UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Definiendo la integral de Riemann sin utilizar sumas de Riemann

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Sahid David Leal Pacheco** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Ramón Bruzual.

Caracas, Venezuela
Octubre 2009

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Definiendo la integral de Riemann sin utilizar sumas de Riemann**", presentado por el **Br. Sahid David Leal Pacheco**, titular de la Cédula de Identidad **16.971.232**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Ramón Bruzual
Tutor

Dra. Marisela Domínguez
Jurado

Dra. Cristina Balderrama
Jurado

Dedicatoria

La dedicatoria de este T.E.G. va dirigida a la hija de Veralda y Cipriano Flores pero criada por Tomasa y Ebelia Flores, madre de nueve (9) hijos y abuela de quince (15) nietos, una madre abuela y amiga ejemplar, trabajadora y luchadora, siempre llena de amor para sus familiares y semejantes , con gran fortaleza humana y espiritual y con gran sentido del humor, simplemete una mujer excepcional en todos los sentidos de la palabra. Una mujer que no solo fue referencia para mi sino para todo mi núcleo familiar, hablo de mi abuela Nicolasa Flores (Nikita) que a pesar que desde el 05 de Julio del presente año nos dejaste fisicamente siempre te vamos a recordar con todo el amor del mundo que te tuvimos, te seguimos y seguiremos teniendo. Abuela donde quieras que estés te dedico este logro y la culminación de esta meta porque se que estás muy feliz y orgullosa de mi así como lo estuviste de todos tus hijos y nietos.

Agradecimiento

Ante todo agradezco a Dios por darme la salud y la sabiduría necesaria para sobrellevar todas las difucultades que se me han presentado durante el camino que hoy me trajo a la presentación de este Trabajo Especial de Grado, seguidamente pero no menos importante agradezco a mi familia empezando por mis padres Pascual Leal y Dilma Pacheco y siguiendo con mis hermanos Teresa, Carlos y Nicolas por inculcar en mi los valores necesarios para ser una persona de bien y responsable, por su apoyo incondicional ante cualquier necesitud que he tenido en mi vida y por ser todos un modelo a seguir por sus logros y metas alcanzadas. Posteriormete agradezco a mi novia Julenni Colmenares que durante la mayoría del tiempo que he permanecido en el pre-grado me ha llenado de buenos consejos y siempre ha sido mi apoyo tanto en las buenas como en las malas.

Agradezco a mi tutor el profesor Ramón Bruzual por su apoyo incondicional y excelente asesoría durante la realización de este T.E.G. la cuál fue de vital importancia para la culminación en el tiempo esperado.

Por otro lado agradezco a la Universidad Central de Venezuela, específicamente a la Escuela de Matemática de la Facultad de Ciencias y a todo su personal docente incluyendo a los preparadores, peronal administrativo y obrero que durante mis años de estudios me brindaron la oportunidad de formarme profesionalmente como matemático, y sin restarle importancia a toda la extensa gama de amistades incondicionales que me he encontrado en esta carrera transformandose prácticamente en segundos hermanos y hermanas donde juntos pasamos multiples horas de estudios y de intercambio de conocimientos en la biblioteca central, biblioteca Alonso Gamero (Gallinero), biblioteca de Psicología, centros de estudiantes o casas de uno u otro compañero, para nombrar algunos cito sin orden de prioridades a Arquimedes González, Julio Nemer, Andrés Contreras, Roberto Morillo (Bigote), Manuel Gonzalez, Yarot Avendaño, Ewuard Avila, Alejandra Ruiz, Karelys Medina, Alan Gonzalez, Nelson Molina, Jose Camero, Jose Di Campo, Gonzalo Barragan (Cabeza de Mesa), Mileva Rojas, Jose Quintero, Gledys Sulbaran, Freddy Hernandez, Gisell Marcano, Mariolys Rivas, Rafael Prieto, María Alemanni, Gabriel Marquéz, Luis Paredes, Kenny Garcés, Florentino Fernandez, Alexis Becerra, Daniela Torrealba, Manolo (el del bombo), Ivan Zea, Gari Roa, Coraiza López y tal vez uno que otro que en estos momentos no se me viene a la mente.

Por último al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (CDCH) de la Universidad Central de Venezuela por su colaboración con la impresión de este trabajo.

Índice general

Introducción

El problema de calcular el área de una figura plana o el volumen de un sólido, está íntimamente ligado al Cálculo Integral y se remonta a la antigüedad. El papiro de Moscú, encontrado en Egipto y fechado alrededor del año 1800 A.C., muestra que ya para entonces se conocía una fórmula para hallar el volumen de un tronco piramidal. La primera técnica sistemática documentada capaz de determinar integrales es el método de exhaución creado por Eudoxo (Cnido, actual Turquía, 390 A. C. – 337 A. C.), que trataba de encontrar áreas y volúmenes partiendo la figura en un número infinito de formas para las cuales se conocieran el área o el volumen. Este método fue desarrollado y usado más adelante por Arquímedes (Siracusa, 287 A. C. – 212 A. C.), que lo empleó para calcular áreas de parábolas y una aproximación al área del círculo. Métodos similares fueron desarrollados de forma independiente en China alrededor del siglo III por Liu Hui, que los usó para encontrar el área del círculo. Más tarde, Zu Chongzhi usó este método para encontrar el volumen de una esfera. En el Siddhanta Shiromani, un libro de astronomía del siglo XII del matemático hindú Bhaskara II (India, 1114-1185)), se encuentran algunas ideas de cálculo integral.

En el siglo XVI comienzan a aparecer adelantos significativos sobre el método de exhaución. En esta época, por un lado, con el trabajo de Cavalieri con su método de los indivisibles y, por otro lado, con los trabajos de Fermat, se empezaron a desarrollar los fundamentos del cálculo moderno. A comienzos del siglo XVII, se produjeron nuevos adelantos con las aportaciones de Barrow y Torricelli, que presentaron los primeros indicios de una conexión entre la integración y la derivación.

Los principales adelantos en integración vinieron en el siglo XVII con el descubrimiento del teorema fundamental del cálculo, realizado de manera independiente por Newton y Leibnitz. El teorema demuestra una conexión entre la integración y la derivación. Esta conexión, combinada con la facilidad, comparativamente hablando, del cálculo de derivadas, se puede usar para calcular integrales.

Las primeras demostraciones, poco rigurosas, que se dieron del Teorema Fundamental del Cálculo en los inicios, estaban basadas en la siguiente idea intuitiva: si $F(x)$ representa el área bajo el gráfico de la función f, entonces $F(x+h) - F(x) \approx f(x)h$, para h pequeño.

B. Riemann dio una formalización del concepto de integral, que le permitió obtener una demostración rigurosa de este resultado.

En su artículo "A lost theorem: definite integrals in an asymptotic setting" R. Cavalcante y T. Todorov ([**2**]) presentan una teoría de integración que rescata y formaliza las ideas iniciales que permitieron llegar al teorema fundamental del cálculo.

