UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Sobre espacios Ramsey-Topológicos

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Daniela Torrealba** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: José Gregorio Mijares.

Caracas, Venezuela
Mayo 2009

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Sobre espacios Ramsey-Topológicos**", presentado por el **Br. Daniela Torrealba**, titular de la Cédula de Identidad **18.031.914**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática**.

José Gregorio Mijares
Tutor

Carlos Di Prisco
Jurado

Domingo Quiróz
Jurado

Dedicatoria

A mi madre.

Agradecimiento

Gracias a todos aquellos que me ayudaron de manera directa o indirecta en todas las etapas que viví para la culminación de mis estudios.

A mi tutor por ser una motivación y un ejemplo a seguir en este mundo matemático.

A mi familia por haberme brindado el apoyo necesario para estar en donde estoy ahora y seguir dandome la motivación para seguir recorriendo este largo camino que está comenzando.

También quiero agradecer al Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC) por haber prestado sus instalaciones para la culminación de este trabajo.

Índice general

Introducción

La *teoría de Ramsey* fue iniciada con el trabajo de Frank P. Ramsey recogido en [**10**], en el que el resultado principal conocido como el *Teorema de Ramsey*, originó el desarrollo de la teoría matemática que lleva el nombre de Ramsey. La manera más conveniente de enunciar el teorema de Ramsey en relación al presente trabajo es la siguiente:

Teorema 0.1 (Ramsey [**10**], 1929). *Dados enteros positivo n y k, para toda partición de $\mathbb{N}^{[n]} = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = n\}$ en k clases, existe un conjunto infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tal que $H^{[n]} = \{X \subseteq H : |X| = n\}$ está contenido en una sola clase.*

De esta manera, el teorema de Ramsey puede ser visto como una generalización del principio del casillero o principio del palomar (caso $n = 1$, conviniendo $\mathbb{N}^{[1]} = \mathbb{N}$).

Este tipo de resultados llevó al estudio de la propiedad de Ramsey: un conjunto $X \subseteq \mathbb{N}^{[\infty]}$ es *Ramsey* si existe $H \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $H^{[\infty]} \subseteq X$ o $H^{[\infty]} \cap X = \emptyset$.

El resultado obtenido por Galvin en [**5**] es equivalente a la afirmación "los subconjuntos abiertos de $\mathbb{N}^{[\infty]}$ son Ramsey". Este hecho, junto a otros resultados, fue utilizado por Galvin y por a K. Prikry (ver [**6**]) para demostrar que los borelianos de $\mathbb{N}^{[\infty]}$ son Ramsey. Silver [**11**] extendió este resultado a los analíticos de $\mathbb{N}^{[\infty]}$, es decir, conjuntos que son la imagen de un boreliano por una función continua definida de $\mathbb{N}^{[\infty]}$ en sí mismo. Posteriormente, Ellentuck [**4**] dió una demostración topológica del resultado de Silver, empleando la topología que considera a los conjuntos definidos de la forma $[a, A] = \{B \in \mathbb{N}^{[\infty]} : a \sqsubset B \subseteq A\}$; donde a es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y $A \in \mathbb{N}^{[\infty]}$. El consideró este tipo de conjuntos como abiertos básicos para una topología (conocida como topología exponencial o topología de Ellentuck). El resultado de Ellentuck puede ser enunciado de la siguiente manera:

Teorema 0.2 (Ellentuck [**4**], 1974). *Un conjunto $X \subseteq \mathbb{N}^{[\infty]}$ es Ramsey si y sólo si tiene la propiedad de Baire respecto a la topología de Ellentuck.*

El teorema de Ellentuck no sólo da una demostración del resultado de Silver, sino que también caracteriza a la propiedad de Ramsey en términos topológicos.

Con el teorema de Ellentuck es el resultado se inicia la *teoría topológica de Ramsey*, la cual está desarrolloda en el trabajo de S. Todorcevic [**12**].

Esta teoría estudia los espacios topológicos en los que se puede demostrar el teorema de Ellentuck, es decir, en el que la propiedad de Ramsey y la propiedad de Baire son equivalentes. Los espacios en los que esto es posible se conocen como espacios de *Ramsey-Topológicos.*

S. Todorcevic ha podido identificar y formalizar un conjunto de características que caracterizan a dichos espacios.

En este trabajo revisaremos los axiomas que conforman la caracterización dada por Todorcevic y mostraremos algunos ejemplos de espacios que los satisfacen. En particular estudiaremos el espacio de Ellentuck y el espacio de las matrices infinitodimensionales sobre un cuerpo finito. En este último contexto, estudiaremos un resultado que se refiere a coloraciones de espacios vectoriales de dimensión infinita.

CAPíTULO 1

Topología

En este capítulo veremos algunos conceptos básicos a cerca de espacios topológicos como definición de topología, espacios topológicos, continuidad y homeomorfismos, conjuntos borelianos, analíticos, entre otros.

1. Preliminares: Producto Cartesiano

DEFINICIÓN 1.1. Dada una familia de conjuntos $\{A_\alpha \,|\, \alpha \in \Lambda\}$. El *producto cartesiano* $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es el conjunto de funciones $c : \mathcal{A} \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ tales que tienen la siguiente propiedad: $c(\alpha) \in A_\alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$.
Es decir, $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \{c : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \,|\, \forall\alpha \in \Lambda, c(\alpha) \in A_\alpha\}$.

Un elemento $c \in \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ se denota por $\{a_\alpha\}_\alpha$, con $a_\alpha \in A_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$.
De esta forma, se puede decir que $a_\alpha \in A_\alpha$ es la *α-ésima coordenada* de $\{a_\alpha\}_\alpha$.
Al conjunto A_α se le llama el *α-ésimo factor* del producto cartesiano $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$.

Para cada $\alpha \in \Lambda$, la función $p_\beta : \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \longrightarrow A_\beta : \{a_\alpha\} \longmapsto a_\beta$ (ó, equivalentemente, $c \mapsto a_\beta$) es llamada *proyección sobre el β-ésimo factor* de $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$.

NOTACIÓN 1.2. *Para cada $\beta \in \Lambda$, dado $C_\beta \subset A_\beta$ denotamos $p_\beta^{-1}[C_\beta] = \{\{a_\alpha\}_\alpha \in \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \,|\, a_\beta \in C_\beta\}$ por $\langle C_\alpha\rangle$.*

Además, para un número finito de conjuntos $C_{\alpha_1} \subset Y_{\alpha_1}, \cdots, C_{\alpha_n} \subset Y_{\alpha_n}$, denotamos $\langle C_{\alpha_1}\rangle \cap \cdots \cap \langle C_{\alpha_n}\rangle$ por $\langle C_{\alpha_1}, \cdots, C_{\alpha_n}\rangle$.

OBSERVACIÓN 1.3. Sea $\{Y_\alpha \,|\, \alpha \in \Lambda\}$ una familia de conjuntos no vacíos. Para cada $\alpha \in \Lambda$, sean A_α, B_α subconjuntos de Y_α se tiene que:

(1) $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \cap \prod_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha = \prod_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha \cap B_\alpha)$.
(2) $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \cup \prod_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha = \prod_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha \cup B_\alpha)$.

Efectivamente,

$$\begin{aligned}\{x_\alpha\}_\alpha \in \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \cap \prod_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha \Leftrightarrow \{x_\alpha\}_\alpha \in \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \wedge \{x_\alpha\}_\alpha \in \prod_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha\\ \Leftrightarrow \forall\alpha \in \Lambda, x_\alpha \in A_\alpha \wedge \forall\alpha \in \Lambda, x_\alpha \in B_\alpha \Leftrightarrow \forall\alpha \in \Lambda, x_\alpha \in A_\alpha \cap B_\alpha\\ \Leftrightarrow \{x_\alpha\}_\alpha \in \prod_\alpha (A_\alpha \cap B_\alpha).\end{aligned}$$

De forma análoga para la parte (2).

2. Espacios Topológicos

DEFINICIÓN 1.4. Sea X un conjunto. Una *topología* (o estructura topológica) en X es una familia τ de subconjuntos de X que satisfacen:

(1) Cada unión de miembros de τ es también miembro de τ
(2) Cada intersección finita de miembros de τ es también miembro de τ
(3) $\emptyset$ y X son miembros de τ

DEFINICIÓN 1.5. Un par (X, τ) donde X es un conjunto y τ una topología en X es llamado: *espacio topológico*

Los elementos del espacio topológico son llamados *puntos*. Los elementos de τ son llamados *conjuntos abiertos* del espacio topológico (X, τ) (o de la topología τ).

DEFINICIÓN 1.6. Una *métrica* en un conjunto X es una función

$$d : X \times X \to [0, \infty)$$

tal que:

(i) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
(ii) $d(x, y) = \rho(y, x)$, y
(iii) para todo $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Si d es una métrica en X, se dice que (X, d) es un espacio métrico. Todo espacio métrico tiene una topologá natural definida por la métrica. Esta es la colección de todos los subconjuntos $A \subseteq X$ tales que para todo elemento $x \in A$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\} \subseteq A$. Un espacio topológico (X, τ) se dice metrizable si existe una métrica d en X tal que τ coincide con la topología definida por la métrica d.

EJEMPLO 1.7. Sea X un conjunto cualquiera.

(1) Si definimos $\tau = \{\emptyset, X\}$, entonces (X, τ) es un espacio topológico. A τ se le conoce como topología indiscreta.
(2) Sea $\tau = \mathcal{P}(X)$, (τ, X) es un espacio topológico. Esta topología es llamada topología discreta.
(3) Cualquier espacio métrico (X, d) es un espacio topológico, si consideramos τ_d la topología inducida por la métrica d, diremos que $A \in \tau_d$, o lo que es lo mismo; A es un abierto siempre que cada $x \in A$ este contenido en una bola abierta totalmente contenida en A, es decir:
A es abierto en $(x, \tau_d) \Leftrightarrow \forall x \in A$ si $\exists r_x > 0 : x \in B(x, r_x) \subseteq A$

El la recta real, es decir en $\mathbb{R}$, la topología usual es la determinada por los siguientes conjuntos:
Un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, es un conjunto de la forma

$$\{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Decimos que éste es el intervalo abierto determinado por a y b, y lo denotamos (a, b); si $a < b$ el intervalo es no vacío. Un conjunto A de números reales es abierto si para cada $x \in A$, existe un intervalo abierto (a, b) tal que $x \in (a, b) \subseteq A$.

DEFINICIÓN 1.8. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $x \in X$. Una *vecindad* de x es cualquier conjunto abierto que contiene a x.

3. Bases

DEFINICIÓN 1.9. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B} \subset \tau$ es llamada *base de* τ si cada conjunto abierto es la *unión* de miembros de $\mathcal{B}$.

DEFINICIÓN 1.10. Decimos que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una *subbase* de τ si todo elemento de τ es unión de intersecciones de $\mathcal{S}$.

TEOREMA 1.11. *Sea $\mathcal{B} \subset \tau$. Las siguientes propiedades de $\mathcal{B}$ son equivalentes:*

(1) *$\mathcal{B}$ es una base para τ*
(2) *Para cada $G \in \tau$ y cada $x \in G$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subset G$*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $x \in G$; entonces si $G \in \tau$ y $\mathcal{B}$ es una base, $G = \bigcup_\alpha U_\alpha$, donde cada $U_\alpha \in \mathcal{B}$. Entonces existe algún $U_\alpha \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_\alpha \subset G$. (2) $\Rightarrow$ (1) Sea $G \in \tau$; para cada $x \in G$, hallamos $U_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_x \subset \mathcal{B}$. Entonces, $G = \{U_x : x \in G\}$. $\square$

Teorema 1.12. *Sea $\mathcal{B} \subset \tau$ una base para τ. Entonces A es un abierto en τ si y sólo si para cada $x \in A$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subset A$.*

Demostración. Si A es abierto, la conclusión se sigue del teorema anterior. Recíprocamente, si para cada $x \in A$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subset A$ podemos encontrar $A = \cup\{U_a : a \in A\}$, donde cada $U_a \in \mathcal{B} \subset \tau$; con lo que A es abierto 8 se sigue de la definición. $\square$

Definición 1.13. Sean τ_1 y τ_2 dos topologías en un conjunto X. Decimos que τ_1 es más *fina* que o *refinamiento* de τ_2 si todo elemento de τ_2 es unión de elementos de τ_1 (es decir, τ_1 tiene mas abiertos que τ_2).

