cuatro, en este capítulo se presenta un algoritmo que permite construir un parche racional cuadrático de Bézier cuya expresión implícita tiene grado algebraico dos, sin tener conocimiento previo de la cuádrica donde yace. Para ello, se escogen libremente los tres puntos de control e interpolación  $\mathfrak{b}_{020}$ ,  $\mathfrak{b}_{002}$ ,  $\mathfrak{b}_{200}$ , dos de los tres planos tangentes sobre estos puntos y los puntos de control intermedios  $\mathfrak{b}_{101}$ ,  $\mathfrak{b}_{011}$ ,  $\mathfrak{b}_{110}$  y sus pesos correspondientes con ciertas características específicas.

### 1. Construcción de un Haz de Superficies Cuadráticas.

El propósito del algoritmo es construir un parche racional de Bézier  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  cuya ecuación implícita sea de grado dos. Para esto se define una familia general de superficies cuádricas  $Q_\lambda$  sobre la cual se construye el parche cónico. Este haz es construido a partir de una cónica de Bézier en un plano.

**1.1. Cónica de Bézier.** Sean  $\mathfrak{b}_{020} = (x_{020}, y_{020})$ ,  $\mathfrak{b}_{002} = (x_{002}, y_{002})$ ,  $\mathfrak{b}_{200} = (x_{200}, y_{200})$  y  $d_0 = (d_0^1, d_0^2)$  cuatro puntos en  $\mathbb{R}^2$ . Existe una familia  $C_w(t)$  de cónicas racionales de Bézier estandar, definidas por  $\mathfrak{b}_{020}$ ,  $\mathfrak{b}_{002}$ ,  $d_0$ , donde cada cónica  $C_w$  se corresponde con un peso  $w$ ,

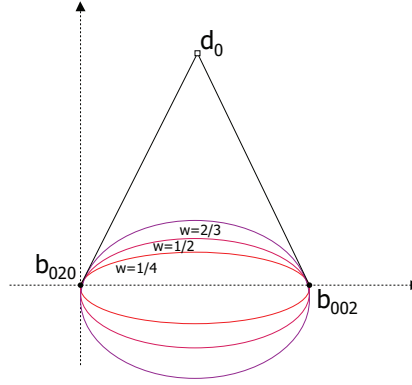
$$C_w(t) = \left( \frac{x_{020}t^2 + 2td_0^1(1-t)w + x_{002}(1-t)^2}{(t^2 + 2t(1-t)w + (1-t)^2)}, \frac{y_{020}t^2 + 2td_0^2(1-t)w + y_{002}(1-t)^2}{(t^2 + 2t(1-t)w + (1-t)^2)} \right)$$

Sin pérdida de generalidad y por conveniencia, se consideran los puntos de control de la siguiente manera (véase Figura 3.1):

$$\mathfrak{b}_{020} = (0, 0), \mathfrak{b}_{200} = (x_{200}, y_{200}), \mathfrak{b}_{002} = (x_{002}, 0) \text{ y } d_0 = (d_0^1, d_0^2)$$

Quedando el haz de cónicas definido por:

$$(3.1) \quad C_w(t) = \left( \frac{2wd_0^1 t(1-t) + x_{002}(1-t)^2}{t^2 + 2wt(1-t) + (1-t)^2}, \frac{2wd_0^2 t(1-t)}{t^2 + 2wt(1-t) + (1-t)^2} \right)$$

FIGURA 3.1. Haz de cónicas  $C_w$ .

Usando la técnica de eliminación de parámetros, basada en las matrices de Sylvester, se obtienen los polinomios:

$$P_x = X(t^2 + 2wt(1-t) + (1-t)^2) - (2wd_0^1 t(1-t) + x_{002}(1-t)^2)$$

$$P_y = Y(t^2 + 2wt(1-t) + (1-t)^2) - (2wd_0^2 t(1-t))$$

Calculando  $\text{Res}(P_x, P_y, t)$ , se obtiene la expresión implícita de la cónica.

$$C_w : 4d_0^2 w^2 (x_{002} d_0^1 Y - (2d_0^1 - x_{002}) Y X + d_0^2 (X^2 - x_{002} X)) + (4d_0^1 w^2 (d_0^1 - x_{002}) + x_{002}^2) Y^2 = 0$$

donde  $C_w$  es la familia de cónicas dada por 3.1 en  $\mathbb{R}^2$  indexada por el peso  $w$ . Considérese un tercer punto de interpolación  $\mathfrak{b}_{200}$  con el cual se fija el parámetro libre de  $C_w$ . Al sustituir  $\mathfrak{b}_{200}$  en la familia de cónicas, se obtiene que:

$$(3.2) \quad w = \frac{F_3}{2(\sqrt{F_1 F_2})}$$

donde  $F_0, F_1, F_2, F_3$  son las áreas signadas correspondientes a los triángulos  $\Delta_0(\mathfrak{b}_{002}, d_0, \mathfrak{b}_{020})$ ,  $\Delta_1(\mathfrak{b}_{200}, d_0, \mathfrak{b}_{020})$ ,  $\Delta_2(\mathfrak{b}_{002}, d_0, \mathfrak{b}_{200})$ , y  $\Delta_3(\mathfrak{b}_{002}, \mathfrak{b}_{200}, \mathfrak{b}_{020})$  respectivamente, más claramente:

$$A(\Delta(\mathbf{xyz})) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  y  $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ . Sustituyendo la expresión 3.2 en  $C_w$  se obtiene la expresión implícita de la cónica determinada por los puntos  $\mathbb{b}_{020}$ ,  $\mathbb{b}_{002}$ ,  $\mathbb{b}_{200}$  y las rectas tangentes  $t_{020} = y_{200}^2 d_0^2 X x_{002} - y_{200}^2 Y d_0^1 x_{002}$  y

$$t_{002} = -y_{200}^2 d_0^2 x_{002} (X - x_{002}) + (y_{200}^2 x_{002} d_0^1 - y_{200}^2 x_{002}^2) Y$$

$$\mathbf{c}(X, Y) : F_3^2 (-d_0^1 Y + d_0^2 X)^2 + F_1 F_2 x_{002}^2 Y^2 - F_3^2 x_{002} (d_0^2 - Y) (-d_0^1 Y + d_0^2 X) = 0$$

Por su construcción, la cónica  $\mathbf{c}$  está definida por tres puntos de interpolación y dos rectas tangentes predeterminadas. Antes de trabajar en un espacio tridimensional, definimos el triángulo  $\Delta(d_0, d_1, d_2)$  cuyos vértices son los puntos de intersección de las rectas tangentes a la cónica por los puntos de interpolación (véase Figura 3.2). Este triángulo será la base del tetraedro a partir del cual se definirán los puntos de control intermedios del parche de Bézier.