En este artículo construyen una teoría de integración bastante simple, basada en un par de axiomas. Dan aplicaciones que muestran como puede aparecer la integral en el cálculo, sin necesidad de sumas de Riemann y discuten la conexión entre esta presentación y la historia del cálculo. Incluso en la prueba de la existencia de la integral definida para funciones continuas (que si utiliza sumas de Riemann), para los autores, este enfoque axiomático es más elegante y didáctico que el convencional. También consideran que la teoría de integración que presentan en su artículo es un primer paso para llegar a una manera más simple, pero rigurosa de enseñar el cálculo y sus aplicaciones en un curso de cálculo o un curso introductorio de análisis real.

El objetivo fundamental de este Trabajo Especial de Grado es presentar de manera autocontenida y rigurosa las ideas del artículo ya mencionado y comparar con la manera clásica de introducir la integral de Riemann.

El trabajo se organizó de la siguiente manera:

Un primer capítulo, dedicado a la construcción clásica de la integral de Riemann. Se demuestra que la construcción original de Riemann y la construcción posterior de Darboux son equivalentes.

Un segundo capítulo dedicado a la definición de integral dada por Calvacante y Todorov en su trabajo [**2**].

Finalmente un tercer capítulo en el que se detalla la forma en que se pueden introducir los conceptos de área bajo una curva, longitud de arco y volumen de un sólido de revolución y justificar las fórmulas para su cálculo basándose en esta nueva manera de introducir la integral.

Las notas históricas que aparecen en esta parte del trabajo fueron tomadas de [**3**] y de [**6**].

CAPíTULO 1

Construcciones clásicas de la integral de Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann (17 de septiembre de 1826 - 20 de junio de 1866) fue un matemático alemán que realizó contribuciones muy importantes en análisis y geometría diferencial, algunas de ellas allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre está conectado con la función zeta, la integral de Riemann, el lema de Riemann-Lebesgue, las variedades, las superficies y la geometría de Riemann.

B. Riemann

(Esta nota bibliográfica y la imagen fueron tomadas de [**6**])

La idea intuitiva de calcular el área de una figura dividiéndola en pequeños rectángulos se remonta a la antigüedad. La primera formalización precisa del concepto de integral se debe a B. Riemann.

Jean Gaston Darboux (14 de agosto de 1842 - 23 de febrero de 1917) fue un matemático francés. Hizo muchas contribuciones importantes a la geometría y el análisis matemático. Una de sus contribuciones al desarrollo de la matemática fue una nueva presentación de la integral de Riemann. Esta presentación resulta más didáctica, fácil de trabajar y es la que usualmente se presenta en los libros de cálculo y de introducción al análisis.

G. Darboux

(Esta nota bibliográfica y la imagen fueron tomadas de [**6**])

En este capítulo se presenta la definición de integral dada por Riemann, un resumen de la definición y la construcción de la integral dada por Darboux y se demuestra que ambas integrales son equivalentes.

La construcción de la integral de Riemann depende fuertemente de la estructura del conjunto de los números reales. El siguiente concepto de partición es fundamental para su desarrollo.

Definición 1.1.

Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Una *partición* del intervalo $[a, b]$ es una colección finita de puntos de $[a, b]$ de los cuales uno es a y otro es b.

Si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$ es usual suponer que la numeración se escogió de manera que

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Al hablar de una partición siempre se supondrá que está ordenada en la forma anterior y la *norma de la partición*, $\|P\|$, se define por

$$\|P\| = \text{máx}\{t_i - t_{i-1} \ : \ 1 \leq i \leq n\}.$$

1. Construcción original de Riemann

DEFINICIÓN 1.2 (Integral según Riemann).

Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *integrable Riemann* en $[a, b]$ si existe $A \in \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:

Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$, $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\} \in [a, b]$ son tales que $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $||P|| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,(t_i - t_{i-1}) - A \right| < \varepsilon.$$

Al número A que aparece en esta definición se le llama *integral de Riemann* de f sobre $[a, b]$. A la sumas que aparecen en esta definición de le llaman *sumas de Riemann.*

La integral de Riemann de f sobre el intervalo $[a, b]$ se denotará por

$$(R) \int_a^b f(x)\, dx,$$

ó simplemente por

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

si no existe posibilidad de confusión.

2. Construcción de Darboux de la integral de Riemann

DEFINICIÓN 1.3.

Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada.

Si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$, para $1 < i < n$, se definen

$$m_i = \text{ínf}\,\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

$$M_i = \sup\,\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

La *suma inferior* de f correspondiente a la partición P, se denota por $L(f, P)$ y se define por

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, (t_i - t_{i-1}) \, .$$

La *suma superior* de f correspondiente a la partición P, se denota por $U(f, P)$ y se define por

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, (t_i - t_{i-1}) \, .$$

Las sumas superior e inferior de una función con respecto a una partición también son conocidas con el nombre de *sumas de Darboux*

La definición de integral que dio Darboux fue la siguiente.

Definición 1.4 (Integral según Darboux).

Una función f definida en $[a, b]$ es *integrable Darboux* sobre $[a, b]$ si f es acotada y

$$\sup\{L(f, P) : P \text{ es partición de } [a, b]\} = \text{ínf}\{U(f, P) : P \text{ es partición de } [a, b]\}$$

A este valor común se le llama *integral de Darboux* de f sobre $[a, b]$.

La integral de Darboux de f sobre el intervalo $[a, b]$ se denotará por

$$(D) \int_a^b f(x) \, dx,$$

ó simplemente por

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

si no existe posibilidad de confusión.

3. Equivalencia entre las definiciones dadas por Riemann y por Darboux

Se tiene que la integral de Riemann y la integral de Darboux son equivalentes, más precisamente se cumple el siguiente resultado.

Teorema 1.5.

Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *f es integrable Riemann,*

(ii) *f es integrable Darboux.*

Además, en caso de cumplirse una de las condiciones anteriores se cumple que

$$(D)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

La demostración que se va dar de este resultado sigue el esquema planteado (como ejercicio) en [**1**]. Será necesario utilizar algunos resultados referentes a la integral de Darboux, los resultados que usualmente se encuentran en la literatura especializada se enuncian sin demostración.

Los tres resultados siguientes se pueden encontrar en [**1, 4, 5**].

LEMA 1.6. *Sea f una función acotada definida en el intervalo $[a,b]$. Si P y Q son dos particiones del intervalo $[a,b]$ tales que $P \subset Q$ entonces*

$$L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f,Q) \leq U(f,P).$$

TEOREMA 1.7. *Sea f una función acotada definida en el intervalo $[a,b]$.*
Si P y Q son particiones del intervalo $[a,b]$, entonces

$$L(f,P) \leq U(f,Q).$$

TEOREMA 1.8.

Sea f una función acotada definida en el intervalo $[a,b]$ entonces f es integrable Darboux sobre $[a,b]$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

Los siguientes resultados son más especializados, por lo que se hará su demostración.

TEOREMA 1.9. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Supóngase que existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ y sea P una partición de $[a,b]$.*

(a) *Si $c \in [a,b]$ entonces*

$$U(f,P) - U(f,P \cup \{c\}) \leq 2M\,\|P\|$$

y

$$L(f,P \cup \{c\}) - L(f,P) \leq 2M\,\|P\|\,.$$

(b) *Si Q es una partición de $[a,b]$ que contiene a lo sumo n puntos más que P entonces*

$$U(f,P) - U(f,Q) \leq 2nM \|P\|$$

y

$$L(f,Q) - L(f,P) \leq 2nM \|P\|.$$

Demostración.