4. Conceptos Elementales

Sea (X, τ) un espacio topológico. A cada $A \in X$ (tambien denotado por A^c) le asociamos su complemento $X \setminus A$. Como además, $A = X \setminus (X \setminus A)$ entonces A está unívocamente determinado por su complemento. Por lo tanto, a partir de los complemento de los conjuntos abiertos, podemos recuperar los conjuntos abiertos mismos. Con esta observación diremos que:

Definición 1.14. $A \subset X$ es llamado *cerrado* si A^c es un conjunto abierto.

Ejemplo 1.15.
(1) En la topología indiscreta, los únicos conjuntos cerrados son $\emptyset$ y X. Mientras que en la topología discreta cada conjunto es abierto y cerrado.
(2) En $\mathbb{R}$ con la topología usual, el conjunto $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$ es el intervalo cerrado determinado por a y b. Cada intervalo $[a, \infty)$ es un conjunto cerrado, porque su complemento $\mathbb{R} \setminus [a, \infty) = (-\infty, a)$ es un abierto.

Definición 1.16. Sea $A \subseteq X$. El *interior* de A, denotado por A°, es la reunión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A. Un punto $x \in A$ tal que $x \in A^\circ$ se llama *punto interior* de A.

EJEMPLO 1.17. Si $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ es el conjunto de los números racionales. Entonces $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ y $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset$, ya que cada intervalo abierto contiene elementos de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Este ejemplo muestra que la relación: $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$.

DEFINICIÓN 1.18. Sea $A \subset X$. La *clausura* de A es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A y es denotado por $\overline{A}$.

DEFINICIÓN 1.19. Sea $A \subset X$. un punto $x \in X$ es llamado *punto de acumulación* de A si cada vecindad de x contiene al menos un punto de A distinto de x. El conjunto de todos los puntos de acumulación se denota por A'.

TEOREMA 1.20. *Sea $A \subseteq X$, entonces:*

i *La clausura de A, $\overline{A}$, es la reunión de A con sus puntos de acumulación.*

ii *Un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a sus puntos de acumulación.*

DEMOSTRACIÓN.

i Si $x \in X$ es un punto de acumulación de A, entonces cada entorno abierto de x intersecta a A, y en consecuencia, $x \in \overline{A}$. Por otro lado, si $x \in \overline{A} \setminus A$ entonces x es un punto de acumulación de A. En conclusión, $\overline{A} = A \cup A'$.

ii Como $\overline{A} = A \cup A'$ y A es cerrado si y sólo si $\overline{A} = A$, entonces A es cerrado si y sólo si $A' \subseteq A$

□

EJEMPLO 1.21. En $\mathbb{R}$ con la topología usual tenemos:

$$\overline{(a,b)} = \overline{(a,b]} = \overline{[a,b)} = \overline{[a,b]} = [a,b]$$

ya que a y b son los puntos de acumulación de (a,b), $(a,b]$ y $[a,b)$. Además $[a,b]$ es un conjunto cerrado.

DEFINICIÓN 1.22. Una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de elementos de un espacio topológico (X,τ) *converge* a $x \in X$ si para todo abierto U que contiene a x, existe m tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq m$. En este caso, se escribe $lim_{n\to\infty} x_n = x$.

DEFINICIÓN 1.23. Un espacio topológico es *compacto* si para cada colección de abiertos cuya unión es X existe una subcolección finita cuya unión es también X. Esto generalmente se expresa diciendo que todo *cubrimiento* de X por abiertos tiene un *subcubrimiento* finito.

5. Continuidad y Homeomorfismos

DEFINICIÓN 1.24. Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) dos espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si:

$$f^{-1}(A) \in \tau_1 \Leftrightarrow A \in \tau_2$$

es decir, que la imagen inversa por f de un subconjunto abierto de Y es un subconjunto abierto de X.

EJEMPLO 1.25. (1) Si (X, τ_1) y (Y, τ_2) son dos espacios topológicos arbitrarios y $y_o \in Y$ está fijo. La función constante $c : X \to Y$, dada por $c(x) = y_o$, $\forall\, x \in X$ es continua.

(2) La función identidad $I_x : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es continua si y sólo si τ_1 es más fina que τ_2.

DEFINICIÓN 1.26. Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) dos espacios topológicos. Sea función $f : X \to Y$ biyectiva. Entonces, f es un *homeomorfismo* si f es continua y f^{-1} también. Si tal función existe, entonces diremos que (X, τ_1) y (Y, τ_2) son *homeomorfos*.

OBSERVACIÓN 1.27. (1) Si $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ es homeomorfismo, entonces $f^{-1} : (Y, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ también.

(2) Si $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ es homeomorfismo entonces:

$$A \in \tau_1 \Leftrightarrow f(A) \in \tau_2$$

6. Propiedades Topológicas

DEFINICIÓN 1.28. Un espacio topológico X es llamado *primer numerable* (*I-numerable*), si él satisface el siguiente axioma:

$AI)$ Para cada $x \in X$, existe una base numerable β_x de abiertos que contienen al punto x, tal que $\forall\, G \in X$ abierto $x \in G \Rightarrow \exists\, B \in \beta_x \;:\; B \subseteq G$.

EJEMPLO 1.29. Si X es un espacio métrico, $x_o \in X$ entonces $\beta_{x_o} = \{B(x_o, \frac{1}{n}) :\; n \in \mathbb{N}\}$ es una base local en x_o numerable. Por lo tanto cualquier espacio métrico es I-numerable.

DEFINICIÓN 1.30. Un espacio topológico (X, τ) es *segundo numerable* (*II-numerable*) si él satisface el siguiente axioma:

$AII)$ τ contiene una base numerable β.

EJEMPLO 1.31. $\mathbb{R}$ con la topología usual es II-numerable, ya que $\beta = \{(a,b) : \ a < b \in \mathbb{Q}\}$ es una base numerable de $\mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 1.32. $D \subset X$ es *denso* en X si $\overline{D} = X$. Claramente, X es denso en X, de hecho, es el único cerrado denso en X

DEFINICIÓN 1.33. Un espacio topológico X se dice *separable* si satisface el siguiente axioma:
X contiene un subconjunto denso numerable.

EJEMPLO 1.34. $\mathbb{R}$ es saparable con lo topología usual. Pero $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ no es separable.

7. Espacios Topológicos Producto

Dados dos espacios topolgícos X e Y, consideremos $X \times Y$ el producto cartesiano de X e Y.

DEFINICIÓN 1.35. Un rectángulo abierto en $X \times Y$ es un conjunto de la forma. $U \times V \subseteq X \times Y$, tal que U es abierto en X y V es abierto en Y.

Si $U \times V$ y $W \times S$ son rectángulos abiertos en $X \times Y$ entonces su intersección $(U \times V) \cap (W \times S) = (U \cap W) \times (V \cap S)$ también es un rectángulo abierto.
Por lo tanto, el conjunto de todos los rectángulos abiertos en $X \times Y$ es una base de una única topologá de $X \times Y$. Esta topología recibe el nombre de *topología producto* de las topologías de $X \times Y$. El conjunto $X \times Y$ dotado de esta topología se llama espacio topológico producto de los espacios X e Y.
En consecuencia, $Z \subseteq X \times Y$ es un abierto en la topología producto es un abierto, si y sólo si, para cada punto $(x, y) \in Z$ existen abiertos $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \times V \subseteq Z$.
De manera natural, estan asociadas al espacio producto $X \times Y$ dos proyecciones canónicas: $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$, dadas, respectivamente, por: $p_1(x, y) = x$ y $p_2(x, y) = y$. Estas funciones son continuas, ya que si $U \subseteq X$ es abierto, $p_1^{-1}(U) = U \times Y$, y analogamente, si $V \subseteq Y$ es un abierto, $p_2^{-1}(V) = X \times V$

PROPOSICIÓN 1.36. *Si las topologías de X e Y tienen base β_1 y β_2, respectivamente, entonces la familia:*

$$\beta = \{U \times V | U \in \beta_1 \ y \ V \in \beta_2\}$$

es base de la topología producto.

DEFINICIÓN 1.37. Sea $\{Y_\alpha \,|\, \alpha \in \Lambda\}$ una familia de espacios topológicos. Sea τ_α una topología para cada $\alpha \in \Lambda$. La *topología del producto cartesiano* $\prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ tiene como subbase todos los conjuntos $\langle U_\beta \rangle = p_\beta^{-1}[U_\beta] = \{(x_\alpha)_\alpha \in \prod_\alpha Y_\alpha \,|\, x_\beta \in U_\beta\}$ para todos los $U_\beta \in \tau_\beta$ y para todos los $\beta \in \Lambda$, donde p_β es la proyección de $\prod_\alpha Y_\alpha$ en el β-ésimo factor Y_β.

OBSERVACIÓN 1.38. Dado $C_\beta \subseteq Y_\beta$, como $\langle C_\beta \rangle = p_\beta^{-1}[C_\beta]$ es el conjunto $\{(x_\alpha)_\alpha \in \prod_\alpha Y_\alpha \,|\, x_\beta \in C_\beta\}$, esta definición se puede generalizar para un número finito de conjuntos, así:

$$\langle C_{\alpha_1}, \cdots, C_{\alpha_n} \rangle = \langle C_{\alpha_1} \rangle \cap \cdots \cap \langle C_{\alpha_n} \rangle = \{(x_\alpha)_\alpha \in \prod_\alpha Y_\alpha \,|\, x_{\alpha_1} \in C_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_n} \in C_{\alpha_n}\}$$

TEOREMA 1.39. *Para un conjunto arbitrario Λ, el espacio $\prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ cumple lo siguiente:*

(1) *Para cada $\alpha \in \Lambda$, sea Σ_α una subbase de la topología τ_α de Y_α. Entonces la familia $\{\langle V_\beta \rangle \,|\, V_\beta \in \Sigma_\beta,\ \beta \in \Lambda\}$ es una subbase de la topología del producto cartesiano en $\prod_\alpha Y_\alpha$.*

(2) *Si $A_\alpha \subseteq Y_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces $\overline{\prod_\alpha A_\alpha} = \prod_\alpha \overline{A_\alpha}$, por lo tanto el producto cartesiano de conjuntos cerrados es cerrado (a diferencia de los conjuntos abiertos: el producto cartesiano arbitrario de abiertos no es abierto, en general).*

DEMOSTRACIÓN. (1) Para cada $\alpha \in \Lambda$, todo abierto U_α se escribe como unión de intersecciones finitas de elementos de Σ_α (ya que Σ_α es subbase de τ_α).
Como $\langle A_\beta \cap B_\beta \rangle = \langle A_\beta \rangle \cap \langle B_\beta \rangle$ para todo $A, B \in \Sigma_\beta$, entonces cada abierto básico se escribe como intersección de un número finito de elementos de Σ_β.
(2) Supongamos que $\{y_\alpha\}_\alpha \in \overline{\prod_\alpha A_\alpha}$.
Sea $\beta \in \Lambda$, y sea U_β una vecindad de y_β.
Como $\langle U_\beta \rangle$ es una vecindad de $\{y_\alpha\}_\alpha$, se tiene que $\langle U_\beta \rangle \cap \prod_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$.
Esto es $\{\{a_\alpha\}_\alpha \in \prod_\alpha A_\alpha \,|\, a_\beta \in U_\beta\} \neq \emptyset$. Luego $A_\beta \cap U_\beta \neq \emptyset$. Por lo tanto $y_\beta \in \overline{A_\beta}$.
Recíprocamente, supongamos que $\{y_\alpha\}_\alpha \in \prod_\alpha \overline{A_\alpha}$, es decir para cada $\beta \in \Lambda$, $y_\beta \in \overline{A_\beta}$, de modo que para cada $\beta \in \Lambda$ se cumple que para toda vecindad U_β de y_β, $U_\beta \cap A_\beta \neq \emptyset$. Por lo tanto $\langle U_\beta \rangle \cap \prod_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$.
Luego, para un número finito de coordenadas, se cumple que $\langle U_{\beta_1}, \cdots, U_{\beta_2} \rangle \cap \prod_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$.
Como $\langle U_{\beta_1}, \cdots, U_{\beta_2} \rangle$ es una vecindad de $\{y_\alpha\}_\alpha$, se tiene que $\{y_\alpha\}_\alpha \in \overline{\prod_\alpha A_\alpha}$.