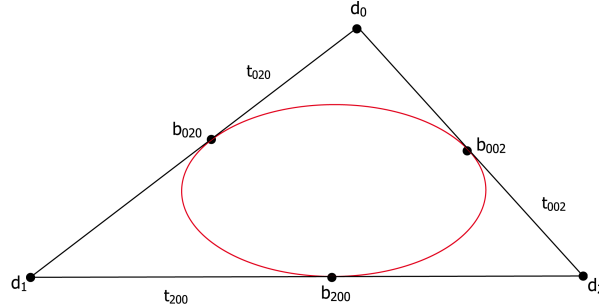


FIGURA 3.2. Cónica Bézier con sus rectas tangentes.

Las rectas  $t_{020}$  y  $t_{002}$  son tangentes a  $\mathbf{c}(X, Y)$  en  $\mathbb{b}_{020}$  y  $\mathbb{b}_{002}$  respectivamente, se preestablecen para definir la cónica  $\mathbf{c}(X, Y)$  y la recta  $t_{200}$  se obtiene a partir de la expresión de  $\mathbf{c}$ , más aún:

$$t_{200} = (y_{200}^2 d_0^2 (x_{002} - 2x_{200}) + y_{200}^3 (2d_0^1 - x_{002}))(X - x_{200}) \\ + (y_{200}^2 (d_0^1 (x_{002} - 2x_{200}) + x_{200} x_{002}) + y_{200} d_0^2 x_{200} (x_{200} - 2x_{002}))(Y - y_{200})$$

Los otros dos vértices del triángulo,  $d_1$  y  $d_2$  se obtienen calculando las intersecciones entre  $t_{020}$ ,  $t_{200}$  y  $t_{002}$ :



$$d_1 = \left( \frac{F_3 d_0^1}{2F_2 + F_3}, \frac{F_3 d_0^2}{2F_2 + F_3} \right)$$

$$d_2 = \left( \frac{2F_1 x_{002} + F_3 d_0^1}{2F_1 + F_3}, \frac{F_3 d_0^2}{2F_1 + F_3} \right)$$

**1.2. Construcción de un haz de superficies cuádricas  $Q_\lambda$ .** El haz de cuádricas se genera a partir de un cono de base  $\mathbf{c}(X, Y) = 0$ . Consideremos la cónica  $\mathbf{c}(X, Y)$  en un espacio tridimensional, existe una inclusión natural de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $(X, Y) \rightarrow (X, Y, 0)$ . Los puntos de control que definen a  $\mathbf{c}$  quedan ahora expresados como:

$$\mathbf{b}_{020} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{b}_{002} = (x_{002}, 0, 0), \quad \mathbf{b}_{200} = (x_{200}, y_{200}, 0)$$

$$d_0 = (d_0^1, d_0^2, 0), \quad d_1 = (d_1^1, d_1^2, 0), \quad d_2 = (d_2^1, d_2^2, 0)$$

Considérese un punto en el espacio  $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2)$  tal que no sea coplanar con  $\mathbf{b}_{020}, \mathbf{b}_{002}, \mathbf{b}_{200}$ , es decir,  $p_2 \neq 0$ . Sea  $C$  el cono que tiene por base  $\mathbf{c}$  y vértice  $\mathbf{p}$  (véase Figura 3.3), su ecuación implícita está dada por:

$$C : -2F_3^2 F_0 d_0^2 p_2^2 X + 2F_3^2 F_0 p_2^2 d_0^1 Y + F_3^2 (d_0^2)^2 X^2 p_2^2 - p_2^2 (-x_{200}^2 F_1 F_2 - (d_0^1)^2 F_3^2 + F_3^2 x_{200} d_0^1) Y^2 + d_0^2 F_3^2 p_2^2 (-2d_0^1 + x_{200}) Y X + 2F_3^2 F_0 p_2 (d_0^2 p_0 - p_1 d_0^1) Z + (F_3^2 (d_0^2)^2 p_0^2 + x_{200}^2 F_1 F_2 p_1^2 + 2F_3^2 F_0 p_1 p_0 - 2F_0 F_3^2 d_0^2 p_0 - 2F_3^2 d_0^1 p_1 d_0^2 p_0 + F_3^2 (d_0^1)^2 p_1^2 + 2F_3^2 F_0 d_0^1 p_1 - F_3^2 x_{200} p_1^2 d_0^1) Z^2 - p_2 (-2F_3^2 x_{200} d_0^1 p_1 + 2x_{200}^2 F_1 F_2 p_1 + 2F_0 F_3^2 d_0^1 - 2p_0 d_0^2 d_0^1 F_3^2 + 2F_3^2 (d_0^1)^2 p_1 + 2F_0 F_3^2 p_0) Z Y - d_0^2 F_3^2 p_2 (x_{200} p_1 - 2p_1 d_0^1 + 2d_0^2 p_0 - 2F_0) X Z = 0$$

El haz de cuádricas se define por:

$$(3.3) \quad Q_\lambda = C + \lambda Z^2$$

donde cada superficie  $Q_\lambda$  está indexada por el parámetro  $\lambda \in \mathbb{R}$  (véase Figura 3.4).

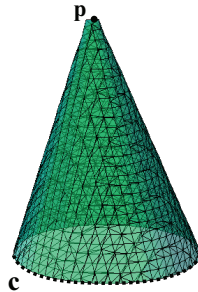
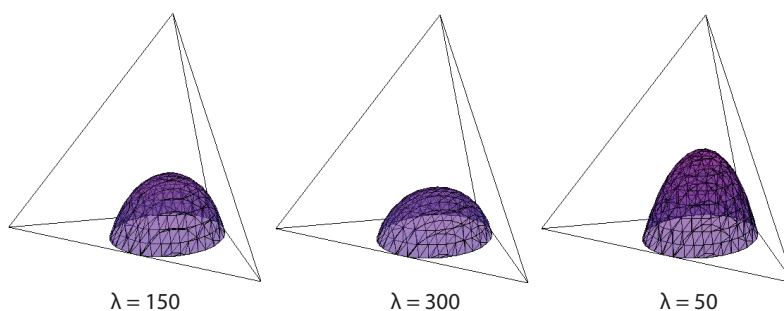


FIGURA 3.3. Cono  $C(X, Y, Z) = 0$  de vértice  $\mathbf{p}$  y de base  $\mathbf{c}$ .