(a) Supóngase que $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, donde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Si c es un elemento de la partición el resultado es inmediato. En otro caso existe k tal que $x_{k-1} < c < x_k$ y por lo tanto

$$P \cup \{c\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, c, x_k, \ldots, x_n\}.$$

Siguiendo la notación usual se tiene que

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) + M_k(x_k - x_{k-1})$$

y

$$U(f, P \cup \{c\}) = \sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) + M_k'(c - x_{k-1}) + M_k''(x_k - c),$$

donde

$$M_k' = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq c} \{f(x)\}$$

y

$$M_k'' = \sup_{c \leq x \leq x_k} \{f(x)\}.$$

Además

$$|M_k'| \leq M, \quad |M_k''| \leq M, \quad |M_k| \leq M.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} U(f,P) - U(f, P \cup \{c\}) &= M_k(x_k - x_{k-1}) - (M_k'(c - x_{k-1}) + M_k''(x_k - c)) \\ &\leq |M_k|(x_k - x_{k-1}) + |M_k'|(c - x_{k-1}) + |M_k''|(x_k - c) \\ &\leq M(x_k - x_{k-1}) + M(c - x_{k-1}) + M(x_k - c) \\ &= 2M(x_k - x_{k-1}) \leq 2M \|P\|. \end{aligned}$$

Con las sumas inferiores se procede de manera análoga.

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{k-1}m_i(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=k+1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})+m_k(x_k-x_{k-1})$$

y

$$L(f,P\cup\{c\})=\sum_{i=1}^{k-1}m_i(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=k+1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})+m_k'(c-x_{k-1})+m_k''(x_k-c).$$

donde

$$m_k'=\inf_{x_{k-1}\leq x\leq c}\{f(x)\}$$

y

$$m_k''=\inf_{c\leq x\leq x_k}\{f(x)\}\,.$$

Además

$$|m_k'|\leq M,\quad |m_k''|\leq M,\quad |m_k|\leq M.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
L(f,P\cup\{c\})-L(f,P)&=m_k'(c-x_{k-1})+m_k''(x_k-c)-m_k(x_k-x_{k-1})\\
&\leq |m_k'|(c-x_{k-1})+|m_k''|(x_k-c)+|m_k|(x_k-x_{k-1})\\
&\leq M(x_k-x_{k-1})+M(c-x_{k-1})+M(x_k-c)\\
&=2M(x_k-x_{k-1})\leq 2M\left\|P\right\|
\end{aligned}$$

(b) Sea Q una partición que contiene a lo sumo n puntos más que P entonces

$$\begin{aligned}
U(f,P)-U(f,Q)&=U(f,P)-U(f,P\cup\{c_1,\ldots,c_n\})\\
&=U(f,P)-U(f,P\cup\{c_1\})+U(f,P\cup\{c_1\})-U(f,P\cup\{c_1\}\cup\{c_2\})\\
&\quad+U(f,P\cup\{c_1\}\cup\{c_2\})-U(f,P\cup\{c_1,c_2,c_3\})+\cdots+\\
&\quad\quad+U(f,P\cup\{c_1,\ldots,c_{n-1}\})-U(f,P\cup\{c_1\ldots,c_n\})\\
&\leq 2M\left\|P\right\|+2M\left\|P\right\|+\cdots+2M\left\|P\right\|\\
&=2nM\left\|P\right\|.
\end{aligned}$$

La desigualdad correspondiente a las sumas inferiores se demuestra de manera completamente análoga.

$\square$

LEMA 1.10. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada e integrable Darboux, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si P es una partición de $[a, b]$ y $\|P\| < \delta$, entonces*

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$, por el Teorema 1.8 existe una partición P_o de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P_o) - L(f, P_o) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea n el número de elementos de P_o y sea $\delta = \dfrac{\varepsilon}{8nM}$.

Por el Teorema 1.9, si P es una partición de $[a, b]$ tal que $\|P\| < \delta$ entonces

$$U(f, P) - U(f, P \cup P_o) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

y

$$L(f, P \cup P_o) - L(f, P) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por lo tanto

$$U(f, P) - U(f, P \cup P_0) + L(f, P \cup P_0) - L(f, P) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por el Lema 1.6,

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &\leq \frac{\varepsilon}{2} + U(f, P \cup P_0) - L(f, P \cup P_0) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + U(f, P_0) - L(f, P_0) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.5.

(i) $(\Rightarrow)$ (ii) Supóngase que f es integrable Riemann.

Esta parte de la demostración se hará en dos pasos.

Paso 1: Demostración de que f es acotada.

Considerando $\varepsilon = 1$ en la Definición 1.2 se obtiene que existe $\delta > 0$ tal que si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a,b]$, $\{c_1, \ldots, c_n\} \in [a,b]$ son tales que $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $\|P\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) \;\; - A \right| < 1.$$

Sea $P_o = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ una partición de $[a,b]$, de norma menor que δ.

Sea $x \in [a, x_1]$, entonces se tiene que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \;\; - A \right| < 1$$

y

$$\left| f(x)(x_1 - a) + \sum_{i=2}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \;\; - A \right| < 1.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |(f(x) - f(x_1))(x_1 - a)| &= \\ &= \left| f(x)(x_1 - a) + \sum_{i=2}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \;\; - A - \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \;\; - A \right) \right| \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

De donde se deduce que

$$|f(x)| \leq |f(x_1)| + |f(x) - f(x_1)| \leq |f(x_1)| + \frac{2}{x_1 - a}$$

si $x \in [a, x_1]$.

De igual manera se puede proceder en el resto de los intervalos de la partición, obteniéndose que f es acotada.

Paso 2: f satisface la condición del Teorema 1.8.

Sea $\varepsilon > 0$, nuevamente por la Definición 1.2, existe una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que si $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \in [a,b]$ satisfacen $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como $M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \le x \le t_i\}$ y $c_1 \in [t_0, t_1]$, $c_2 \in [t_1, t_2], \ldots, c_n \in [t_{n-1}, t_n]$ son arbitrarios se tiene que

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) \,:\, c_1 \in [t_0, t_1]\,,\, c_2 \in [t_1, t_2], \ldots, c_n \in [t_{n-1}, t_n]\right\}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$|U(f,P) - A| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

En forma completamente análoga se obtiene que

$$|L(f,P) - A| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por lo tanto

$$U(f,P) - L(f,P) \le |U(f,P) - A| + |A - L(f,P)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

(ii) ($\Rightarrow$) (i) Supóngase que f es integrable Darboux.

Por el Lema 1.10 existe $\delta > 0$ tal que si P es una partición de $[a,b]$ y $\|P\| < \delta$, entonces

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $\|P\| < \delta$ y sean $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\} \in [a,b]$ tales que $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, entonces

$$0 \le U(f,P) - (D)\int_a^b f(x)\,dx < \varepsilon,$$

$$0 \le (D)\int_a^b f(x) - L(f,P)\,dx < \varepsilon$$

y

$$L(f,P) \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,(t_i - t_{i-1}) \le U(f,P).$$

Por lo tanto

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,(t_i - t_{i-1}) - (D)\int_a^b f(x)\right| < \varepsilon,$$

de donde se concluye que f es integrable Riemann y que

$$(D)\int_a^b f(x) = (R)\int_a^b f(x).$$

$\square$

CAPíTULO 2

Definición de la integral de Riemann sin sumas de Riemann

1. Motivación

Supóngase que $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo (ver [**1, 4, 5**]) se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left((R) \int_a^x \rho(t)\, dt \right) = \rho(x)$$

para todo $x \in [a, b]$ (en los extremos a y b del intervalo la derivada debe tomarse a derecha y a izquierda, respectivamente).