Sea $\{A_\alpha \subseteq Y_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ una familia de conjuntos abiertos.
Dado $\{a_\alpha\}_\alpha$ un elemento de $\prod_\alpha A_\alpha$, toda vecindad de $\{a_\alpha\}_\alpha$ tiene la forma $\{\{x_\alpha\}_\alpha \in \prod_\alpha A_\alpha \mid x_{\alpha_1} \in U_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_n} \in U_{\alpha_n}\}$, con $U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha n}$ vecindades de $a_{\alpha_1}, \cdots, a_{\alpha_2}$ respectivamente. Por lo tanto, nunca se podrá hallar una vecindad contenida en $\prod_\alpha A_\alpha$. $\square$

Sea F un conjunto finito. Consideremos el conjunto $F^{\mathbb{N}}$ de las funciones de F en $\mathbb{N}$, o sucesiones infinitas de elementos de F, dotado de la topología producto que resulta de dar a F la topología discreta. Dada una sucesión finita s de elementos de F, sea $U_s = \{x \in F^{\mathbb{N}} : x(i) = s(i) \forall\ 0 \leq i \leq n\}$, donde $x(i)$ y $s(i)$ es la i-ésima entrada de x y s respectivamente. Los conjuntos de la forma U_s constituyen una base finita de la topología de $\mathbb{N}$ (es finita ya que el conjunto de sucesiones finitas de elementos de F es finita).
Veamos que $\{U_s : s \subset \mathbb{N}, |s| < \infty\}$ es una base para la topología producto. Con esta topología, describiremos la convergencia en $F^{\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: Una sucesión $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ converge a x si y sólo si $\forall\ n \exists\ m \forall\ k \geq m\ (x_k(n) = x(n))$. Este espacio es metrizable por la métrica dada por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ \dfrac{1}{(menor\ n\ tal\ que\ x(n) \neq y(n)) + 1} & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{1.1}$$

Para demostrar que esta métrica dá la topología de $F^{\mathbb{N}}$ basta verificar que determina la convergencia que mencionamos anteriormente.

Todos estos conceptos pueden ser mejor estudiados en [**13**] y [**16**].

CAPíTULO 2

Teoría Descriptiva de Conjuntos

En este capítulo vamos a describir conjuntos con una estructura topológica. Definiremos lo que es un espacio Polaco y con ello definiremos a los conjuntos Borelianos y los conjuntos Analíticos para luego relacionarlos con el Operador de Souslin.

1. Espacios Polacos

DEFINICIÓN 2.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Una *sucesión de Cauchy* es una sucesión (x_n) de elementos de X tal que $lim_{n\to m}d(x_n, x_m) = 0$. Llamamos a (X, d) *completo* si cada sucesión de Cauchy tiene límite en X. Dado (X, d), un espacio métrico cualquiera, existe un espacio métrico completo $(\hat{X}, \hat{d})$ tal que (X, d) es un subespacio de $(\hat{X}, \hat{d})$ y X es denso en $\hat{X}$. Este espacio es único por isometría y es llamado la *completación* de (X, d). Claramente, $\hat{X}$ es separable sii X lo es.

DEFINICIÓN 2.2. Un espacio topológico X es *completamente metrizable* si este admite una métrica compatible d tal que (X, d) es completo. Un espacio separable completamente metrizable es llamado *Polaco*.

EJEMPLO 2.3. (1) $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ son Polacos; el intervalo unitario

$$\mathbb{I} = [0, 1]$$

el círculo unitario

$$\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{C} : \ |x| = 1\}$$

el *cubo n-dimensional* $\mathbb{I}^n$, el *cubo de Hilbert* $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$, el *toro n-dimensional* $\mathbb{T}^n$ y el *toro infinito-dimensional* $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ son Polacos.

(2) Cualquier conjunto A con la topología discreta es completamente metrizable, y si es numerable, este es Polaco.

(3) El espacio $A^{\mathbb{N}}$, visto como el producto infinito de muchas copias de A con la topología discreta, es completamente metrizable y si A es numerable entonces $A^{\mathbb{N}}$ es Polaco.

De particular importancia son los casos $A = 2 = \{0, 1\}$ y $A = \mathbb{N}$.

Llamamos a

$$\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$$

el *Espacio de Cantor* y

$$\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

el *Espacio de Baire*.

2. Categoría de Baire

Sea X un espacio topológico. Un conjunto $A \subseteq X$ es llamado *nunca denso* si su clausura $\overline{A}$ tiene interior vacío, es decir, $(\overline{A})^\circ = \emptyset$. (Esto es equivalente a que $X \backslash \overline{A}$ es denso.) Entonces, A es nunca denso sii $\overline{A}$ es nunca denso. Un conjunto $A \subseteq X$ es *magro* (o de *primera categoría*) si $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, donde cada A_n es nunca denso. Un conjunto *no-magro* es llamado de *segunda categoría*. El complemento de un conjunto magro es llamado *comagro* (o *residual*). Entonces, un conjunto es comagro sii contiene la intersección de una familia numerable de conjuntos densos abiertos.

Un *ideal* en un conjunto X es una colección de subconjuntos de X que contiene a $\emptyset$ y es cerrado bajo subconjuntos y uniones finitas. Si también es cerrado bajo uniones numerables entonces lo llamaremos *σ-ideal*. Los conjuntos nunca densos de un espacio topológico forman un ideal, y los conjuntos magros forman un σ-ideal.

Proposición 2.4. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *Cada conjunto abierto no vacío en X es no-magro.*
ii) *Cada comagro en X es denso.*
iii) *La intersección de una familia numerable de densos abiertos en X es denso.*

Definición 2.5. Un espacio topológico es llamado *espacio Baire* si satisface la proposición anterior.

Sea $\mathcal{I}$ un σ-ideal en un conjunto X. Si $A, B \subseteq X$, decimos que A, B son *iguales m"odulo $\mathcal{I}$*, denotado por $A =_{\mathcal{I}} B$, si la *diferencia simétrica* $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (b \setminus A) \in \mathcal{I}$.

En el caso particular donde $\mathcal{I}$ es el σ-ideal de los conjuntos magros de un espacio topológico, escribimos:

$$A =^* B$$

si A y B son iguales módulo conjuntos magros.

Definición 2.6. Sea X un espacio topológico. Un conjunto $A \subseteq X$ tiene la *propiedad de Baire* (PB) si $A =^* U$ para algún abierto $U \subseteq X$.

3. Borelianos

Definición 2.7. Decimos que $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un *álgebra de conjuntos* si A es cerrada bajo uniones finitas y complementaciones. Y decimos que A es una *σ-álgebra* si además es cerrado bajo uniones numerables. Dado $\varepsilon \subseteq \mathcal{P}(X)$, existe una menor σ-álgebra contenida en ε, llamada *σ-álgebra generada por* ε y denotada por $\sigma(\varepsilon)$. También ε es llamado conjunto de *generadores* para $\sigma(\varepsilon)$. Una σ-álgebra es *generada numerable* si ésta tiene un conjunto numerable de generadores.

Un *espacio medible* es un par $(X, \mathcal{S})$, donde X es un conjunto y $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra en $\mathcal{S}$. El miembro $\mathcal{S}$ es llamado *medida*.

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Denotemos por $\mathcal{N}$ al espacio ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ de todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ dotado de la tolopogía que resulta de dar a $\mathbb{N}$ la topología discreta. Este espacio se llama el *espacio de Baire*.

Un espacio *tipo Baire* es un producto $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ donde cada factor es $\mathbb{N}$ o $\mathcal{N}$. Diremos que el espacio es de tipo 0 si todos los factores son $\mathbb{N}$ y en caso contrario decimos que es de tipo 1.

Estudiaremos clases de subconjuntos de espacios tipo Baire. Diremos que Γ es una *clase de conjuntos* si todo $X \in \Gamma$ es un subconjunto de un espacio tipo Baire. Si $\mathcal{X}$ es un espacio tipo Baire, denotaremos por $\Gamma(\mathcal{X})$ a la colección $\Gamma \cap \mathcal{P}(\mathcal{X})$.

Definición 2.8. Sea $\mathcal{X}$ un espacio tipo Baire, $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, la clase de los borelianos de $\mathcal{X}$, es la menor σ-álgebra de subconjuntos de $\mathcal{X}$ que contiene a los abiertos. Un conjunto perteneciente a esta clase se llama conjunto *boreliano*.

Si Γ es una clase de subconjuntos de un espacio $\mathcal{X}$ tipo Baire, denotaremos por $\sigma\Gamma$ a la clase de uniones numerables de conjuntos en Γ, por $\delta\Gamma$ denotamos a la colección de intersecciones numerables de elementos de Γ, y $c\Gamma$ denota la clase de complementos de conjuntos en Γ.

DEFINICIÓN 2.9. $\sum_1^o(\mathcal{X})$ es la clase de los abiertos de $\mathcal{X}$, $\prod_1^o(\mathcal{X})$ la clase de los cerrados de $\mathcal{X}$ y $\Delta_1^o(\mathcal{X}) = \sum_1^o(\mathcal{X}) \cap \prod_1^o(\mathcal{X})$. Inductivamente definimos:
$\sum_\alpha^o(\mathcal{X}) = \sigma(\cup\{\prod_\xi^o(\mathcal{X}) : \xi < \alpha\})$
$\prod_\alpha^o(\mathcal{X}) = c\sum_\alpha^o(\mathcal{X})$ y
$\Delta_\alpha^o(\mathcal{X}) = \sum_\alpha^o(\mathcal{X}) \cap \prod_\alpha^o(\mathcal{X})$

Sean $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos familias de subconjuntos de un espacio tipo Baire, decimos que la familia $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ *reduce* a la familia $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ si, y sólo si,

a) $\cup\{A_n : n \in \mathbb{N}\} = \cup\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$,

b) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ B_n \subset A_n$,

c) $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

Una clase Γ de conjuntos tiene la *propiedad de reducción* si para toda familia $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos en Γ existe una familia $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ también de conjuntos de Γ que la reduce.
Decimos que Γ tiene la *propiedad de separación* si, y sólo si, para cada $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$ tal que $\cap\{A_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, existe $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma \cap c\Gamma$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset B_n$ y $\cap\{B_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.

4. Analíticos

DEFINICIÓN 2.10. Para un espacio $\mathcal{X}$, definimos:
$\sum_1^1(\mathcal{X}) = \{f''A : A \subseteq \mathcal{N} \textit{ y } f : \mathcal{N} \to \mathcal{X} \textit{ es continua}\}$,
$\prod_1^1(\mathcal{X}) = c\sum_1^1(\mathcal{X})$,
$\Delta_1^1(\mathcal{X}) = \sum_1^1(\mathcal{X}) \cap \prod_1^1(\mathcal{X})$, y en general,
$\sum_{n+1}^1(\mathcal{X}) = \{f''A : A \in \prod_n^1(\mathcal{N}) \textit{ y } f : \mathcal{N} \to \mathcal{X} \textit{ es continua}\}$,
$\prod_n^1(\mathcal{X}) = c\sum_n^1(\mathcal{X})$, y
$\Delta_n^1(\mathcal{X}) = \sum_n^1(\mathcal{X}) \cap \prod_n^1(\mathcal{X})$.
donde $f''A$ es la imágen de A por f.