FIGURA 3.4. Variación de la cuádrica en función de  $\lambda$ .

## 2. Construcción del parche de Bézier

Sean  $\tau_{020}$ ,  $\tau_{002}$ , y  $\tau_{200}$  los planos definidos por el punto  $\mathbf{p}$  y las rectas  $t_{020}$ ,  $t_{002}$  y  $t_{200}$  respectivamente. Estos planos son tangentes al cono en  $\mathfrak{b}_{020}$ ,  $\mathfrak{b}_{002}$ , y  $\mathfrak{b}_{200}$  respectivamente (véase Figura 3.5). Nótese que:

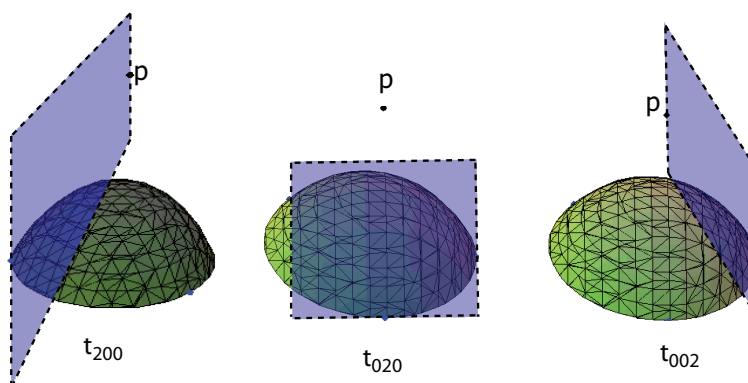


FIGURA 3.5. planos tangentes a las cuádricas.

- Los planos  $\tau_{020}$ ,  $\tau_{002}$ ,  $\tau_{200}$  son tangentes a cada cuádrica del haz  $Q_\lambda$ .
- Los planos tangentes se intersectan en las rectas dadas por los puntos  $\overline{\mathbf{p}d_i}$ ,  $i = 0, 1, 2$  y por las propiedades de los parches cuádricos de Bézier los puntos intermedios yacen sobre estas rectas.

Esta construcción del haz  $Q_\lambda$  se basa en el comportamiento de las cónicas de Bézier. Dada una cónica de Bézier general  $\mathbf{b}(t)$ , para todo  $w$ , la cónica es tangente a las rectas  $\widehat{\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1}$ ,  $\widehat{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2}$  en los puntos  $\mathfrak{b}_0$  y  $\mathfrak{b}_2$  respectivamente. Cuando el peso  $w$  tiende a infinito, la cónica de Bézier tiende a las rectas  $\widehat{\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1}$  y  $\widehat{\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1}$ , que definen la cápsula convexa. Así mismo, al hacer  $w = 0$

se obtiene la recta doble  $\widehat{b_0 b_2}$ . Análogamente, ocurre para el haz  $Q_\lambda$ , si  $\lambda = 0$ , la cuádrica es la superficie extrema, es decir, el cono  $C$ . Tomando  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $Q_\lambda$  tiende al plano doble que conforma la base de  $C$ , y si  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ , se obtiene una superficie cuadrática, cuyos planos tangentes en los puntos extremos son  $\tau_{020}, \tau_{002}, \tau_{200}$ .

Para asegurar que el parche de Bézier yace sobre alguna superficie  $Q_\lambda$ , es necesario restringir sus puntos de control intermedios. Dado que  $\tau_{020}, \tau_{002}, \tau_{200}$  son los planos tangentes al parche, se definen los puntos  $b_{110}, b_{101}, b_{011}$  tales que estén sobre las rectas  $\overline{p d_i}$  respectivas, más claramente:

$$b_{011} = \sigma_0 \mathbf{p} + \tau_0 d_0$$

$$b_{110} = \sigma_1 \mathbf{p} + \tau_1 d_1$$

$$b_{101} = \sigma_2 \mathbf{p} + \tau_2 d_2$$

donde  $\sigma_i, \tau_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 0, 1, 2$ ) (véase Figura 3.6).

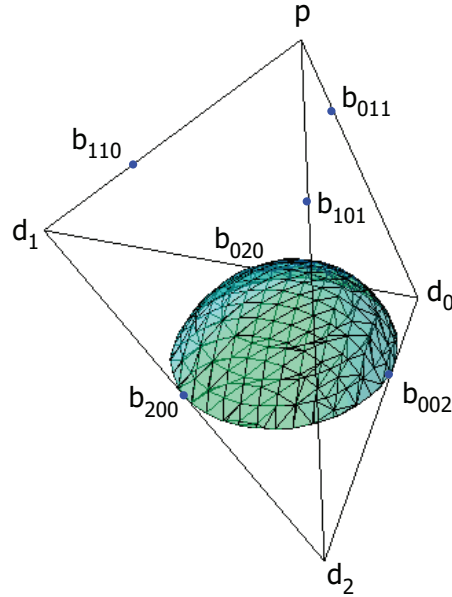


FIGURA 3.6. Ubicación de los puntos de control intermedios del parche de Bézier.

Es necesario encontrar valores adecuados para  $\sigma_i, \tau_i$  tales que el parche de Bézier sea algún  $Q_\lambda$ . Un parche racional de Bézier en su forma estándar pondera con pesos únicamente sus puntos de control intermedios. Para calcular los pesos en este caso particular, estudiemos la expresión de sus puntos de control en el espacio proyectivo. Conviene recordar que los

puntos de control extremos del parche tiene pesos  $w_{020} = w_{002} = w_{200} = 1$ , por lo tanto, sus coordenadas homogéneas son:

$$\mathbb{b}_{020} = [0, 0, 0, 1], \quad \mathbb{b}_{002} = [x_{002}, 0, 0, 1], \quad \mathbb{b}_{200} = [x_{200}, y_{200}, 0, 1]$$