Observación 2.1. Notar que por el Teorema 1.5

$$(R) \int_a^x \rho(t)\, dt = (D) \int_a^x \rho(t)\, dt.$$

Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = (R) \int_a^x \rho(t)\, dt,$$

entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x) - \rho(x)h}{h} = 0.$$

Por la propiedad aditiva de la integral de Riemann se tiene que, si $h > 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left((R) \int_x^{x+h} \rho(t)\, dt \right),$$

y si $h < 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = -\frac{1}{h}\left((R) \int_{x+h}^{x} \rho(t)\, dt \right) = \frac{1}{h}\left((R) \int_x^{x+h} \rho(t)\, dt \right).$$

Por lo tanto si se define

$$G : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$$

por

$$G(x,z) = (R)\int_x^z \rho(t)\,dt,$$

se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x,x+h) - \rho(x)h}{h} = 0.$$

Como es usual, esto último suele abreviarse con la siguiente notación

$$G(x,x+h) - \rho(x)h = o(h), \;\; h \to 0,$$

que será explicada con más detalle a continuación y que seguirá utilizando a lo largo del trabajo.

Observación 2.2 (La notación o(h)).

Es usual denotar por $o(h)$ al conjunto de las funciones $f : D_f \to \mathbb{R}$ tales que $D_f \subset \mathbb{R}$, $0 \in \overline{D_f}$ y

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

En vez de escribir $f \in o(h)$ es usual escribir $f(h) = o(h)$, $h \to 0$, o simplemente denotar por $o(h)$, $h \to 0$ cualquier función que dividida entre h tiende a 0 cuando $h \to 0$.

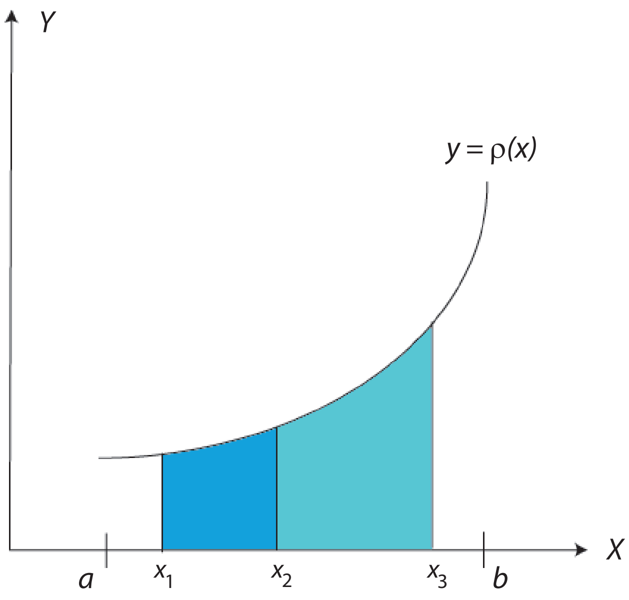
De acuerdo con esta última convención se tienen las siguientes propiedades, que aunque son un abuso de notación, simplifican mucho las demostraciones

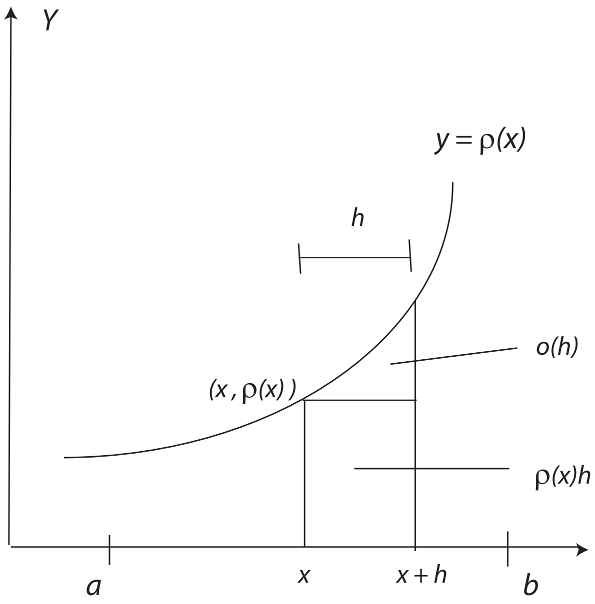
(1) $o(h) + o(h) = o(h)$
(2) $o(h)^2 = o(h)$
(3) $co(h) = o(h)$, $c \in \mathbb{R}$

Además, por la propiedad aditiva de la integral se tiene que, para $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$

$$G(x_1,x_2) + G(x_2,x_3) = G(x_1,x_3).$$

Los siguientes gráficos ilustran las propiedades anteriores en términos de la interpretación de la integral como el área bajo el gráfico de la función $y = \rho(x)$.





Las dos propiedades mencionadas caracterizan la integral de la función ρ, más precisamente se cumple el siguiente resultado.

Lema 2.3.

Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ y sea $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe una única función $G : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones

(a) $G(x, x + h) - \rho(x)h = o(h),\ \ h \to 0$ *para todo* $x \in [a, b]$,

(b) $G(x_1, x_2) + G(x_2, x_3) = G(x_1, x_3)$ *para todo* $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$.

Además G es la única solución del siguiente problema a valor inicial

$$\frac{d}{dx} G(a, x) = \rho(x), \qquad G(a, a) = 0$$

en el intervalo (a, b).

Demostración.

Existencia:

Considerar

$$G(x, y) = (R) \int_x^y \rho(t)\, dt.$$

Unicidad:

Se va a probar primero que si G satisface (a) y (b) entonces G es solución del problema a valor inicial

$$\frac{d}{dx}G(a,x) = \rho(x), \qquad I(a,a) = 0$$

en el intervalo (a,b).

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}G(a,x) &= \lim_{h\to 0}\frac{G(a,x+h)-G(a,x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{G(x,x+h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{G(x,x+h)-\rho(x)h+\rho(x)h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{G(x,x+h)-\rho(x)h}{h}+\rho(x)\\ &= 0+\rho(x) = \rho(x).\end{aligned}$$

Además $G(a,a)+G(a,a)=G(a,a)$, por lo que $G(a,a)=0$.

La condición (a) implica la continuidad a derecha de la función $x \mapsto G(a,x)$ ya que $G(a,a+h)=\rho(a)h+o(h),\ h\to 0$ y $G(a,a)=0$. De igual manera se prueba que la función $x\mapsto G(b,x)$ es continua a izquierda en b y que $G(b,b)=0$.

Sea $G_1 : [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ otra función que satisface (a) y (b).

Considérese $H:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por

$$H(x) = G(a,x) - G_1(a,x),$$

entonces H es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b), $H(a)=0$ y $H'(x)=0$ para todo $x\in(a,b)$. Por lo tanto $H\equiv 0$, de donde se concluye que

$$G(a,x) = G_1(a,x)$$

para todo $x\in[a,b]$.