DEFINICIÓN 2.11. Un conjunto se llama *analítico* si pertenece a la clase $\sum_1^1$, y un conjunto es *coanalítico* si pertenece a la clase $\prod_1^1$.

PROPOSICIÓN 2.12. *Sea X un espacio polaco, y sea $A \subseteq X$. Entonces las siguientes son equivalentes:*

i) *A es analítico.*
ii) *Existe un Polaco Y y un Boreliano $B \subseteq X \times Y$ tal que $A = proy_X(B)$ (A es la proyección de B en X).*
iii) *Existe un cerrado $F \subseteq X \times \mathcal{N}$ tal que $A = proy_X(F)$.*

5. Operador de Souslin

DEFINICIÓN 2.13. Un *Operador de Souslin* $\mathcal{A}$ es una operación que aplicada a la familia $Y_s(s \in \mathbb{N}^{<\infty})$ de conjuntos indexados por sucesiones finitas de enteros no negativos, da como resultado:

$$\mathcal{A}(Y_s : \ s \in \mathbb{N}^{<\infty}) = \bigcup_{x \in \mathbb{N}^\infty} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_{s|n}$$

OBSERVACIÓN 2.14. A la familia $Y_s(s \in \mathbb{N}^{<\infty})$ la llamamos *esquema de Souslin.*

Dada una familia de conjuntos $\mathcal{F}$, decimos que $\mathcal{F}$ es *cerrada bajo el operador de Souslin* si dado un esquema de Souslin en $\mathcal{F}$ entonces el resultado del operador es un elemento de $\mathcal{F}$.

TEOREMA 2.15 (Marczewski). *Sea $\mathcal{P}$ una familia no vacía de subconjuntos de algún conjunto X tal que cada miembro de $\mathcal{P}$ es $\mathcal{P}$-Baire y el ideal de los $\mathcal{P}$-magros es σ-aditivo. Entonces, el álgebra de los subconjuntos $\mathcal{P}$-Baire de X es cerrado sobre el operador de Souslin.*

LEMA 2.16. *Un conjunto A en un espacio Polaco es analítico si y sólo si A es el resultado de aplicar el operador de Souslin $\mathcal{A}$ a alguna familia de conjuntos cerrados.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos primero que si $Y_s(s \in \mathbb{N}^{<\infty})$, son conjuntos cerrados en un espacio Polaco X, entonces $A = \mathcal{A}(Y_s : \ s \in \mathbb{N}^{<\infty})$ es analítico. Tenemos:

$$x \in A \leftrightarrow \exists\ a \in \mathcal{N} \,|\, x \in \cap_{n=0}^{\infty} Y_{a|n}$$

$$\leftrightarrow \exists\ a \,|\, (x, a) \in \cap_{n=0}^{\infty} B_n$$

donde $B_n = \{(x,a) : x \in Y_{a|n}\}$. Cada B_n es un conjunto boreliano en $X \times \mathcal{N}$ por lo tanto A es analítico.

Recíprocamente, sea $A \subset X$ un analítico. Entonces, existe una función contínua $f : \mathcal{N} \to X$ tal que $f(\mathcal{N}) = A$. Nótese que para cada cada $a \in \mathcal{N}$,

$$\cap_{n=0}^{\infty} f(O(a|n)) = \cap_{n=0}^{\infty} \overline{f(O(a|n))} = \{f(a)\}$$

donde $O(s) = \{a \in \mathcal{N} : a|n = s\}$, con $s \in \mathcal{N}$.

Entonces,

$$A = f(\mathcal{N}) = \cup_{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \cap_{n=0}^{\infty} \overline{f(O(a|n))}$$

, y por lo tanto, A es el resultado de aplicarle el operador $\mathcal{A}$ a los conjuntos cerrados $\overline{f(s)}$.

$\square$

Estos temas son estudiados de manera más detallada en los libros [**15**] y [**17**]

CAPíTULO 3

Álgebra

A continuación, vamos a ver conceptos elementales sobre los objetos de estudio en este trabajo, es decir, las matrices y los espacios vectoriales. Para ello debemos introducir algunos conceptos previos:

1. Grupos, Anillos y Cuerpos

Dado un conjunto arbitrario no vacío $\mathcal{S}$ definamos $A(\mathcal{S})$ como el conjunto de todas las aplicaciones biyectivas del conjunto $\mathcal{S}$ sobre sí mismo. Para cualesquier dos elementos $\sigma, \tau \in A(\mathcal{S})$ introducimos un producto al que representamos por $\sigma \circ \tau$, entonces los siguientes hechos acerca de los elementos de $A(\mathcal{S})$ sometidos a este producto son válidos:

(1) Siempre que $\sigma, \tau \in A(\mathcal{S})$ entonces se sigue que $\sigma \circ \tau$ está también en $A(\mathcal{S})$. Describimos esto diciendo que $A(\mathcal{S})$ es *cerrado* respecto al producto.

(2) Para cualesquier tres elementos $\sigma, \tau, \mu \in A(\mathcal{S})$, $\sigma \circ (\tau \circ \mu) = (\sigma \circ \tau) \circ \mu$. A esta relación se le llama *ley asociativa*.

(3) Hay un elemento muy especial $\iota \in A(\mathcal{S})$ que satisface $\iota \circ \sigma = \sigma \circ \iota = \sigma$ para todo $\sigma \in A(\mathcal{S})$. A tal elemento se le llama *elemento identidad* de $A(\mathcal{S})$.

(4) Para todo $\sigma \in A(\mathcal{S})$ hay un elemento, al que representamos por σ^{-1}, también en $A(\mathcal{S})$, tal que $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \iota$. Esta situación generalmente se describe diciendo que todo elemento de $A(\mathcal{S})$ tiene un inverso en $A(\mathcal{S})$.

Se verifica también otro hecho acerca de $A(\mathcal{S})$; a saber, que siempre que $\mathcal{S}$ tiene tres o más elementos podemos encontrar dos elementos $\alpha, \beta \in A(\mathcal{S})$ tales que $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$. Esta posibilidad que contradice nuestra esperiencia e intuición matemaática habituales, introduce una riqueza en $A(\mathcal{S})$ de la que, a no ser por ello, habría carecido.

Con este ejemplo como modelo y un gran conocimiento de muchas situaciones matemáticas y mucha abstracción construimos lo siguiente:

DEFINICIÓN 3.1. Un conjunto no vacío de elementos G se dice que forma un *grupo* si en G está definida una operación binaria, llamada producto y denotada por $(\cdot)$ tal que:

(1) $a, b \in G$ implica que $a \cdot b \in G$ (cierre).
(2) $a, b, c \in G$ implica que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (ley asociativa).
(3) Existe un elemento $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo $a \in G$ (existencia de un elemento identidad en G).
(4) Para todo $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (existencia de inversos en G).

EJEMPLO 3.2. (1) Supongamos que G está constituido por el conjunto de los enteros, xon $a \cdot b$, para $a, b \in G$, definida como la suma usual entre enteros, es decir, $a \cdot b = a + b$, se puede verificar fácilmente que G es un grupo abeliano infinito en el que 0 juega el papel de e, y $-a$ el de a^{-1}.
(2) Supongamos que G consiste en los números reales 1 y -1 con la multiplicación entre números reales como operación. G es un grupo abeliano.

DEFINICIÓN 3.3. Un conjunto no vacío R se dice que es un *anillo asociativo* si en R están definidas dos operaciones, denotadas por " $+$ " y " $\cdot$ " respectivamente tales que para cualesquiera $a, b, c \in R$:

(1) $a + b$ está en R.
(2) $a + b = b + a$.
(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$.
(4) Hay un elemento 0 en R tal que $a + 0 = a$ (para todo a en R).
(5) Existe un elemento $-a$ en R tal que $a + (-a) = 0$.
(6) $a \cdot b$ está en R.
(7) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
(8) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (las dos leyes distributivas).

Los anillos no asociativos, es decir, aquellos en que no se verifica el axioma 7, se presentan en matemática y son objetivo de estudio, pero aquí no es de nuestro interés.
Puede y no suceder que exista un elemento 1 en R tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todo a en R; si tal elemento existe diremos que R es un *anillo con elemento unitario*.

Si la multiplicación de R es tal que $a \cdot b = b \cdot a$ para todo a, b en R entonces llamamos a R *anillo conmutativo*.

EJEMPLO 3.4.
(1) R es el conjunto de los enteros; $+$ es la suma usual y $\cdot$ la multiplicación usual de los enteros. R es un anillo conmutativo y con elemento unitarios.
(2) R es el conjunto de todos los enteros pares bajo las operaciones habituales de adición y multiplicación. R es un anillo conmutativo, pero no tiene elemento unitario.
(3) R es el conjunto de los números racionales bajo la adición y multiplicación habituales de los números racionales. R es un anillo conmutativo con elemento unitario. Pero aún más que eso, pues podemos ver que los elementos de R distintos de 0 forman un grupo abeliano bajo la multiplicación. Un anillo con esta última propiedad se llama *cuerpo*.

DEFINICIÓN 3.5. Un anillo R es llamado *cuerpo* si los elementos de R distintos de 0 forman un grupo abeliano respecto a la multiplicación.

Un *cuerpo finito* es un cuerpo con una cantidad finita de elementos.

EJEMPLO 3.6. $\mathbb{Z}_p$, con p primo, con la suma y el producto habitual de los $\mathbb{Z}_p$ forma un cuerpo finito con p elementos.

2. Espacios Vectoriales

DEFINICIÓN 3.7. Un conjunto no vacío V se dice que es un *espacio vectorial* sobre un cuerpo F si V es un grupo abeliano respecto a una operación que denotaremos por $+$, y si para todo $\alpha \in F$, $v \in V$ está definido un elemento, escrito como αv, de V, con las siguientes propiedades:

(1) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
(2) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
(3) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
(4) $1v = v$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in F$ y $v, w \in V$ (donde el 1 representa el elemento unitario de F en la multiplicación).

Usaremos sistemáticamente las siguientes notaciones:

a) F representará un cuerpo.
b) Las letras griegas minúsculas serán elementos de F; nos referiremos con frecuencia a los elementos de F como *escalares*.
c) Las letras latinas mayúsculas representarán espacios vectoriales sobre F.
d) Las letras latinas minúsculas denotarán elementos de espacios vectoriales. A los elementos de un espacio vectorial les llamaremos con frecuencia *vectores*.

EJEMPLO 3.8. (1) Sea F un cuerpo y K un cuerpo que contiene a F como subcuerpo. Consideremos K como un espacio vectorial sobre F usando el $+$ del espacio vectorial la adición de elementos de K, y definiendo para $\alpha \in F$, $v \in K$, αv como el producto de α y v como elementos en el cuerpo K. Los axiomas (1),(2),(3) para un espacio vectorial son consecuencias de la ley distributiva derecha, de la ley distributiva izquierda y de la ley asociativa, respectivamente, que valen para K por ser un anillo.

(2) Sea F un campo y sea V la totalidad de todos los n-tuples, $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, donde todos los $\alpha_i \in F$. Dos elementos $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ y $(\beta_1, ..., \beta_n)$ de V se definen iguales si y sólo si $\alpha_i = \beta_i$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. introducimos ahora las operaciones requeridas en V para hacer de él un espacio vectorial definido:
   (a) $(\alpha_1, ..., \alpha_n) + (\beta_1, ..., \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$.
   (b) $\gamma(\alpha_1, ..., \alpha_n) = (\gamma\alpha_1, ..., \gamma\alpha_n)$ para $\gamma \in F$.