Los vértices del tetraedro se escriben como:

$$d_0 = [w_0 d_0^1, w_0 d_0^2, 0, w_0], \quad d_1 = [w_1 d_1^1, w_1 d_1^2, 0, w_1], \quad d_2 = [w_2 d_2^1, w_2 d_2^2, 0, w_2], \quad \mathbf{p} = [p_0, p_1, p_2, 1]$$

donde  $w_0 = w$  es el peso asociado a  $d_0$ . Sin pérdida de generalidad, se considera  $p_3 = 1$ . Así, los puntos de control intermedios en  $\mathbb{P}^3$  están dados por:

$$\mathbb{b}_{011} = [\sigma_0 p_0 + \tau_0 d_0^1, \sigma_0 p_1 + \tau_0 d_0^2, \sigma_0 p_2, \sigma_0 + \tau_0 w_0]$$

$$\mathbb{b}_{110} = [\sigma_1 p_0 + \tau_1 d_0^1, \sigma_1 p_1 + \tau_1 d_0^2, \sigma_1 p_2, \sigma_1 + \tau_1 w_1]$$

$$\mathbb{b}_{101} = [\sigma_2 p_0 + \tau_2 d_0^1, \sigma_2 p_1 + \tau_2 d_0^2, \sigma_2 p_2, \sigma_2 + \tau_2 w_2]$$

de donde se obtienen los pesos correspondientes a los puntos intermedios:

$$w_{011} = \sigma_0 + \tau_0 w_0, \quad w_{110} = \sigma_1 + \tau_1 w_1 \quad \text{y} \quad w_{101} = \sigma_2 + \tau_2 w_2$$

Finalmente, el parche de Bézier en sus coordenadas homogéneas queda expresado como:

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = [\mathbf{X}(\mathbf{u}), \mathbf{Y}(\mathbf{u}), \mathbf{Z}(\mathbf{u}), \mathbf{W}(\mathbf{u})]$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{u}) = & 2((\tau_0 d_0^1 w_0 + \sigma_0 p_0)vw + (-\tau_2 x_{002} d_0^1 y_{200} + 2\tau_2 x_{002} d_0^2 x_{200} + \sigma_2 p_0)uw \\ & + (\sigma_1 p_0 - \tau_1 y_{200} x_{002} d_0^1)uv) + x_{200}u^2 + x_{002}w^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{u}) = 2((\sigma_0 p_1 + \tau_0 d_0^2 w_0)vw + (\tau_2 y_{200} d_0^2 x_{002} + \sigma_2 p_1)uw + (\sigma_1 p_1 - \tau_1 y_{200} d_0^2 x_{002})uv) + y_{200}u^2$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{u}) = 2(\sigma_1 p_2 uv + \sigma_2 p_2 uw + \sigma_0 p_2 vw)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{u}) = 2((\tau_0 w_0 + \sigma_0)vw + (\sigma_2 + \tau_2 w_2)uw + (\tau_1 w_1 + \sigma_1)uv) + u^2 + v^2 + w^2$$

con:

$$w_0 = \frac{F_3}{2(\sqrt{F_1 F_2})}, \quad w_1 = 2F_2 + F_3 \quad \text{y} \quad w_2 = 2F_1 + F_3$$

Para obtener la expresión de los puntos de control intermedios y pesos, se sustituye la parametrización del parche de Bézier en la expresión implícita del haz de cuádricas (3.3):

$$X = \frac{\mathbf{X}(\mathbf{u})}{\mathbf{W}(\mathbf{u})} \quad Y = \frac{\mathbf{Y}(\mathbf{u})}{\mathbf{W}(\mathbf{u})} \quad Z = \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{u})}{\mathbf{W}(\mathbf{u})}$$

obteniendo un sistema de seis ecuaciones. El valor de  $\lambda$  se calcula de la ecuación más sencilla del sistema, resultando:

$$\lambda_0 = \frac{-x_{002}^2 d_0^2 y_{200}^2 (\tau_0^2 - 1)}{4\sigma_0^2}$$

Al sustituir  $\lambda_0$  en el haz, se obtiene un sistema de cinco ecuaciones en función de los  $\sigma_i$  y  $\tau_i$ :

$$I = \begin{cases} F_1\sigma_0^2 - F_0\sigma_1^2 - 4F_1F_0F_2\sigma_0^2\tau_1^2 + F_0\sigma_1^2\tau_0^2 = 0 \\ \sigma_1\sqrt{F_1F_2}\tau_0^2 + 2\sqrt{F_1F_2}F_1\tau_2\sigma_0 + 2F_2F_1\tau_1\tau_0\sigma_0 - \sigma_1\sqrt{F_1F_2} = 0 \\ -F_0\sqrt{F_1F_2}\sigma_1\sigma_2 - 4F_0F_1\sqrt{F_1F_2}F_2\sigma_0^2\tau_2\tau_1 - F_2F_1\sigma_0^2\tau_0 + F_0\sigma_1\sigma_2\sqrt{F_1F_2}\tau_0^2 = 0 \\ \sigma_2\sqrt{F_1F_2}\tau_0^2 - \sigma_2\sqrt{F_1F_2} - 2F_2F_1\tau_0\tau_2\sigma_0 - 2\sqrt{F_1F_2}F_2\tau_1\sigma_0 = 0 \\ F_2\sigma_0^2 - 4F_1F_0F_2\sigma_0^2\tau_2^2 - F_0\sigma_2^2 + F_0\sigma_2^2\tau_0^2 = 0 \end{cases}$$

La ecuación intermedia del sistema  $I$  es linealmente dependiente del resto por lo que el sistema se reduce a  $II$ . Con la finalidad de reducir el número de ecuaciones, se utilizaron las bases de Gröbner para obtener la base del anillo de estos polinomios. Sin embargo, los resultados no fueron concluyentes, por lo que se resolvió el sistema  $II$  de ecuaciones usando Maple 7.

$$II = \begin{cases} F_1\sigma_0^2 - F_0\sigma_1^2 - 4F_1F_0F_2\sigma_0^2\tau_1^2 + F_0\sigma_1^2\tau_0^2 = 0 \\ \sigma_1\sqrt{F_1F_2}\tau_0^2 + 2\sqrt{F_1F_2}F_1\tau_2\sigma_0 + 2F_2F_1\tau_1\tau_0\sigma_0 - \sigma_1\sqrt{F_1F_2} = 0 \\ \sigma_2\sqrt{F_1F_2}\tau_0^2 - \sigma_2\sqrt{F_1F_2} - 2F_2F_1\tau_0\tau_2\sigma_0 - 2\sqrt{F_1F_2}F_2\tau_1\sigma_0 = 0 \\ F_2\sigma_0^2 - 4F_1F_0F_2\sigma_0^2\tau_2^2 - F_0\sigma_2^2 + F_0\sigma_2^2\tau_0^2 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene un conjunto de ocho soluciones para  $\sigma_i$  y  $\tau_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , de las cuales existe un subconjunto de seis soluciones que anulan el parámetro  $\lambda_0$  los cuales no fueron considerados ya que si  $\lambda_0 = 0$ , entonces la cuádrica se reduce al cono  $C$ . Sólo resultaron útiles dos soluciones no triviales:

$$S_1 \begin{cases} \sigma_2 = 0 \\ \tau_1 = -\frac{\tau_0 F_1}{4\sqrt{F_0 F_2} \sqrt{F_1 F_2}} \\ \tau_2 = -\frac{1}{4\sqrt{F_0 F_1}} \\ \sigma_1 = \frac{\sigma_0 F_1}{\sqrt{F_0 F_1}} \end{cases}$$

con  $\sigma_0$  y  $\tau_0$  parámetros libres.