Por la propiedad (b) se tiene que

$$G(x,y) = G(a,y) - G(a,x)$$

y

$$G_1(x,y) = G_1(a,y) - G_1(a,x),$$

por lo tanto

$$G = G_1.$$

$\square$

OBSERVACIÓN 2.4. Es importante destacar que para la demostración de la unicidad en el lema anterior no es necesario particionar el intervalo $[a, b]$ ni considerar sumas de Riemann. Este resultado de unicidad está basado en el hecho, bastante elemental de cálculo que afirma "Toda función con derivada nula en un intervalo es constante".

2. Integrales definidas sin sumas de Riemann

En esta sección se desarrolla la definición de integral propuesta por R. Cavalcante y T. Todorov en su trabajo [**2**].

Se debe comenzar por suponer que no ha sido definido ningún concepto de integral, se va a partir del Cálculo Diferencial básico.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sea $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua.

Si

$$I : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$$

es una función, se dirá que I satisface la *propiedad aditiva* si se cumple

(A) $\quad I(x, y) + I(y, z) = I(x, z)$ para todo $x, y, z \in [a, b]$.

Se dirá que I satisface la *propiedad asintótica con respecto a ρ* si se cumple

(B) $\quad I(x, x + h) = \rho(x)h + o(h),\ \ h \to 0$ para todo $x \in [a, b]$, es decir

$$\lim_{h\to 0} \frac{I(x, x + h) - \rho(x)h}{h} = 0$$

ó, lo que es equivalente

$$\lim_{h\to 0} \frac{I(x, x + h)}{h} = \rho(x)$$

(en los extremos del intervalo se deben considerar los límites a derecha y a izquierda respectivamente).

En forma completamente análoga a la parte de la demostración correspondiente a la unicidad del Lema 2.3, se demuestra el siguiente resultado.

LEMA 2.5. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sea $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si existe una función $I : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ que satisface las propiedades* **(A)** y **(B)** entonces

(i) La función $I(a, x)$ es solución del problema a valor inicial

$$\frac{d}{dx} I(a, x) = \rho(x), \qquad I(a, a) = 0$$

en el intervalo $[a, b]$ (en los extremos del intervalo se deben considerar derivadas laterales).

(ii) I es única.

La propiedad de unicidad establecida en el lema anterior permite dar la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.6 (Integral de Calvacante-Todorov).

Sea $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si existe una función $I : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ que satisface las propiedades **(A)** y **(B)** se dice que ρ *es integrable Calvacante-Todorov sobre* $[a, b]$ y se define *la integral de Calvacante-Todorov* de ρ sobre el intervalo $[a, b]$ por

$$(CT) \int_a^b \rho(t)\, dt = I(a, b).$$

OBSERVACIÓN 2.7. Si $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y existe una función $I : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ que satisface las propiedades **(A)** y **(B)** y si $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ entonces la restricción $I|_{[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]}$ satisface las propiedades **(A)** y **(B)** con respecto a $\rho|_{[\alpha,\beta]}$.

Por lo tanto, si ρ es integrable Calvacante-Todorov sobre $[a, b]$ y $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ entonces se tiene que ρ es integrable Calvacante-Todorov sobre $[\alpha, \beta]$ y

$$(CT) \int_\alpha^\beta \rho(t)\, dt = I(\alpha, \beta).$$

TEOREMA 2.8 (Teorema fundamental). *Sea $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si ρ es integrable Calvacante-Todorov en $[a, b]$, entonces ρ es integrable Calvacante-Todorov en $[a, x]$ para todo $x \in [a, b]$, la función*

$$F(x) = (CT) \int_a^x \rho(t)\, dt$$

es diferenciable en el intervalo (a, b) y

$$\frac{d}{dx} \left((CT) \int_a^x \rho(t)\, dt \right) = \rho(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

DEMOSTRACIÓN. De la Observación 2.7 sigue la integrabilidad en $[a,x]$ para $x \in [a,b]$. Sea $I : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$I(x,y) = (CT)\int_x^y \rho(t)\,dt.$$

Entonces I satisface las propiedades **(A)** y **(B)**.

Por la propiedad **(A)** se tiene que

$$I(a,x+h) - I(a,x) = I(x,x+h),$$

combinado esto último con la propiedad **(B)** se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left((CT)\int_a^x \rho(t)\,dt\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{I(a,x+h)-I(a,x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{I(x,x+h)}{h}\\ &= \rho(x).\end{aligned}$$

□

TEOREMA 2.9 (Teorema débil de existencia). *Sea $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si ρ posee una antiderivada R en $[a,b]$, entonces ρ es integrable Calvacante-Todorov en $[a,b]$ y*

$$(CT)\int_a^b \rho(t)\,dt = R(b) - R(a).$$

DEMOSTRACIÓN. $I : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$I(x,y) = R(y) - R(x).$$

Entonces I satisface las propiedades (A) y (B), por lo tanto

$$(CT)\int_a^b \rho(t)\,dt = I(a,b) = R(b) - R(a).$$

□

Del Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann sigue inmediatamente el siguiente resultado.

COROLARIO 2.10. *Si $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua que posee antiderivada entonces*

$$(CT)\int_a^b \rho(t)\,dt = (R)\int_a^b \rho(t)\,dt.$$

3. Resultado general de existencia

La sencilla, pero rigurosa, teoría que se ha desarrollado en la Sección anterior, es lo suficientemente poderosa para sustentar la mayoría de los temas relacionados con la integral y sus aplicaciones, en los comienzos de un curso típico de cálculo.

Sin embargo, para poder trabajar con integrales de funciones cuya primitiva no se puede expresar en términos de funciones elementales, como $\int_a^b e^{-x^2}dx$ y $\int_a^b \sin(x^2)dx$ es necesario un resultado más general de existencia.

Se va a probar el siguiente resultado de existencia, que extiende el que ya fue probado.

TEOREMA 2.11 (Resultado general de existencia). *Sea $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces ρ posee una antiderivada en (a,b) y por lo tanto es integrable Calvacante-Todorov sobre $[a,b]$.*

Para demostrar este resultado de existencia será necesario considerar particiones del intervalo $[a,b]$ y sumas de Darboux. Además se necesitan ciertos resultado previos que se dan a continuación.

La nociones de suma superior, suma inferior, partición, etc que aparecen y se usan a continuación son las ya dadas en el Capítulo 1.

Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado y sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x \leq y \leq b$. De acuerdo a las definiciones ya dadas una *partición* del intervalo $[x,y]$ es un conjunto de la forma $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $x = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = y$. El conjunto de todas las particiones de $[x,y]$ se denotará por $\mathcal{P}[x,y]$.

Sea $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[x,y]$. Entonces, de acuerdo a las definiciones dadas en el capítulo anterior, si

$$m_k = \text{mín}\{\rho(t) \,:\, x_{k-1} \leq t \leq x_k\}, \text{ y } \quad M_k = \text{máx}\{\rho(t) \,:\, x_{k-1} \leq t \leq x_k\},$$

$$L(\rho, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

y

$$U(\rho, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}),$$

son las sumas inferiores y superiores de $\rho(t)$ con respecto a la partición P.