Dado un cuerpo finito F, $F^{\mathbb{N}}$ es un espacio vectorial. Sean $u, v \in F^{\mathbb{N}}$ y sean $\alpha, \beta \in F$. Veamos que estos elementos satisfacen la definición de espacio vectorial:

1) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
   Esto es debido a que F es un cuerpo, luego, $\alpha(u(i) + v(i)) = \alpha u(i) + \alpha v(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
2) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
   Esta propiedad se satisface porque $(\alpha + \beta)v(i) = \alpha v + \beta v(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
3) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
   Vale porque $\alpha(\beta v(i)) = (\alpha\beta)v(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
4) $1v = v$
   Para todo $i \in \mathbb{N}$, $1v(i) = v(i)$.

Definición 3.9. Si U y V son espacios vectoriales sobre F, entonces la aplicación T de U en V se dice que es un *homomorfismo* si:

(1) $(u_1 + u_2)T = u_1T + u_2T$.
(2) $(\alpha u_1)T = \alpha(u_1T)$.

Para cualesquiera $u_1, u_2 \in U$ y $\alpha \in F$.

Si T es, además, inyectiva le llamamos *isomorfismo*. El núcleo de T es, por definición, $\{u \in U|\ uT = 0\}$ donde 0 es el elemento identidad de la adición en V. Dos espacios vectoriales se dicen que son *isomorfos* si hay un isomorfismo de uno sobre el otro.

3. Matrices

Dada F un cuerpo finito. Todas las matrices consideradas en este trabajo son matrices definidas sobre F.

Definición 3.10. Una *matriz* es una función de la forma:
$A : n \times m \longrightarrow F$, donde $n, m \in \mathbf{N} \cup \{\mathbf{N}\}$
La i-ésima fila es la función:
$A_i : m \longrightarrow F$ definida por $A_i(j) = A(i, j)$.
La j-ésima columna de A es la función:
$A^j : n \longrightarrow F$ dada por $A^j(i) = A(i, j)$.

Definición 3.11. Decimos que una matriz $n \times m$ es *escalón reducida* si:

(1) Cada fila de A tiene una entrada distinta de cero.
(2) Si m_i es la mínima entrada distinta de cero de A_i, entonces $A_i(m_i) = 1$ y además $A(j, m_i) = 0$ para $i \neq j$.
(3) $m_i < m_j$ siempre que $i < j$.

CAPíTULO 4

Teoría Abstracta de Ramsey

En este capítulo estudiaremos a cerca la teoría abstracta de Ramsey, para ello debemos introducir algunas nociones necesarias sobre la propiedad abstracta de Baire y del operador de Souslin.

1. La propiedad Abstracta de Baire

DEFINICIÓN 4.1. Sea X un conjunto cualquiera y sea $\mathcal{P}$ una colección no vacía de subconjuntos de X que llamaremos *conjuntos básicos*. Decimos que un subconjunto Y de X es $\mathcal{P}$-*Baire* si para cada $P \in \mathcal{P}$ existe un $Q \subseteq P$, $Q \in \mathcal{P}$ tal que $Q \subseteq Y$ o $Q \cap Y = \emptyset$. Y si para cada $P \in \mathcal{P}$ podemos encontrar $Q \subseteq P$ tal que $Q \cap Y = \emptyset$, entonces diremos que Y es $\mathcal{P}$-*Magro.*

OBSERVACIÓN 4.2. La colección de los subconjuntos $\mathcal{P}$-magros de X forman un ideal de subconjuntos de $\mathcal{P}$, es decir, es cerrado sobre subconjuntos y uniones finitas.

LEMA 4.3. *Si el ideal de conjuntos $\mathcal{P}$-magros es σ-aditivo, entonces la colección de todos los subconjuntos $\mathcal{P}$-Baire de X es una σ-álgebra.*

DEFINICIÓN 4.4. Un $\mathcal{P}$-*cubrimiento* de un subconjunto Y de X es algún conjunto $\mathcal{P}$-Baire $\phi(Y)$ que contiene a Y y tiene la propiedad que cada subconjunto $\mathcal{P}$-Baire diferente de $\phi(Y) \setminus Y$ será $\mathcal{P}$-magro.

LEMA 4.5. *Para cada espacio topoógico X, cada subconjunto de X admite un F_σ-cubrimiento.*

2. Teoría Ramsey-Topológica

En esta sección vamos a describir un *Espacio Ramsey Topológico*, consideremos una estructura de la forma

$$(\mathcal{R}, \leq, r)$$

donde $\mathcal{R}$ es un conjunto no vacío, $\leq$ es un casi-orden en $\mathcal{R}$, $r : \mathcal{R} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathcal{AR}$ es una función dada por una sucesión de aproximaciones ($r_n(.) = r(., n)$). $\mathcal{AR}$ es el conjunto de todas las aproximaciones finitas de $\mathcal{R}$.
Definamos entonces los conjuntos básicos:

$$[a, X] = \{A \in \mathcal{R} : A \leq X \ y \ \exists \ n \ r_n(A) = a\}$$

para $a \in \mathcal{AR}$ y $X \in \mathcal{R}$ forma una base para una topología en $\mathcal{R}$ que extiende la topología métrica usula en $\mathcal{R}$ cuando consideramos $\mathcal{R}$ como subespacio de $\mathcal{AR}^{\mathbf{N}}$.

Definición 4.6. Llamamos *longitud de* a, para $a \in \mathcal{AR}$, al entero positivo n tal que $r_n(A) = a$, para algún $A \in \mathcal{R}$

Notación 4.7. *Denotaremos a la longitud de a, para $a \in \mathcal{AR}$ así: $|a| = l$.*

Entonces, supongamos que las siguientes condiciones las satisface la tripleta $(\mathcal{R}, \leq, r)$

Axiomas:

A.1 $r_0(A) = \emptyset \ \forall A \in \mathcal{R}$.
A.2 $A \neq B$ implica que $r_n(A) \neq r_n(B)$ para algún $n \in \mathbf{N}$.
A.3 $r_n(A) = r_n(B)$ implica $n = m$ y $r_k(A) = r_k(B)$ para todo $k < n$.
A.4 Existe un casi-orden localmente finito, $\leq_{fin}$, en $\mathcal{AR}$ tal que $A \leq B$ si y sólo si $\forall n$ $\exists m$ tal que $r_n(A) \leq_{fin} r_m(B)$.

Notación 4.8. *Para $a \in \mathcal{AR}$ y $Y \in \mathcal{R}$,*

$$depth_Y(a) = \begin{cases} min\{k| \ a \leq_{fin} r_k(Y)\} \ \ si \ \exists \ k \ a \leq_{fin} r_k(Y) \\ \hfill 1 \ \ en \ \ otro \ \ caso \end{cases} \tag{4.1}$$

A.5 (1). $depth_B(a) \geq 0$ implica $[a, A] \neq \emptyset$ para todo $A \in [depth_B(A), B]$
(2). $A \leq B$ y $depth_B(a) \geq 0$ implica que existe $A' \in [depth_B(a), B]$ tal que $[a, A'] \subseteq [a, A]$.
A.6 Si $depth_B(a) \geq 0$ y si $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{AR}_{|a|+1}$ entonces existe $A \in [depth_B(a), B]$ tal que $r_{|a|+1}[a, A] \subset \mathcal{O}$ o $r_{|a|+1}[a, A] \subset \mathcal{O}^c$

DEFINICIÓN 4.9. Un conjunto $\mathcal{X}$ es *Ramsey* si para cada conjunto básico no vacío $[a,Y]$ existe $X \in [depth_Y(a), Y]$ tal que $[a,X] \subset \mathcal{X}$ o $[a,X] \cap \mathcal{X} = \emptyset$
Si para cada $[a,Y] \neq \emptyset$ encontramos $X \in [depth_Y(a), Y]$ tal que $[a,X] \cap \mathcal{X} = \emptyset$ decimos que $\mathcal{X}$ es un conjunto *Ramsey-nulo* de $\mathcal{R}$

DEFINICIÓN 4.10. Un conjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{R}$ es *Baire* si para cada abierto básico $[a,X]$ existe

$$a \sqsubseteq b \in \mathcal{AR} \ y \ Y \leq X$$

tal que $[b,Y] \neq \emptyset$ y $[b,Y] \in \mathcal{X}$ o $[b,Y] \cap \mathcal{X} = \emptyset$. Si para cada $[a,X] \neq \emptyset$ podemos hallar $a \sqsubseteq b \in \mathcal{AR}$ y $Y \leq X$ tal que $[b,Y] \neq \emptyset$ y $[b,Y] \cap \mathcal{X} = \emptyset$ entonces $\mathcal{X}$ es llamado *magro*

Un caso particular de una tripleta $(\mathcal{R}, \leq, r)$, la cual veremos en el próximo capítulo de manera más detallada, es el espacio $(\mathbf{N}^{[\infty]}, \subseteq, r)$ de todos los subconjuntos infinitos de $\mathbf{N}$, donde $r_n(A)$ es el segmento inicial de A, obtenido de tomar los primeros n elementos de A, donde $\subseteq_{fin}$ es definido y $\mathcal{A}\mathbf{N}^{[\infty]} = \mathbf{N}^{<\infty}$ (= la familia de todos los subconjuntos finitos de $\mathbf{N}$) se sigue que $a \subseteq_{fin} b$ si y sólo si $a = b = 0$ o $a \subseteq b$ y $max(a) = max(b)$.
Cuando hablamos de una propiedad topológica para $(\mathcal{R}, \leq, r)$, nos referimos a la topología natural o de Ellentuck de $\mathcal{R}$, es decir, la inducida por los conjuntos básicos $[a,A]$ ($a \in \mathcal{AR}, A \in \mathcal{R}$). Por ejemplo, tenemos $\mathcal{X} = \mathcal{R}$ con la propiedad de Baire, tenemos que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O} \triangle \mathcal{M}$ para algunos abiertos de Ellentuck $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{R}$ y $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ magro. Entonces decimos que $\mathcal{X} \subset \mathcal{R}$ es *Ramsey* si $\mathcal{X}$ es $\mathcal{R}$-*Ramsey*, es decir, si para todo $[a,A] \neq \emptyset$ existe $B \in [a,A]$ tal que $[a,B] \subset \mathcal{X}$ o $[a,B] \cap \mathcal{X} = \emptyset$.

DEFINICIÓN 4.11. Una tripleta $(\mathcal{R}, \leq, r)$ es un espacio *Ramsey-Toplógico* si cada subconjunto de $\mathcal{R}$ con la propiedad de Baire es *Ramsey* y cada conjunto magro es *Ramsey nulo*.

Una consecuencia inmediata del Teorema Abstracto de Ramsey de dimensión infinita:

TEOREMA 4.12 (Teorema Abstracto de Ellentuck). *Si $(\mathcal{R}, \leq, r)$ es cerrado y satisface los axiomas $A.1 - A.6$ entonces $(\mathcal{R}, \leq, r)$ es un espacio Ramsey-Topológico.*

Recordemos que decimos que $(\mathcal{R}, \leq, r)$ es cerrado cuando $\mathcal{R}$ es un subconjunto cerrado de la topología producto (Topología de Tychonoff) $\mathcal{AR}^{\mathbf{N}}$ de $\mathcal{AR}$ con la topología discreta.

Corolario 4.13 (Ellentuck). *El espacio* $(\mathbf{N}^{\infty}, \subseteq, r)$ *es Ramsey-Topológico.*

El Teorema Abstracto de Ellentuck tiene la siguiente consecuencia:

Corolario 4.14. *Si* $(\mathcal{R}, \leq, p)$ *es cerrado y satisface* $A.1 - A.6$ *entonces cada subconjunto Souslin-medible de* $\mathcal{R}$ *es Ramsey.*

CAPíTULO 5

Espacio de Ellentuck

1. Principio del Casillero

DEFINICIÓN 5.1. Dado un conjunto $X \neq \emptyset$ cualquiera y una sucesión de conjuntos $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, donde I es un conjunto de indices, decimos que (x_α) es una *partición* de X si:

(1) $X = \cup_{\alpha \in\, I} X_\alpha$
(2) $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ Si $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in I$

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Si consideramos una partición $\mathbb{N} = \mathcal{C}_o \cup \mathcal{C}_1$ de $\mathbb{N}$ en dos clases, existe $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito y existe $i \in \{0, 1\}$ tal que $A \subseteq \mathcal{C}_i$.