$$S_2 \begin{cases} \sigma_0 = \vartheta(\tau_0, \tau_2) \sigma_2 \\ \sigma_1 = \frac{\sigma_2(-\tau_0 \sqrt{F_1 F_2} + 4F_1 F_2 \tau_2 \vartheta(\tau_0, \tau_2))}{F_2} \\ \tau_1 = \frac{1}{4} \frac{-\sqrt{F_1 F_2} \tau_0^2 + \sqrt{F_1 F_2} + 4F_2 F_1 \tau_0 \tau_2 \vartheta(\tau_0, \tau_2)}{\sqrt{F_1 F_2} F_2 \vartheta(\tau_0, \tau_2)} \end{cases}$$

con  $\tau_0, \tau_2$  y  $\sigma_2$  parámetros libres y  $\vartheta(\tau_0, \tau_2) = \frac{\sqrt{F_2(16F_0 F_1 \tau_2^2 - 1)F_0(-1 + \tau_0^2)}}{16F_2 F_0 F_1 \tau_2^2 - F_2}$ . Usando una de estas soluciones, se calcula el parche de Bézier asociado

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \left( \frac{\mathbf{X}(\mathbf{u})}{\mathbf{W}(\mathbf{u})}, \frac{\mathbf{Y}(\mathbf{u})}{\mathbf{W}(\mathbf{u})}, \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{u})}{\mathbf{W}(\mathbf{u})} \right)$$

el cual satisface la ecuación del haz. Analizando las soluciones, se tiene que:

- Para  $S_1$ , el parámetro  $\sigma_2 = 0$ . Dado que los parámetros  $\sigma_i, \tau_i$   $i = 0, 1, 2$  son razones entre el punto  $\mathbf{p}$  y los  $d_i$  correspondientes, se deduce que el punto de control  $\mathfrak{b}_{101} = d_2$ , nótese que  $\tau_2$  no depende de ningún  $\sigma_i$  ó  $\tau_i$ . Como consecuencia de lo anterior, la curva de Bézier definida por el punto de control  $\mathfrak{b}_{101}$ , es una sección de la cónica (véase Figura 3.8). Los únicos parámetros libres son  $\sigma_0$  y  $\tau_0$  por lo que el punto de control asociado  $\mathfrak{b}_{011}$  es el único que se puede fijar libremente sobre la recta  $\overline{\mathbf{p}d_0}$ . Para esta solución en particular y considerando la definición de  $\sigma_1$  y  $\tau_1$ , existe una relación directa entre  $\mathfrak{b}_{011}$  y  $\mathfrak{b}_{110}$ , es decir, los parámetros  $\sigma_0$  y  $\tau_0$  definen a ambos puntos simultáneamente. A pesar de que para cualquier valor de  $\sigma_0, \tau_0$ , la ecuación del parche de Bézier generada por  $S_1$  cumple con la expresión del haz de cuádricas, la representación geométrica no siempre es estable. Esto se debe a que para cierto valores de  $\sigma_0$  y  $\tau_0$ , la expresión  $\mathbf{W}(\mathbf{u})$  se anula ocasionando

que el parche contenga un punto en el infinito. Para evitar esto, el parámetro  $\sigma_0$  debe ser positivo y  $\tau_0 \in (-1, 1)$ . Ambas condiciones restringen la ubicación de los puntos  $b_{110}$  y  $b_{011}$  a un entorno cercano al tetraedro  $\mathbf{p}d_0d_1d_2$ , generando parches con una representación geométrica estable. A pesar de la inestabilidad numérica del algoritmo, el objetivo principal se cumple para la solución  $S_1$ . A continuación se muestran varios ejemplos:

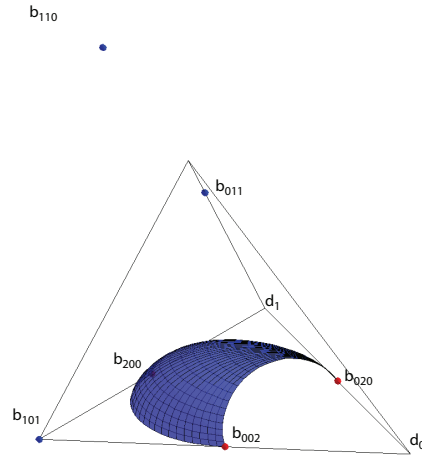


FIGURA 3.7. Parche generado por  $S_1$ , con  $\tau_0 = \frac{1}{9}$  y  $\sigma_0 = \frac{1}{5}$ .

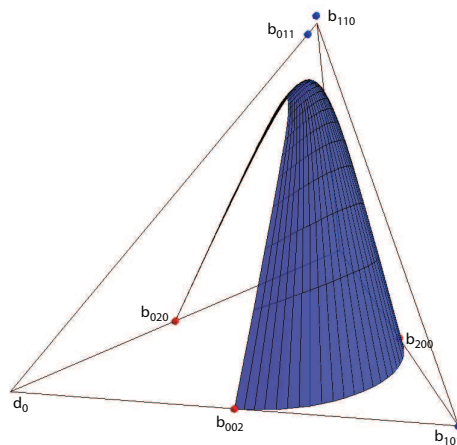
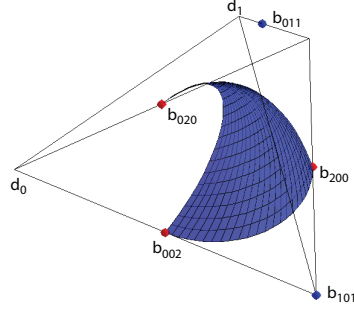


FIGURA 3.8. Parche generado por  $S_1$ , con  $\tau_0 = \frac{1}{4}$  y  $\sigma_0 = 4$ .

$b_{110}$  ♦FIGURA 3.9. Parche generado por  $S_1$ , con  $\tau_0 = -\frac{1}{2}$  y  $\sigma_0 = \frac{1}{2}$ .