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, $a \leq x < y < z \leq b$. Si $P \in \mathcal{P}[x, y]$ y $Q \in \mathcal{P}[y, z]$ entonces $P \cup Q \in \mathcal{P}[x, z]$ y se tiene que

$$L(\rho, P) + L(\rho, Q) = L(\rho, P \cup Q)$$

y

$$U(\rho, P) + U(\rho, Q) = U(\rho, P \cup Q).$$

El siguiente resultado es sencillo de probar y se puede encontrar en cualquiera de las referencias [**1, 4, 5**].

Proposición 2.12. *Sea $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sean P y Q dos particiones de $[a, b]$. Si $m = \text{mín}\{\rho(t) \,:\, a \leq t \leq b\}$ y $M = \text{máx}\{\rho(t) \,:\, a \leq t \leq b\}$, entonces*

$$m\,(b - a) \leq L(\rho, P) \leq U(\rho, Q) \leq M\,(b - a).$$

Teorema 2.13. *Sea $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que $U(\rho, P) - L(\rho, P) < \varepsilon$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, como ρ es continua, es uniformemente continua en $[a, b]$ y por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que si $t, t' \in [a, b]$ y $|t - t'| < \delta$, entonces

$$|\rho(t) - \rho(t')| < \frac{\varepsilon}{2(b - a)}.$$

Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ tal que $x_k - x_{k-1} < \delta$ para $k = 1, \dots, n$. Entonces, siguiendo la notación ya establecida

$$M_k - m_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b - a)}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} U(\rho, P) - L(\rho, P) &= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{2(b - a)} \right) (x_k - x_{k-1}) \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{2(b - a)} \right) (b - a) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Demostración del Teorema 2.11.

Se debe probar que existe una función $I : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ que satisfaces las propiedades **(A)** y **(B)** enunciadas al principio de la Sección 2.

Primer paso: Definir $I(x,y)$.

Primero sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x < y \leq b$.

Por la Proposición 2.12 el conjunto $\{L(\rho, P) \ : \ P \in \mathcal{P}[x,y]\}$ está acotado superiormente por $(\max\{\rho(t) : x \leq t \leq y\})(y-x)$.

Para x, y tales que $a \leq x < y \leq b$, sea

$$I(x,y) = \sup \{L(\rho, P) \ : \ P \in \mathcal{P}[x,y]\}.$$

En los otros casos se define $I(x,x) = 0$ y $I(x,y) = -I(y,x)$ si $a \leq y < x \leq b$.

Segundo paso: Probar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{I(x, x+h) - \rho(x)h}{h} = 0.$$

Por la Proposición 2.12 se tiene que

$$(\min\{\rho(t) \ : \ x \leq t \leq x+h\})h \leq I(x, x+h) \leq (\max\{\rho(t) \ : \ x \leq t \leq x+h\})h,$$

para $h > 0$.

Por la continuidad de ρ se tiene que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{I(x, x+h)}{h} = \rho(x).$$

Por otra parte, también se tiene que

$$(\min\{\rho(t) \ : \ x-h \leq t \leq x\})h \leq I(x-h, x) \leq (\max\{\rho(t) \ : \ x-h \leq t \leq x\})h,$$

para $h > 0$, luego

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0^-} \frac{I(x, x+h)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \frac{-I(x+h, x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{I(x-h, x)}{h} \\
&= \rho(x).
\end{aligned}$$

Tercer paso: Probar que $I(x,z) = I(x,y) + I(y,z)$ si $a \leq x < y < z \leq b$

Notar que si c y d son números reales tales que $a \leq c < d \leq b$ entonces, por la definición de $I(c,d)$ se tiene que $L(\rho, P) \leq I(c,d)$ y por la Proposición 2.12 se tiene que $I(c,d) \leq U(\rho, P)$ para toda $P \in \mathcal{P}[c,d]$.

Sean x, y, z tales que $a \leq x < y < z \leq b$. Sean $P \in \mathcal{P}[x,y]$ y $Q \in \mathcal{P}[y,z]$. Entonces se cumple que

$$L(\rho, P) \leq I(x,y) \leq U(\rho, P),$$

$$L(\rho, Q) \leq I(y,z) \leq U(\rho, Q),$$

$$L(\rho, P \cup Q) \leq I(x,z) \leq U(\rho, P \cup Q),$$

ya que $P \cup Q \in \mathcal{P}[x,z]$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} L(\rho, P) + L(\rho, Q) - U(\rho, P \cup Q) &\leq I(x,y) + I(y,z) - I(x,z) \\ &\leq U(\rho, P) + U(\rho, Q) - L(\rho, P \cup Q) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por el Teorema 2.13, dado $\varepsilon > 0$ es posible elegir las particiones $P \in \mathcal{P}[x,y]$ y $Q \in \mathcal{P}[y,z]$ de manera que

$$U(\rho, P) - L(\rho, P) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$U(\rho, Q) - L(\rho, Q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $L(\rho, P) + L(\rho, Q) = L(\rho, P \cup Q)$ y $U(\rho, P) + U(\rho, Q) = U(\rho, P \cup Q)$, de la desigualdad (2.1) se deduce que

$$-\varepsilon < I(x,y) + I(y,z) - I(x,z) < \varepsilon$$

y por lo tanto

$$I(x,z) = I(x,y) + I(y,z).$$

Cuarto paso: Probar que $I(x,z) = I(x,y) + I(y,z)$ para $x, y, z \in [a,b]$.

Sean $x, y, z \in [a,b]$ tales que $a \leq x < z < y \leq b$, entonces

$$I(x,y) = I(x,z) + I(z,y).$$

Como $I(y,z) = -I(z,y)$ se obtiene

$$I(x,z) = I(x,y) + I(y,z).$$

El resto de los casos posibles se trata de manera análoga. $\square$

Combinando el Teorema 2.11 con el Corolario 2.10 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.14. *Toda función continua $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Calvacante-Todorov y*

$$(CT)\int_a^b \rho(t)\,dt = (R)\int_a^b \rho(t)\,dt.$$

Observación 2.15 (Linealidad de la integral).

Habiendo probado que toda función continua posee antiderivada, una consecuencia del Teorema 2.9 es que si f y g son funciones continuas y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$(CT)\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]dx = c_1\left((CT)\int_a^b f(x)dx\right) + c_2\left((CT)\int_a^b g(x)dx\right).$$

CAPíTULO 3

Área, longitud de arco y volumen

Este capítulo está dedicado a desarrollar la Sección 4 del trabajo de Calvacante y Todorov [**2**]. En esta parte del trabajo desarrollan ideas para introducir los conceptos de área bajo una curva, longitud de arco y volumen de un sólido de revolución, basándose en su construcción de la integral. Los autores consideran que esta es una presentación más intuitiva, sencilla y comprensible que la usual y que le da un gran valor didáctico a la forma en que presentan la integral.

Solamente se consideran integrales de funciones continuas. Si f es continua en $[a, b]$ la integral de f sobre $[a, b]$ se denotará simplemente por

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

y se supondrá que esta integral ha sido definida de acuerdo a la Definición 2.6.

1. Área bajo una curva

Definición 3.1 (Área Bajo la Curva).