Esta afirmación se conoce como *principio del Casillero*. Más generalmente, sea $B \subseteq \mathbb{N}$ infinito y sea $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. Dada una partición $B = \mathcal{C}_o \cup \mathcal{C}_1 \cup .... \cup \mathcal{C}_{k-1}$ de B en k clases, existe $A \subseteq B$ también infinito y existe $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$ tal que $A \subseteq \mathcal{C}_i$

NOTACIÓN 5.2. $A^{[n]} = \{X \subseteq A |\ |X| = n\}$

$$A^{[1]} \approx A$$

2. Teorema de Ramsey

TEOREMA 5.3 (Teorema de Ramsey). *Dado $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ y una partición $\mathbb{N}^{[n]} = \mathcal{C}_o \cup \mathcal{C}_1$ de $\mathbb{N}^{[n]}$ en dos clases, existe $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito y existe $i \in \{0, 1\}$ tal que $A^{[n]} \subseteq \mathcal{C}_i$.*
De modo más general, sea $B \subseteq \mathbf{N}$ infinito y sea $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. Dada una partición $B^{[n]} = \mathcal{C}_o \cup \mathcal{C}_1 \cup ... \cup \mathcal{C}_{k-1}$ de $B^{[n]}$ en k clases, existe $A \subseteq B$ infinito existe $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$ tal que $A^{[n]} \subseteq \mathcal{C}_i$

NOTACIÓN 5.4. *Dada una partición $X = X_o \cup X_1$ se puede representar así: $c : X \to \{0, 1\}$ definida por $c(x) = i$ si y sólo si $x \in X_i$*

Es natural hacernos la siguiente pregunta, dada una partición, $\mathbb{N}^{[\infty]} = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$, existirá $A \in \mathbb{N}^{[\infty]}$ y $i \in \{0,1\}$ tal que $A^{[\infty]} \subseteq \mathcal{C}_i$. La respuesta es no. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.5. Dados $A, B \in \mathbb{N}^{[\infty]}$. $A \sim B$ si y sólo si $\mid A \triangle B \mid < \infty$. Esto define una relación de equivalencia.
Definamos $[A] = \{B \in \mathbb{N}^{[\infty]} : \mid A \triangle B \mid < \infty\} =$ clase de A.
El conjunto $\mathbb{N}^{[\infty]}/\sim$ es infinito. Consideremos la siguiente partición:
Sea R_A el representante de $[A]$.
$c : \mathbb{N}^{[\infty]} \to \{0,1\}$, definida de la siguiente manera:

$$c(i) = \begin{cases} 1 \ si \quad \mid A \triangle R_A \mid \ \ es \ \ impar \\ \\ \qquad\qquad\qquad 0 \ \ si \ \ no \end{cases} \tag{5.1}$$

Entonces, $\mathcal{C}_1 = \{A \in \mathbb{N}^{[\infty]} : \ c(A) = 1\}$ y $\mathcal{C}_0 = \mathbb{N}^{[\infty]} \backslash \mathcal{C}_1$.
Veamos que para $A \in \mathcal{C}_1$ existe $B \in A^{[\infty]}$ tal que $B \in \mathcal{C}_0$.
Por A estar en $\mathcal{C}_1$, entonces $\mid A \triangle R_A \mid$ es impar. Tomemos $B = A \backslash \{x\}$, con $x \in A$. $c(B) = 0$ ya que $\mid B \triangle R_A \mid$ es par.

Demostración del Teorema de Ramsey. Haremos inducción en n:
Para $n = 1$, el resultado vale por el principio del casillero.
Supongamos que el resultado vale para $n = m$. Sea $c : \mathbb{N}^{[m+1]} \to \{0,1\}$ una partición. Queremos hallar $A \in \mathbb{N}^{[\infty]}$ tal que c sea constante en $A^{[m+1]}$.
Dado $p \in \mathbb{N}$, consideremos $B = \mathbb{N} \backslash \{0, 1, ..., p\}$ y definimos $\hat{c} : B^{[m]} \to \{0,1\}$ así: $\hat{c}(x) = c(\{p\} \cup x)$. Por inducción existe $A \subseteq B$ infinito tal que $\hat{c}$ es constante en $A^{[m]}$, luego $\forall \ x, y \in A^{[m]} \ \ c(\{p\} \cup x) = c(\{p\} \cup y)$
Supongamos que $m = 1$. Estamos entonces considerando una partición $c : \mathbb{N}^{[2]} \to \{0,1\}$ y queremos halla $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que c es constante en $A^{[2]}$
Definamos $c_o : \mathbb{N}^{[1]} \to \{0,1\} \ \ c_o(x) = c(\{0, x\})$ entonces existe $A_o \subseteq \mathbf{N}$ infinito tal que c_o es constante en $A_o^{[1]}$, luego $\forall \ x, y \in A_o \ \ c(\{0, x\}) = c(\{0, y\})$
Sea $a_1 =$ menor elemento de A_o mayor que cero $:= A_o/_0$ donde $X/_n = \{x \in X | x > n\}$
Sea $c_1 : A_o^{[1]} \to \{0,1\} \ \ c_1(x) = c(\{a_1, x\})$ entonces existe $A_1 \subseteq A_o$ infinito tal que c_1 es constante en $A_1^{[1]}$, luego $\forall \ x, y \in A_1 \ \ c(\{a_1, x\}) = c(\{a_1, y\})$
Sea $a_2 = min A_1/_{a_1}$
Supongamos definidos $A_o, A_1, ..., A_{n-1}$ y $a_1, a_2, ..., a_n$. Consideremos $c_n : A_{n-1}^{[1]} \to \{0,1\} \ \ c_n(x) =$

$c(\{a_n, x\})$ entonces existe $A_n \subseteq A_{n-1}$ infinito tal que c_n es constante en $A_n^{[1]}$, luego $\forall\ x, y \in A_1\ \ c(\{a_n, x\}) = c(\{a_n, y\})$

Finalmente, sea $A = \{a_1, a_2, ...\}$ existe $a \in A$ y existe $i_a \in \{0, 1\}$ tal que $c(\{a, x\}) = i_a\ \ \forall\ x \in A/a$

Definimos $\breve{c} : A^{[1]} \to \{0, 1\}\ \ \breve{c}(a) = i_a$

Por el principio del casillero existe $B \subseteq A$ infinito tal que $\breve{c}$ es constante en $B^{[1]}$, es decir, existe $i \in \{0, 1\}\ \ \forall\ a \in B\ \ i_a = i$ entonces c es constante en $B^{[2]}$ □

Definición 5.6. $X \subseteq \mathbb{N}^{[\infty]}$ es *Ramsey* (o tiene la propiedad de Ramsey) si existe $A \in \mathbb{N}^{[\infty]}$ tal que $A^{[\infty]} \subseteq X$ o $A^{[\infty]} \cap X = \emptyset$.

Definición 5.7. $X \subseteq \mathbb{N}^{[\infty]}$ es *Ramsey nulo* si $\forall A \in \mathbb{N}^{[\infty]}$ monocromático para X $A^{[\infty]} \cap X = \emptyset$.

Definición 5.8. Decimos que $A \in \mathbb{N}^{[\infty]}$ es monocromático para X si $A^{[\infty]} \subseteq X$ o $A^{[\infty]} \cap X = \emptyset$.

3. Propiedades de los Espacios Ramsey

$$[a, A] = \{B \in \mathbb{N}^{[\infty]} : a \sqsubset B \subseteq A\}$$

Esta familia de conjuntos es una base para alguna topología.

Definición 5.9. $X \subseteq \mathbb{N}^{[\infty]}$ es (completamente) *Ramsey* si para toda vecindad no vacía $[a, A]$ existe $B \in [a, A]$ tal que $[a, B] \subseteq X$ o $[a, B] \cap X = \emptyset$.

Definición 5.10. $X \subseteq \mathbb{N}^{[\infty]}$ es (completamente) *Ramsey nulo* si para toda $[a, A] \neq \emptyset$ existe $B \in [a, A]$ tal que $[a, B] \cap X = \emptyset$.

Observación 5.11. 1 Si X es completamente Ramsey entonces X es Ramsey.

2 Si $X = [a, A]$ entonces X es completamente Ramsey.

3 $\emptyset$ y $\mathbf{N}^{[\infty]}$ son completamente Ramsey.

4 Si X es completamente Ramsey entonces su complemento también lo es.

Lema 5.12. (i) *Si $X, Y \subseteq \mathbb{N}^{[\infty]}$ son completamente Ramsey nulo entonces $X \cap Y$ es completamente Ramsey nulo.*

(ii) *Si* $X_1, ..., X_n$ *son completamente Ramsey nulos entonces* $\cap_{i=1}^{n} X_i$ *es completamente Ramsey nulo.*

(iii) *Si* $X, Y \subseteq \mathbb{N}^{[\infty]}$ *son completamente Ramsey entonces* $X \cap Y$ *es completamente Ramsey.*

(iv) *Si* $X_1, ..., X_n$ *son completamente Ramsey entonces* $\cap_{i=1}^{n} X_i$ *es completamente Ramsey.*

Demostración. (i) Dada $[a, A] \neq \emptyset$. Como X es completamente Ramsey nulo existe $B \in [a, A]$ tal que $[a, B] \subseteq X^c$.

Por otro lado, como Y es completamente Ramsey nulo, entonces existe $B' \in [a, B]$ tal que $[a, B'] \subseteq Y^c$.

Nótese que $[a, B'] \subseteq [a, B]$, por lo tanto $[a, B'] \subseteq X^c \cap Y^c = (X \cup Y)^c$.

(ii) Aplicando inducción sobre (i) obtenemos este resultado.

(iii) Si X y Y son ambos Ramsey nulos el resultado se obtuvo en (i).

Supongamos que alguno de los dos no es Ramsey nulo, entonces, sin pérdida de generalidad, supongamos que X no es Ramsey nulo.

Fijemos $[a, A] \neq \emptyset$. Como X es completamente Ramsey no Ramsey nulo existe $B \in [a, A]$ tal que $[a, B] \subseteq X$. Pero $X \in X \cup Y$, luego $[a, B] \subseteq X \cup Y$.

Observación 5.13. Nótese que no importa si Y es completamente Ramsey nulo o no. En general, si X es completamente Ramsey no Ramsey nulo y Z un subconjunto cualquiera, $X \cup Z$ es completamente Ramsey.

(iv) Se obtiene de (iii) por inducción.

□

4. Lema de Galvin - Teorema de Nash-Williams

Definición 5.14. Sea $A \in \mathbb{N}^{[\infty]}$; $A^{<\infty} = \{Y \subseteq A : |Y| < \infty\}$. Una familia no vacía $\mathcal{F} \subseteq A^{<\infty}$ es una *barrera* en A si cumple lo siguiente:

1 Para todo $a, b \in \mathcal{F}$ se tiene que $a \not\sqsubset b$ y $b \sqsubset a$ ($\mathcal{F}$ es una anticadena en el orden $\sqsubset$).

2 Para todo $B \in A^{[\infty]}$ existe $b \in \mathcal{F}$ tal que $b \sqsubset B$.

TEOREMA 5.15 (Lema de Galvin - Teorema de Nash-Williams). *Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Existe $B \in \mathbb{N}^{[\infty]}$ tal que ocurre una y sólo una de las siguientes alternativas:*

(1) $\mathcal{F} \cap \mathbb{N}^{[<\infty]} = \emptyset$.
(2) $\mathcal{F} \cap \mathbb{N}^{[<\infty]}$ *incluye una barrera.*

NOTACIÓN 5.16. $\mathcal{F} \mid B = \mathcal{F} \cap \mathbb{N}^{[<\infty]}$

DEMOSTRACIÓN. Para todo $b \in \mathbb{N}^{[<\infty]}$ y para todo $A \in \mathbb{N}^{[\infty]}$ definamos un juego de la siguiente manera (forcing combinatorio):

(1) Decimos que A *acepta* a b si para todo $B \in [b, A]$ existe $f \in F$ tal que $f \sqsubset B$.
(2) Decimos que A *rechaza* a b si para todo $B \in A^{[\infty]}$ se tiene que B no acepta a b.
(3) Decimos que A *decide* a B si lo acepta o lo rechaza.