- En la solución  $S_2$ , el único punto de control que se puede ubicar libremente es  $b_{101}$  ya que está definido por los parámetros libres  $\sigma_2$  y  $\tau_2$ . Sin embargo, observando la expresión de  $\vartheta(\tau_0, \tau_2)$  se tiene que, para no anular el denominador, necesariamente  $\tau_2 \neq \frac{1}{4\sqrt{F_0 F_1}}$ , más aún es necesario que el valor de  $\tau_2$  sea lo suficientemente pequeño para que la expresión de  $\vartheta(\tau_0, \tau_2)$  no tienda a cero, anulando así los parámetros dependientes. Además es necesario que el argumento de la raíz de  $\vartheta(\tau_0, \tau_2)$  sea positivo, por lo que el valor de  $\tau_0$  depende de las áreas signadas. Es necesario que  $(-1 + \tau_0^2)$  sea negativo,  $\tau_0 \in (-1, 1)$ . En caso contrario  $\tau_0 \in \mathbb{R} - \{(-1, 1)\}$ . De nuevo, a pesar de que para todo valor de  $\tau_0, \tau_2$  y  $\sigma_2$  la ecuación del parche de Bézier generado por la solución  $S_2$  satisface la expresión del haz de cuádricas, la representación gráfica no siempre es estable, debido a las razones expuestas para  $S_1$ . Para generar un parche geoméricamente estable, existe una codependencia entre los parámetros  $\sigma_2$  y  $\tau_2$ , tal que, si  $\tau_2 > 0$ ,  $\sigma_2 \in (0, 1)$  y si  $\tau_2 < 0$ ,  $\sigma_2 > 0$ . Al asignar valores dentro de estas condiciones, se ubica el punto  $b_{011}$ . El tercer punto de control  $b_{110}$  asociado a  $\tau_1$  y  $\sigma_1$  se fija automáticamente al definir los dos anteriores. A continuación se muestran varios ejemplos de parches generados con esta solución:



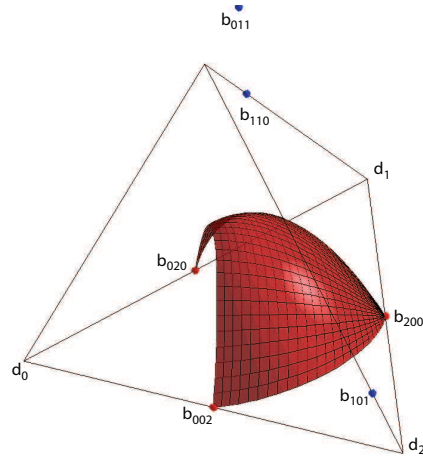


FIGURA 3.10. Parche generado por  $S_2$ , con  $\sigma_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\tau_2 = \frac{\sqrt{1}}{100}$  y  $\tau_0 = \frac{1}{3}$ .

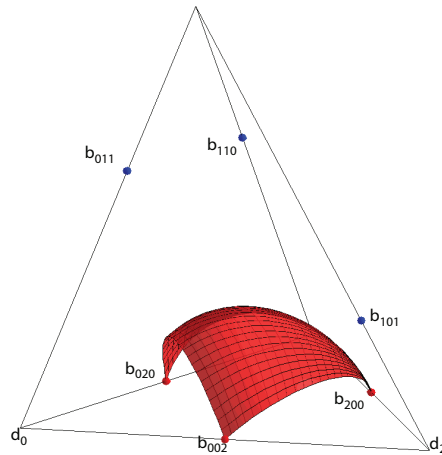


FIGURA 3.11. Parche generado por  $S_2$ , con  $\sigma_2 = \frac{1}{4}$ ,  $\tau_2 = -\frac{1}{50}$  y  $\tau_0 = \frac{1}{3}$ .

A continuación se desarrollan completamente algunos ejemplos:

### 2.1. Ejemplos:

EJEMPLO 3.1. Sean

$$\mathfrak{b}_{020} = (0, 0, 0), \mathfrak{b}_{200} = (2, 2, 0), \mathfrak{b}_{002} = (4, 0, 0), d_0 = (2, -2, 0)$$

los tres puntos de control extremos del parche y el punto  $d_0$  con el cual se fijan las rectas tangentes a la cónica. Siguiendo el algoritmo presentado en este trabajo se tiene que:

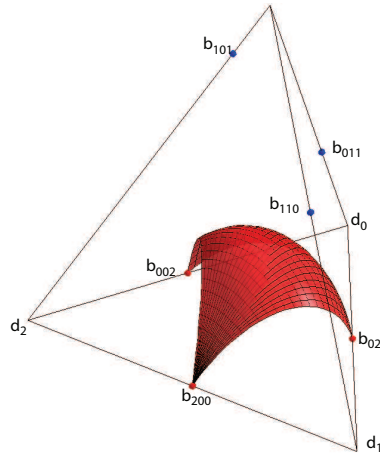


FIGURA 3.12. Parche generado por  $S_2$ , con  $\sigma_2 = \frac{1}{5}$ ,  $\tau_2 = -\frac{1}{20}$  y  $\tau_0 = \frac{1}{2}$ .

- La cónica de Bézier  $\mathbf{c}(X, Y)$  dada por estos cuatro puntos y las condiciones de tangencia es: (véase Figura 3.13).

$$\mathbf{c}(X, Y) = -24Y^2 - 8X^2 + 32X + 32Y$$

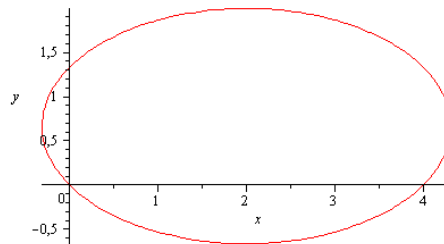


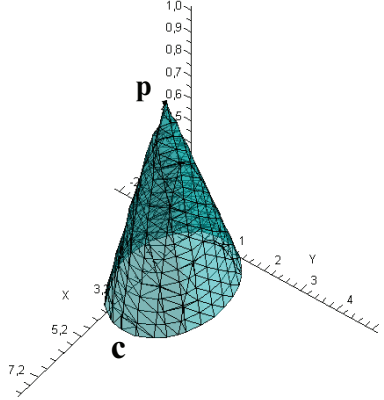
FIGURA 3.13. Cónica de Bézier que interpola a  $\mathfrak{b}_{020}$ ,  $\mathfrak{b}_{002}$  y  $\mathfrak{b}_{200}$