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

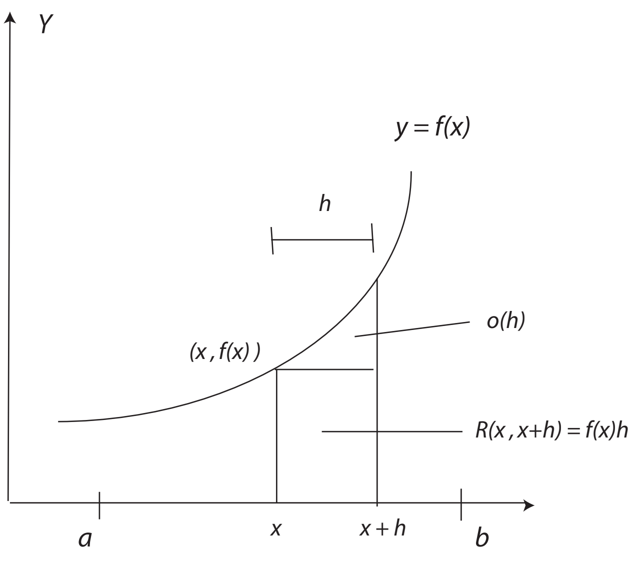
Si $A : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función en dos variables que satisface las siguientes dos propiedades

(a) $A(x_1, x_2) + A(x_2, x_3) = A(x_1, x_3)$ para todo $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$,

(b) $A(x, x + h) = \pm R(x, x + h) + o(h)$ cuando $h \to 0\pm$ para todo $x \in [a, b]$, donde $R(x, x + h)$ denota el área del rectángulo con vértices $(x, 0), (x + h, 0), (x + h, f(x))$ y $(x, f(x))$,

entonces el número $A(a, b)$ es llamado el *área bajo la curva* $y = f(x)$ *en el intervalo* $[a, b]$.

La definición anterior puede ser fácilmente ilustrada y justificada intuitivamente a través de la siguiente figura.



Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces existe $A(a,b)$, el área bajo la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a,b]$. Además $A(a,b)$ es única y*

$$A(a,b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Demostración.

Como $R(x, x+h) = f(x)|h|$, la función A debe satisfacer

$$A(x, x+h) = \pm R(x, x+h) + o(h),\ \ h \to 0 = \pm f(x)|h| + o(h) = f(x)h + o(h).$$

Por otra parte se tiene que si $A(x,y) = \int_x^y f(t)\,dt$ entonces

$$A(x, x+h) = f(x)h + o(h),\ \ h \to 0.$$

Para $h \to 0^+$

$$A(x, x+h) = f(x)h + o(h) = f(x)|h| + o(h) = R(x, x+h) + o(h).$$

Como $A(x+h, x) = -A(x, x+h)$, para $h \to 0^-$ se tiene

$$A(x, x+h) = -A(x, x+h) = -f(x)h + o(h) = f(x)|h| + o(h) = -R(x, x+h) + o(h).$$

Por la definición de integral de Calvacante-Todorov (Definición 2.6) y el resultado de unicidad dado en el Lema 2.5 se tiene que

$$A(x,y) = \int_x^y f(t)\,dt,$$

por lo tanto $A(a,b)$ es única y

$$A(a,b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

$\square$

2. Longitud de arco

Definición 3.3 (Longitud de Arco).

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y con derivada continua.

Si $L : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de dos variables que satisface las siguientes dos propiedades

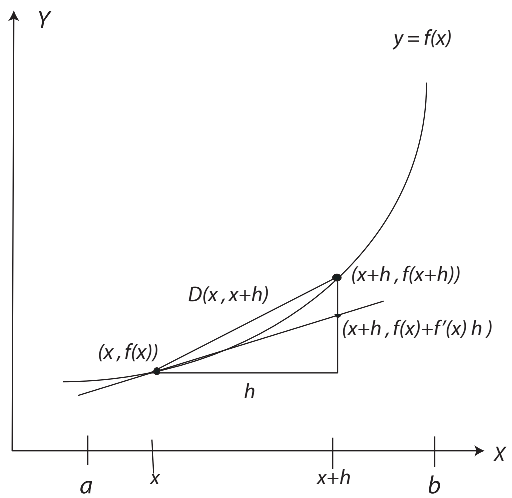
(a) $L(x_1,x_2) + L(x_2,x_3) = L(x_1,x_3)$ para todo $x_1,x_2,x_3 \in [a,b]$,

(b) $L(x,x+h) = \pm D(x,x+h) + o(h)$ cuando $h \to 0\pm$ para todo $x \in [a,b]$, donde $D(x,x+h)$ es la distancia euclidiana entre los puntos $(x,f(x))$ y $(x+h,f(x+h))$,

entonces el número $L(a,b)$ es llamado *Longitud de Arco* de la curva $y = f(x)$ entre los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$.

La definición anterior puede ser justificada intuitivamente de la siguiente manera:

Para simplificar los argumentos se supondrá que h es positivo y que $f'(t)$ es positivo para t en el intervalo $[x,x+h]$.



La figura sugiere (por supuesto, bajo ciertas condiciones de regularidad) que $L(x, x+h)$ está acotado inferiormente por $D(x, x+h)$ y superiormente por la longitud del segmento que une los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x)+f'(x)h)$ más la longitud del segmento que une los puntos $(x+h, f(x)+f'(x)h)$ y $(x+h, f(x+h))$.

Por lo tanto

$$D(x, x+h) \leq L(x, x+h) \leq \sqrt{h^2 + (f'(x)h)^2} + f(x+h) - f(x) - f'(x)h,$$

como $f(x+h) - f(x) - f'(x)h = o(h)$ se obtiene

$$0 \leq L(x, x+h) - D(x, x+h) \leq h\sqrt{1 + (f'(x))^2} + o(h) - D(x, x+h).$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} D(x, x+h) &= \sqrt{h^2 + (f(x+h) - f(x))^2} \\ &= \sqrt{h^2 + (f'(x)h + o(h))^2} \\ &= h\sqrt{1 + (f'(x))^2 + \frac{2f'(x)o(h)h}{h^2} + \left(\frac{o(h)}{h}\right)^2}, \end{aligned}$$

de donde se concluye que $L(x, x+h) - D(x, x+h)$ está acotado superiormente por

$$h\sqrt{1 + (f'(x))^2} + o(h) - h\sqrt{1 + (f'(x))^2 + \frac{2f'(x)o(h)h}{h^2} + \left(\frac{o(h)}{h}\right)^2}$$

y por lo tanto

$$\frac{L(x, x+h) - D(x, x+h)}{h}$$

tiende a 0 si $h \to 0^+$.

A partir de la definición de longitud de arco se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.4. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y con derivada continua. Entonces existe $L(a, b)$, la longitud de arco de la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Además $L(a, b)$ es única y*

$$L(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Demostración.