SUB-LEMA 5.17. (1') *Si A acepta (rechaza) a b entonces para todo $B \in A^{[\infty]}$, B también acepta (rechaza) a b.*
(2') *Sea $b \in \mathbb{N}^{[<\infty]}$ y $A \in \mathbb{N}^{[\infty]}$ existe $B \in A^{[\infty]}$ tal que B decide a b.*

DEMOSTRACIÓN. (1') Se sigue de que si $B \in A^{[\infty]}$ entonces $[b, B] \subseteq [b, A]$
(2') Supongamos que A no rechaza a b entonces existe $B \in A^{[\infty]}$ tal que B acepta a b (definición de rechazar), como B acepta a b entonces B decide a b.

□

SUB-LEMA 5.18. *Si A rechaza a b entonces $\{n \in A : A \text{ acepta } a,\ b \cup \{n\}\}$ es finito.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $B = \{n \in A : A \textit{ acepta } a,\ b \cup \{n\}\}$ es infinito. Nótese que $B \in A^{[\infty]}$ por lo tanto B rechaza a b, sin embargo $[b, B] \subseteq \cup_{n \in A}[b \cup \{n\}, A]$. Tomemos $C \in [b, B]$ entonces existe $n \in A$ tal que $C \in [b \cup \{n\}, B]$. Nótese que como A acepta a $b \cup \{n\}$ entonces C tiene segmento inicial en $\mathcal{F}$ entonces B acepta a b.Contraciddción. Por lo tanto B es finito. □

SUB-LEMA 5.19. *Existe $B \in \mathbb{N}^{[\infty]}$ tal que B decide a todos sus subconjuntos finitos, es decir, para todo $b \in B^{[<\infty]}$, B acepta a b o B rechaza a b.*

DEMOSTRACIÓN. Apliquemos el sub-lema 5.17 iteradamente para hacer la siguiente construcción:

Sea $B_o \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que B_o decide a $\emptyset$, tomemos $n_o = \text{mín}(B_o)$.
Sea $B_1 \subseteq B_o^{[\infty]}$ tal que B_1 decide a $\emptyset$ y $\{n_o\}$, tomemos $n_1 = \text{mín}(B_1 \backslash n_o)$.
Sea $B_2 \subseteq B_1^{[\infty]}$ tal que B_2 decide a $\emptyset$, $\{n_o\}$, $\{n_1\}$ y $\{n_o, n_1\}$.
Supongamos definidos $B_o \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq ... \supseteq B_k$ y $n_o, ..., n_{k-1}$ de tal manera que B_k decide a todo $b \subseteq \{n_o, ..., n_{k-1}\}$.
Tomemos $n_k = \text{mín}(B_k \backslash n_{k-1})$.
Sea $B_{k+1} \subseteq B_k^{[\infty]}$ tal que B_{k+1} decide a todo $b \subseteq \{n_o, ..., n_k\}$. Tomamos $n_{k+1} = \text{mín}(B_{k+1} \backslash n_k)$ (...)
Sea $B = \{n_o, ..., n_k, ...\}$. Veamos que B decide a todo $b \in B^{[<\infty]}$.
Sea $b \in B^{[<\infty]}$ y sea m el menor k tal que $b \subseteq \{n_o, ..., n_k\}$ entonces B_{m+1} decide a b.
Nótese que $[b, B] \subseteq [b, B_{m+1}]$, luego B decide a b. □

Sea B como en el sub-lema 5.19. Entonces B decide a $\emptyset$. Si B acepte a $\emptyset$ entonces vale la parte (2) del lema: por definición de "acepta", todo elemento de $B^{[\infty]} = [\emptyset, B]$ tiene un segmento inicial en $\mathcal{F}$.
Supongamos entonces que B rechaza a $\emptyset$. Por el sub-lema 5.18, el conjunto $\{n \in B : B \ \textit{acepta} \ a, \ \{n\}\}$ es finito entonces $B' = \{n \in B : B \ \textit{rechaza} \ a, \ \{n\}\} \in B^{[\infty]}$.
Usando otra vez el sub-lema 5.17 iteradamente y procediendo como en la demostración del sub-lema 3, contruimos $B' \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq ...$ y $n_o < n_1 < ...$ tal que $\forall k$, B_k rechaza a todo $b \subseteq \{n_o, ..., n_{k-1}\}$.
Tomemos $n_k = \text{mín}(B_k \backslash n_{k-1})$.
Sea $B_{k+1} \subseteq B_k^{[\infty]}$ tal que B_{k+1} rechaza a todo $b \subseteq \{n_o, ..., n_k\}$.
Sea $A = \{n_o, n_1, ...\}$ y sea $b \in A^{[<\infty]}$. Sea m el menor k tal que $b \subseteq \{n_o, ..., n_k\}$, entonces B_{m+1} rechaza a b.Pero $[b, A] \subseteq [b, B_{m+1}]$, luego A rechaza a todo $b \in A^{[<\infty]}$.
Veamos que $\mathcal{F} \cap A = \emptyset$. Supongamos que $b \in \mathcal{F} \cap A$ entonces todo elemento de $[b, A]$ tiene un segmento inicial en $\mathcal{F}$ pero esto contradice el hecho que A rechaza a b.
Esto demuestra el lema.

□

Teorema 5.20. *Todo abierto métrico de* $\mathbb{N}^{[\infty]}$ *es Ramsey.*

Demostración. Sea $X \subset \mathbb{N}^{[\infty]}$ abierto m étrico, entonces, $X = \cup_{s \in F}[s]$, con $F \in \mathbb{N}^{[<\infty]}$. Aplicando el lema anterior (lema 5.15) a F obtenemos $A \in \mathbb{N}^{[\infty]}$ tal que:

(1) $F \cap A^{[<\infty]}\emptyset$, o bien

(2) Todo elemento de $A^{[\infty]}$ tiene un segmento inicial en F.

Si vale 1, entonces $A^{[\infty]} \cap X = \emptyset$ y si vale 2 entonces $A^{[\infty]} \subset X$. □

Corolario 5.21. *Todo boreliano métrico es Ramsey.*

Demostración. La propiedad de Ramsey se preserva bajo complementación y uniones numerables. Entonces el resultado se sigue del teorema anterior (teorema 5.20). □

CAPíTULO 6

El Espacio de Hales-Jewett

Otro caso particular de los espacios Ramsey-Topológicos es el espacio de Hales-Jewett. En este capítulo sólo lo mencionaremos a modo de ejemplo ya que demostrar que es, en efecto, un espacio Ramsey-Topológico se escapa del alcance de este trabajo, sin embargo, en el próximo necesitaremos algunos conceptos sobre este espacio.

Sea $L = \cup_{n=o}^{\infty} L_n$ un alfabeto dado, descompuesto en una cadena creciente de subconjuntos finitos L_n y sea v una variable distinta de todos los símbolos de L. Sea W_L (o simplemente W) el conjunto de todas las palabras sobre L y sea $W_L(v)$ el conjunto de todas las palabras variables sobre L, es decir, todas las hileras finitas de elementos de $L \cup \{v\}$ en las que v ocurre por lo menos una vez. Si $s = s[v] \in W(v)$ y $a \in L \cup \{v\}$ entonces, denotaremos por $s[a]$ al elemento de W o de $W(v)$ (dependiendo si $a \neq v$ o no) obtenido de reemplazar en cada ocurrecia de v en s por a. Sea $W_{L_v}^{[\infty]}$ es el conjunto de todas las sucesiones de *rápido crecimiento* de palabras variables de la forma $X = (x_n)$,es decir, sucesiones tales que $|x| > \sum_{i<n} |x_n|$ para todo n. Analogamente, definamos las sucesiones finitas de rápido crecimiento:

$$r_n : W_{L_v}^{[\infty]} \to W_{L_v}^{[n]}, \;\; n < \omega$$

siendo la restricción de las funciones las que nos dan las aproximaciones finitas.
Para $X = (x_n) \in W_{L_v}^{[\infty]}$, sea:

$$[X]_{L_v} = \{x_o[\lambda_o]^\frown ...^\frown x_k[\lambda_k]^\frown ... \in W_{L_v} |\; n_o < ... < n_k, \lambda_i \in L_{n_i} \cup \{v\}(i \leq k)\}$$

Este $[X]_{L_v}$ denota el subespacio combinatorio de W_{L_v} generado por X. Por el hecho de que X es de rápido crecimiento concluimos que cada $x \in [X]_{L_v}$ el conjunto $\{n_o < ... < n_k\}$ tal que:

$$x = x_{n_o}[\lambda_o]^\frown ...^\frown x_{n_k}[\lambda_k]$$

para cada elección de $\lambda \in L_{n_i} \cup \{v\}(i \leq k)$ es unico y es llamado soporte de x en X el cual denotaremos por $supp_X(x)$. Esto nos ayuda a definir un orden $\leq$ en $W_{L_v}^{[\infty]}$ definido de la siguiente manera: $X = (x_n) \leq Y = (y_n)$ sii $x_n \in [Y]_{L_v}$ para todo n, y

$$supp_Y(x_n) < supp_Y(x_m)$$

siempre que $n < m$.

Entonces $X \leq Y$ sii X es una subsucesión de bloques de Y. El orden $\leq$ tiene una finitización natural en el conjunto $W_{L_v}^{[<\infty]}$ de sucesiones finitas de rápido crecimiento: $(x_m)_o^{k-1} \leq_{fin} (y_n)_o^{l-1}$ sii $(x_m)_o^{k-1}$ es una subsucesión de $(y_n)_o^{l-1}$ pero no una subsucesión de bloques de algún $(y_n)_o^{l'-1}$ para $l' < l$ (en efecto, tenemos $\emptyset \leq_{fin} \emptyset$). Se puede verificar que $(W_{L_v}^{[\infty]}, \leq, r)$ satisface los 6 axiomas, y que $W_{L_v}^{[\infty]}$ es un subconjunto cerrado de $(W_{L_v}^{[<\infty]})^{\mathbb{N}}$, por lo que tenemos lo siguiente:

Teorema 6.1. $(W_{L_v}^{[\infty]}, \leq, r)$ *es un espacio Ramsey-Topológico.*

Para una sucesión $X = (x_n)$ de palabras variables, el subespacio combinatorio inicial de W_L generado por X, denotado por $\langle X \rangle_L$, es la colección de todos los $t \in W_L$ para los cuales podemos encontrar un entero m y $\lambda_n \in L_n \cup \{v\}$ para cada $n < m$ tal que:

(1) $x = x_0[\lambda_0]^\frown ....^\frown x_m[\lambda_m]$ es una palabra variable.

(2) t es igual a la restricción de x antes de la primera ocurrencia de la variable.

Lema 6.2 (Carlson-Simpson,Voigt). *Para cada alfabeto finito L y una partición finita de $W_L = \cup_{i=0}^n \mathcal{O}_i$ existe una sucesión $X = (x_n)$ de palabras variables sobre L tal que existe un conjunto $\mathcal{O}$ tal que existe i tal que $\langle X \rangle_L$ está contenido en $\mathcal{O}_i$ o es disjunto de $\mathcal{O}_i$.*

CAPíTULO 7

Espacio Ramsey de Subespacios Vectoriales

En este capítulo vamos a verificar que el espacio de todas las matrices escalón reducidas de tamaño $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ satisface los axiomas de los espacios *Ramsey-topológicos*.
Para ello, vamos a definir algunas propiedades del espacio de todas las matrices escalón reducidas de orden $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, el cual denotaremos por $\mathcal{M}_\infty$.