- Sea  $\mathbf{p} = (3, 1, 1)$  el vértice del cono (véase Figura 3.14). Su ecuación implícita está dada por:

$$C : -24Y^2 + 16YZ + 32Z^2 - 8X^2 + 16XZ + 32X - 128Z + 32Y = 0$$

- Luego el haz de superficies cuadráticas generado a partir de  $C$  es:

$$Q_\lambda = -24Y^2 + 16YZ + 32Z^2 - 8X^2 + 16XZ + 32X - 128Z + 32Y + \lambda Z^2$$

FIGURA 3.14. Cono de base  $\mathbf{c}$  y vértice  $\mathbf{p}$ 

- Para construir el parche en  $\mathbb{P}^3$ , se homogenizan los puntos de control extremos, los puntos  $d_i$  y el vértice  $\mathbf{p}$ .

$$\mathbb{b}_{020} = [0, 0, 0, 1], \quad \mathbb{b}_{002} = [4, 0, 0, 1], \quad \mathbb{b}_{200} = [2, 2, 0, 1]$$

Los vértices del tetraedro se escriben como:

$$d_0 = \left[1, -1, 0, \frac{1}{2}\right], \quad d_1 = [-16, 16, 0, 8], \quad d_2 = [-48, -16, 0, -8], \quad \mathbf{p} = [3, 1, 1, 1]$$

- Se definen los puntos de control intermedios en función de los coeficientes  $\sigma_i, \tau_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , como sigue:

$$\mathbb{b}_{011} = \left[3\tau_0 + \tau_0, \tau_0 - \tau_0, \sigma_0, \tau_0 + \frac{1}{2}\tau_0\right]$$

$$\mathbb{b}_{110} = [3\tau_1 - 16\tau_1, \tau_1 + 16\tau_1, \sigma_1, \tau_1 + 8\tau_1]$$

$$\mathbb{b}_{101} = [3\tau_2 - 48\tau_2, \tau_2 - 16\tau_2, \sigma_2, \tau_2 - 8\tau_2]$$

- La expresión homogénea del parche es:

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = [\mathbf{X}(\mathbf{u}), \mathbf{Y}(\mathbf{u}), \mathbf{Z}(\mathbf{u}), \mathbf{W}(\mathbf{u})], \quad \text{donde}$$

$$\mathbf{X}(\mathbf{u}) = 4w^2 + (6\sigma_1 - 32\tau_1)uv + 2u^2 + (6\sigma_0 + 2\tau_0)vw + (6\sigma_2 - 96\tau_2)uw$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{u}) = (2\sigma_1 + 32\tau_1)uv + 2u^2 + (2\sigma_0 - 2\tau_0)vw + (2\sigma_2 - 32\tau_2)uw$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{u}) = 2uv\sigma_1 + 2uw\sigma_2 + 2vw\sigma_0$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{u}) = v^2 + w^2 + (16\tau_1 + 2\sigma_1)uv + u^2 + (2\sigma_0 + \tau_0)vw + (2\sigma_2 - 16\tau_2)uw$$

- Se inhomogeniza el parche y se sustituye en la ecuación implícita del haz para obtener la expresión de  $\lambda_0$ . En nuestro caso particular,  $\lambda_0 = \frac{32(-1 + \tau_0^2)}{\sigma_0^2}$
- Se sustituye  $\lambda_0$  en la ecuación implícita del haz, obteniendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -8\sigma_0^2 + 8\sigma_1^2 + 2048\sigma_0^2\tau_1^2 - 8\sigma_1^2\tau_0^2 = 0 \\ 8\sigma_1\tau_0^2 - 128\tau_2\sigma_0 + 128\tau_1\tau_0\sigma_0 - 8\sigma_1 = 0 \\ 8\sigma_2\tau_0^2 - 8\sigma_2 - 128\tau_0\tau_2\sigma_0 + 128\tau_1\sigma_0 = 0 \\ -8\sigma_0^2 + 2048\sigma_0^2\tau_2^2 + 8\sigma_2^2 - 8\sigma_2^2\tau_0^2 = 0 \end{cases}$$

de donde se obtienen las dos soluciones  $S_1, S_2$  que no anulan  $\lambda$  y las expresiones para los  $\sigma_i, \tau_i$

$i = 0, 1, 2$ . Considerando  $S_1$  como solución y haciendo  $\sigma_0 = 2$  y  $\tau_0 = \frac{1}{2}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 2, & \tau_0 &= \frac{1}{2} \\ \sigma_1 &= 2, & \tau_1 &= -\frac{1}{32} \\ \sigma_2 &= 0, & \tau_2 &= -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

- Con esta solución se calcula el valor de  $\lambda$  y el parche de Bézier asociado a este. En nuestro caso particular,  $\lambda = -6$ . El parche de Bézier y la cuádrica subyacente asociada se muestran a continuación (ver Figura 3.15, Figura 3.16).

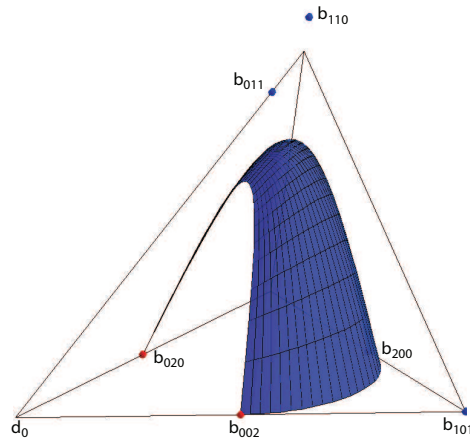
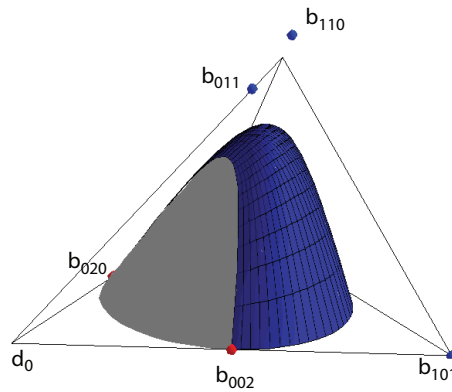


FIGURA 3.15. Ejemplo del parche racional cuadrático con la primera solución.

FIGURA 3.16. Ejemplo del parche racional cuadrático y la cuádrica  $Q_{-6}$  asociada.