Sea $\Delta y = f(x+h) - f(x)$, entonces $\Delta y = f'(x)h + o(h),\ \ h \to 0$. Se tiene que la función L debe satisfacer

$$\begin{aligned}
L(x, x+h) &= \pm D(x, x+h) + o(h) = \pm\sqrt{h^2 + \Delta y^2} + o(h) \\
&= \pm\,|h|\sqrt{1 + \left(\frac{f'(x)h + o(h)}{h}\right)^2} + o(h) \\
&= h\sqrt{1 + (f'(x))^2 + \frac{2f'(x)o(h)h}{h^2} + \left(\frac{o(h)}{h}\right)^2} + o(h) \\
&= h\sqrt{1 + (f'(x))^2 + o(h)/h\ } + o(h) \\
&= h\left[\sqrt{1 + (f'(x))^2} + \sqrt{1 + (f'(x))^2 + o(h)/h} - \sqrt{1 + (f'(x))^2}\right] + o(h) \\
&= h\left[\sqrt{1 + (f'(x))^2} + \frac{o(h)/h}{\sqrt{1 + (f'(x))^2 + o(h)/h} + \sqrt{1 + (f'(x))^2}}\right] + o(h) \\
&= h\left[\sqrt{1 + (f'(x))^2} + o(h)/h\right] + o(h) = h\sqrt{1 + (f'(x))^2} + o(h) + o(h) \\
&= h\sqrt{1 + (f'(x))^2} + o(h)
\end{aligned}$$

Por otra parte si

$$L(x, y) = \int_x^y \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

entonces

$$L(x, x+h) = h\sqrt{1 + (f'(x))^2} + o(h),\ \ h \to 0.$$

Por la definición de integral de Calvacante-Todorov (Definición 2.6) y el resultado de unicidad dado en el Lema 2.5 se tiene que

$$L(x, y) = \int_x^y \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt,$$

por lo tanto $L(a, b)$ es única y

$$L(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

□

3. Volumen de un sólido de revolución

En esta sección se da una justificación de la fórmula para el volumen de un sólido de revolución, utilizando lo que se conoce como el "método de la conchas cilíndricas" en el cálculo elemental.

DEFINICIÓN 3.5 (Volumen de un sólido de revolución).

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq a < b$ y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Si $V : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ una función en dos variables que cumple las siguientes condiciones

(a) $V(x_1, x_2) + V(x_2, x_3) = V(x_1, x_3)$ para todo $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$,

(b) $V(x, x + h) = \pm U(x, x + h) + o(h)$ para $h \to 0\pm$ si $x \in [a, b]$, donde $U(x, x + h)$ es el volumen de la concha cilíndrica obtenida al rotar el rectángulo con vértices $(x, 0), (x + h, 0), (x + h, f(x))$ y $(x, f(x))$ al rededor del eje y (ver figura),

entonces el número $V(a, b)$ es llamado *volumen del sólido de revolución alrededor del eje y de la región* $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$.

La definición anterior se puede justificar intuitivamente de la siguiente manera:

Para simplificar los argumentos se supondrá que h es positivo y que f es creciente en el intervalo $[x, x + h]$.

La diferencia entre el volumen $V(x, x + h)$ del sólido obtenido al rotar alrededor del eje y la región definida por

$$\{(t, y) \,:\, 0 \leq y \leq f(t), \quad x \leq t \leq x + h\}$$

y el volumen $U(x, x + h)$ de la concha cilíndrica que corresponde a rotar alrededor del eje y la región

$$\{(t, y) \,:\, 0 \leq y \leq f(x), \quad x \leq t \leq x + h\}$$

se puede acotar por el volumen obtenido al rotar alrededor del eje y la región definida por

$$\{(t, y) \,:\, f(x) \leq y \leq f(x + h), \quad x \leq t \leq x + h\}.$$

El volumen de este último sólido es

$$\pi((x + h)^2 - x^2)(f(x + h) - f(x)).$$

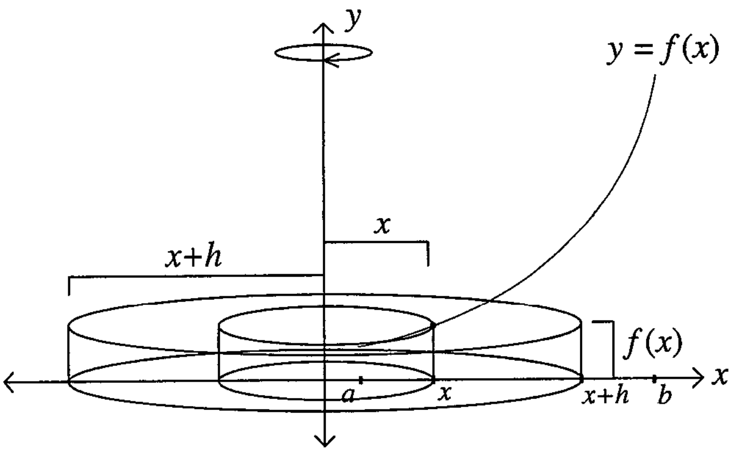
Efectuando las operaciones y usando que $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h), \;\; h \to 0$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
V(x, x+h) - U(x, x+h) &= \pi(2xh + h^2)(f'(x)h + o(h)) \\
&= h\pi(2x+h)(f'(x)h + o(h)),
\end{aligned}
$$

de donde se deduce que

$$\frac{V(x, x+h) - U(x, x+h)}{h}$$

tiende a 0 si $h \to 0^+$.



De la definición de volumen de un sólido de revolución se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.6. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ y $0 \leq a < b$. Entonces existe $V(a,b)$, el volumen del sólido de revolución alrededor del eje y de la región $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$. Además $V(a,b)$ es único y*

$$V(a,b) = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

.

Demostración.

El volumen de la concha cilíndrica es

$$U(x, x+h) = \left|\pi(x+h)^2 - \pi x^2\right| f(x).$$

Por lo tanto debe cumplirse

$$\begin{aligned}V(x, x+h) &= \pm U(x, x+h) + o(h) = \pm \left|\pi(x+h)^2 - \pi x^2\right| f(x) + o(h) \\ &= \pm \left|\pi(2xh + h^2)\right| f(x) + o(h) = \pm 2\pi x f(x)\,|h| + \pi f(x) h^2 + o(h) \\ &= \pm 2\pi x f(x)\,|h| + o(h) = 2\pi x f(x) h + o(h).\end{aligned}$$

Nuevamente por la definición de integral de Calvacante-Todorov (Definición 2.6) y el resultado de unicidad dado en el Lema 2.5 se tiene que

$$V(x, y) = 2\pi \int_x^y t f(t)\, dt.$$

Por lo tanto $V(a, b)$ es único y

$$V(a, b) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

$\square$

Bibliografía

[1] R. Bruzual y M. Domínguez, *Cálculo integral y series de funciones.*
Disponible en http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/an1/ci1van1.pdf.
Citado en la(s) página(s): 8, 14, 22

[2] R. Cavalcante and T. Todorov, *A lost theorem: definite integrals in an asymptotic setting.* American Mathematical Monthly 115, No. 1, 45-56 (2008). Citado en la(s) página(s): 2, 3, 18, 26

[3] R. Courant y H. Robbins, *¿Qué es la Matemática?*. Editorial Aguilar. Citado en la(s) página(s): 3

[4] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*. Editorial McGraw-Hill. Citado en la(s) página(s): 8, 14, 22

[5] M. Spivack, *Calculus* Vol 1 y Vol 2. Editorial Reverté. Citado en la(s) página(s): 8, 14, 22

[6] Wikipedia en español, disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada. Citado en la(s) página(s): 3, 4, 5