EJEMPLO 3.2. Siguiendo el ejemplo anterior usando como solución  $S_2$ , y haciendo

$\sigma_2 = \frac{1}{5}, \tau_2 = \frac{1}{100}, \tau_0 = \frac{1}{2}$ , se tiene que:

$$\sigma_0 = 512,5 \quad \tau_0 = \frac{1}{2}.$$

$$\sigma_1 = 0,08 \quad \tau_1 = 0,022.$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \quad \tau_2 = \frac{1}{100}.$$

Con esta solución se calcula el nuevo valor de  $\lambda$  y el parche de Bézier asociado a este. Para este ejemplo,  $\lambda_0 = -779$ . El parche de Bézier y la cuádrica subyacente asociada se muestran a continuación (ver Figura 3.17, Figura 3.18).

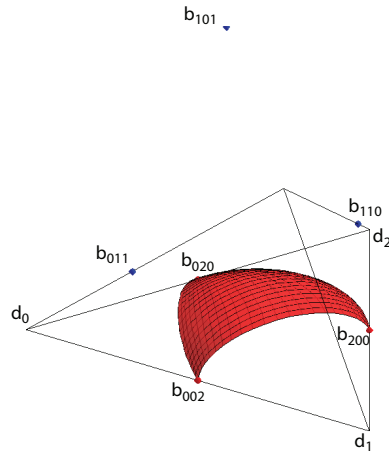


FIGURA 3.17. Ejemplo del parche racional cuadrático con la segunda solución.

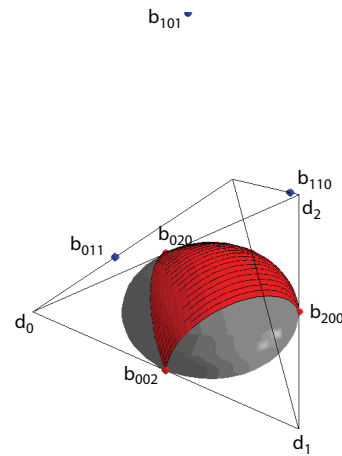


FIGURA 3.18. Ejemplo del parche racional cuadrático con la segunda solución y la cuádrica asociada.

## Conclusión

El objetivo de este trabajo fue la elaboración de un algoritmo que permitiera la construcción de un parche racional de Bézier cuya ecuación implícita fuera de grado dos. Para la construcción de este algoritmo, fue necesario el estudio curvas y superficies de Bézier tanto en su forma polinomial como en su forma racional, sus propiedades y su representación en el plano proyectivo y espacio proyectivo respectivamente. El algoritmo se basa en la construcción de una cónica en algún plano, para su diseño se prescriben tres puntos de interpolación y dos rectas tangentes. Al calcular la tercera recta tangente por el tercer punto de control se obtiene un triángulo  $\Delta(d_0d_1d_2)$  que circunscribe a la cónica. Seguidamente se escogió un cuarto punto  $\mathbf{p}$  fuera del plano donde yace el triángulo y se construyó el cono  $C$  de base la cónica  $c$  y vértice el punto  $\mathbf{p}$ . A partir del cono, se construye una familia de superficies cuadráticas  $Q_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$  definida por  $Q_\lambda = C + Z^2\lambda$ . La expresión del haz de cuádricas se basa en la construcción y comportamiento de una cónica de Bézier: Al tender el peso  $w$  de una cónica de Bézier al infinito, ésta tiende a las rectas laterales que definen su polígono de control, y si  $w = 0$ , se obtiene la recta doble definida por la base del triángulo de control. Tomando esta referencia para el caso del haz con el cono  $C$  como cápsula convexa que contiene a las cuádricas del haz, si  $\lambda = 0$ , la superficie cuadrática correspondiente es  $C$ , y si  $\lambda \rightarrow \infty$ , el haz tiende al plano doble que conforma la base de  $C$ . En cualquier otro caso,  $Q_\lambda$  es una cuádrica no degenerada. Las caras del tetraedro  $d_0d_1d_2\mathbf{p}$  son tangentes al cono, y por tanto a la familia de cuádricas  $Q_\lambda$ . Se escogieron los puntos intermedios del parche sobre las rectas de intersección de los planos tangentes a  $C$ , es decir, en las rectas  $\overline{\mathbf{p}d_i}$ , parametrizándolos en términos de las razones entre  $\mathbf{p}$  y el  $d_i$  correspondiente, esto es:

$$\mathbb{b}_{011} = \sigma_0\mathbf{p} + \tau_0d_0$$

$$\mathbb{b}_{110} = \sigma_1\mathbf{p} + \tau_1d_1$$

$$\mathbb{b}_{101} = \sigma_2\mathbf{p} + \tau_2d_2$$

donde los coeficientes  $\sigma_i, \tau_i \in \mathbb{R}$ . Se substituyó la expresión afín del parche en la ecuación del haz, calculando la expresión general de  $\lambda$  y generando un sistema de cuatro ecuaciones linealmente independientes cuyas incógnitas son  $\sigma_i$  y  $\tau_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  el cual se resolvió utilizando Maple 7. Se obtuvo un conjunto de ocho soluciones para los coeficientes  $\sigma_i$  y  $\tau_i$  de los cuales sólo dos resultaron no triviales. Sustituyendo estas soluciones en la expresión del parche se obtuvieron sus puntos y pesos intermedios garantizando que el parche de Bézier sea una de las superficies del haz de cuádricas,  $Q_\lambda$ .

Los parches triangulares cuadráticos en general son caracterizados por la versatilidad que tienen al representar superficies curvas con la posibilidad de conectarlos con conexión de clase  $C^1$ . La ventaja de este trabajo radica en que la expresión implícita de un parche obtenido por este algoritmo es de grado dos sabiendo que en general la expresión implícita de cualquier parche triangular cónico tiene a lo sumo grado cuatro. Para futuros trabajos sería interesante estudiar la conexión suave de dos parches de Bézier bajo las condiciones que se proponen en este trabajo, estudiar a fondo la estabilidad numérica de las soluciones  $S_1$  y  $S_2$  obtenidas y estudiar la parametrización de cualquier cuádrica en términos de los parámetros de Bézier, es decir, los puntos de control y los pesos, usando proyección estereográfica.



## Bibliografía

- [1] FARIN, GERALD, Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A practical guide, 4th Edition (1997).
- [2] GUDRUN, ALBRECHT, An algorithm for parametric quadric patch construction, ENSIAME - Laboratoire MACS, Université de Valenciennes (2004).
- [3] SANTALÓ, L, Geometría Proyectiva, EUDEBA, Buenos Aires (1977).
- [4] COX, D; LITTLE, J; O'SHEA, D; Using Algebraic Geometry, 2nd Edition, Springer (2005).
- [5] FARIN, G; HOSCHEK, J; KIM, M.S., Handbook of computer aided geometric design, Elsevier (2002).