Para $A \in \mathcal{M}_\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, consideremos el conjunto

$$p_n(A) = min\{j : A_n(j) \neq 0\}$$

Sea $p(A) = \{p_n(A) : n \in \mathbf{N}\}$. Esta sucesión de $(p_n(A))_n$ nos da una enumeración creciente del conjunto infinito $p(A)$. Esto nos da una noción de una sucesión $(r_n(A))_n$ de aproximaciones finitas de A:

$$r_0(A) = \emptyset \;\; y \;\; r_{n+1}(A) = A|_{(n+1)\times(p_n(A)+1)}$$

Definición 7.1. Sea $\mathcal{AM}_\infty$ la colección de todas las aproximaciones finitas de elementos de $\mathcal{M}_\infty$.

Observación 7.2. $\mathcal{M}_\infty$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{AM}_\infty^{\mathbf{N}}$.

Demostración. Cada matriz A la podemos identificar de manera única con una sucesión del tipo $(r_n(A))_n$ (la sucesión de todas las aproximaciones finitas de A).
Veamos que el límite de una sucesión de matrices de $\mathcal{M}_\infty$ convergente (en $\mathcal{AM}_\infty^{\mathbf{N}}$) es una matriz de $\mathcal{M}_\infty$. Sea $(A(m))_m$ una sucesión en $\mathcal{M}_\infty$ que converge (en $\mathcal{AM}_\infty^{\mathbf{N}}$). Supongamos que $(A(m))_m$ converge a $\{a_o, a_1, a_2, ...\}$.
Consideremos los siguientes conjuntos:
Sea $U_{\{a_o\}} = \{X \in \mathcal{AM}_\infty^{\mathbf{N}} |\ \{a_o\} \sqsubset X\}$, entonces, por la convergencia de $(A(m))_m$ existe $N_o \in \mathbf{N}$ tal que $\forall\ m \geq N_o$, $A(m) \in U_{\{a_o\}}$. Fijemos $A(N_o)$ con $r_o(A(N_o)) = a_o$.
Sea $U_{\{a_o,\, a_1\}} = \{X \in \mathcal{AM}_\infty^{\mathbf{N}} |\ \{a_o, a_1\} \sqsubset X\}$, entonces existe $N_1 > N_o$,$N_1 \in \mathbf{N}$, tal

que $\forall\ m \geq N_1,\ A(m) \in U_{\{a_o,\, a_1\}}$. Dejamos fijo $A(N_1)$ con $r_o(A(N_1)) = r_o(A(N_o)) = a_o$, $r_1(A(N_1)) = a_1$. Por la definición de las aproximaciones finitas de una matriz, sabemos que $r_{i+1}()$ extiende a $r_i()$ por lo que se concluye que $a_o \sqsubset a_1$.

Supongamos definidos $N_{n-1} > ... > N_1 > N_o$. Sea $U_{\{a_o,\, a_1,...,a_n\}} = \{X \in \mathcal{AM}_\infty^{\mathbf{N}} |\ \{a_o, a_1, ..., a_n\} \sqsubset X\}$, entonces existe $N_n > N_{n-1} \in \mathbf{N}$ tal que $\forall\ m \geq N_n,\ A(m) \in U_{\{a_o,\, a_1,...,\, a_n\}}$. Fijo $A(N_n)$ con $r_j(A(N_i)) = a_j,\ \forall\ i \in [j, n] \subseteq \mathbf{N}$ y $\forall\ j \leq n$. Analogamente, como en la parte anterior, se concluye que $a_o \sqsubset a_1 \sqsubset ... \sqsubset a_n$.

Sea B definida de la siguiente manera: $r_i(B) = a_i$. B es una matriz bien definida ya que por la construcción tenemos que $a_o \sqsubset a_1 \sqsubset ... \sqsubset a_n$. El límite de la sucesión $(A(m))_m$ es B puesto que la subsucesión $(A(N_i))_{N_i}$ converge a B. Con lo que queda demostrada la observación. $\square$

1. $\mathcal{M}_\infty$ como espacio Ramsey-Topológico

Recordemos que un espacio es *Ramsey-Topológico* si cada subconjunto de $\mathcal{R}$ con la propiedad de Baire es *Ramsey* y cada conjunto magro es *Ramsey nulo*, en esta sección vamos a demostrar que la tripleta $(\mathcal{M}_\infty, \leq, r)$ es un espacio *Ramsey-Topológico* con la relación $\leq$ definida de la siguiente manera:

Para $A, B \in \mathcal{M}_\infty$, definimos $A \leq B$ si cada fila de A corresponde al espacio generado (cerrado), que denotaremos por *span lineal*, $\overline{span} = \{B_n : n \in \mathbf{N}\}$ en $F^{\mathbf{N}}$, viendo a $F^{\mathbf{N}}$ como un espacio vectorial y como un espacio topológico producto de dar a F la topología discreta. Es decir, $A \leq B$ si cada fila de A se escribe como combinación lineal de las filas de B. Extendemos este casi-orden en el conjunto $\mathcal{AM}_\infty$ de aproximaciones finitas en la forma más natural: $a \leq_{fin} b$ si y sólo si a y b tienen el mismo número de columnas, "n", y cada fila de a pertenece al subespacio F^n generado por las filas de b.

Note que $\leq_{fin}$ es en efecto, una finitización de $\leq$.

Lema 7.3. *$(\mathcal{M}_\infty, \leq, r)$ satisface los siguientes axiomas:*

A.1 *$r_o(A) = \emptyset$ para toda $A \in \mathcal{M}_\infty$.*

A.2 *$A \neq B$ implica $r_n(A) \neq r_n(B)$ para algún n.*

A.3 *$r_n(A) = r_m(B)$ implica que $n = m$ y $r_k(A) = r_k(B)$, $\forall\ k < n$.*

A.4(1) *Existe un casi-orden $\leq_{fin}$ en $\mathcal{AM}_\infty$ tal que $A \leq B$ si y sólo si $\forall\ n\ \exists\ m$ tal que $r_n(A) \leq_{fin} r_m(B)$.*

A.4(2) *Para todo* $b \in \mathcal{AM}_\infty$. *El conjunto* $\{a \in \mathcal{AM}_\infty |\ a \leq_{fin} b\}$ *es finito.*

A.5(1) $depth_B(a) \geq 0$ *implica* $[a, A] \neq \emptyset$ *para toda* $A \in [depth_B(a), B]$.

A.5(2) $A \leq B$ *y* $depth_B(a) \geq 0$ *implica que existe* $A' \in [depth_B(a), B]$ *tal que* $[a, A'] \subseteq [a, A]$.

A.6 *Si* $depth_B(a) \geq 0$ *y si* $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{AM}_{|a|+1}$ *entonces existe* $A \in [depth_B(a), B]$ *tal que* $r_{|a|+1}[a, A] \subset \mathcal{O}$ *o* $r_{|a|+1}[a, A] \cap \mathcal{O} = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. A.1 $r_o(A) = \emptyset$ para toda $A \in \mathcal{M}_\infty$.

Este axioma se satisface por la definición de las aproximaciones finitas.

A.2 $A \neq B$ implica $r_n(A) \neq r_n(B)$ para algún n.

Dadas $A, B \in \mathcal{M}_\infty$ Si $A \neq B$ entonces existe una fila en la que ellas difieren, supongamos que es la fila i, luego, sea j la columna donde ellas son distintas, luego, sea n tal que $p_n(A) > j$. Así, $r_n(A) \neq r_n(B)$.

A.3 $r_n(A) = r_m(B)$ implica que $n = m$ y $r_k(A) = r_k(B)$, $\forall\ k < n$.

Sean $A, B \in \mathcal{M}_\infty$ tales que $r_n(A) = r_m(B)$, entonces, por definición de $r_n(.)$, $n = m$ ya que son matrices y por ser iguales entonces ellas tienen el mismo número de filas y columnas, además, por la definición de igualdad entre matrices se obtiene que $r_k(A) = r_k(B)$, $\forall\ k < n$.

A.4(1) Existe un casi-orden $\leq_{fin}$ en $\mathcal{AM}_\infty$ tal que $A \leq B$ si y sólo si $\forall\ n \exists\ m$ tal que $r_n(A) \leq_{fin} r_m(B)$.

Sean $A, B \in \mathcal{M}_\infty$ tal que $A \leq B$. Fijemos n, entonces, sea $j = p_n(A)$, como $A \leq B$ existe m tal que $p_m(B) = j$, además éste es único (por ser matrices escalón reducidas), así $r_n(A)$ y $r_m(B)$ tendrían el mismo número de columnas (j). Además, $A_i \in span\{B_n : 0 \leq n \leq m\}$, para todo $i \geq n$. Con lo que $r_n(A) \leq r_m(B)$.

Recíprocamente, para cada i fijo, la fila A_i es el límite de combinaciones lineales de filas de B ya que para todo n existe m tal que $A_i \mid_{p_n(A)+1} \in span\{B_j : j \leq m\}$, con lo que $\forall\ i$ tenemos que $A_i \in \overline{span}\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$.

A.4(2) Para todo $b \in \mathcal{AM}_\infty$. El conjunto $\{a \in \mathcal{AM}_\infty |\ a \leq_{fin} b\}$ es finito.

La matriz b está definida sobre un cuerpo finito, además tiene una cantidad finita de filas por lo tanto, hay una cantidad finita de combinaciones lineales de las filas de b, con lo que tendríamos que $\{a \in \mathcal{AM}_\infty |\ a \leq_{fin} b\}$ es finito.

A.5(1) $depth_B(a) \geq 0$ implica $[a, A] \neq \emptyset$ para toda $A \in [depth_B(a), B]$.

Sea $l = depth_B(a)$, entonces existen $B' \leq B$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $r_n(B') = a$. Fijemos tales B' y n.

Sea $A \in [l, B]$ y definamos a A' de la siguiente manera:

- $A'_i = B'_i$, para $0 \leq i \leq n$.
- $A'_{n+i} = A_{l+i}$, con $i > 0$.

Luego, por la construcción de A' tenemos que $r_n(A') = a$ y $A' \leq A$, es decir, $A' \in [a, A]$.

Previo a la demostración de la siguiente parte del axioma 5, veamos el siguiente resultado:

Sub-Lema 7.4. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_\infty$ tal que $A \leq B$. Entonces, $p(A) \subseteq p(B)$ y si $I = \{i : p_i(B) \notin p(A)\}$ entonces para cada $\bar{n} \in \mathbf{N}$ existe un único $n \in \mathbf{N}$ y una sucesión $\lambda_i (i \in I \backslash n)$ de elementos de F tal que*

$$A_{\bar{n}} = B_n + \sum_{i \in I \backslash n} \lambda_i B_i$$

Demostración. La representación

$$A_{\bar{n}} = \sum_{i \geq 0} \lambda_i B_i$$

existe y es única (se sigue de la definición). Note que si $n = min\{i : \lambda_i \neq 0\}$ entonces $p_{\bar{n}}(A) = p_n(B)$ y $\lambda_n = 1$. Además, si $i > n$ y $p_i(B) \in p(A)$ implica que $\lambda_i = 0$ ya que en caso contrario fallaría el hecho de que A es escalón reducida. $\square$

Observación 7.5. La conclusión del lema 7.4 también se satisface por la relación $a \leq_{fin} b$ entre los miembros de $\mathcal{AM}_\infty$.

A.5(2) $A \leq B$ y $depth_B(a) \geq 0$ implica que existe $A' \in [depth_B(a), B]$ tal que $[a, A'] \subseteq [a, A]$.

Sub-Lema 7.6. *Supongamos que $l = depth_B(a) \geq 0$ y que $A \in [a, B]$. Entonces existe $A' \in [l, B]$ tal que $[a, A'] \subseteq [a, A]$.*

Demostración. Si $l = 0$, entonces, tomando $A' = A$ se sigue el resultado. Ahora, consideremos cuando $l > 0$. Construyamos a A' por medio de sus filas de la siguiente manera:

– $A'_i = B_i$ si $i \leq l$.

– $A'_i = A_i$ si $i > l$.

Es claro que $A' \in [a, B]$. Veamos entonces que para cualquier $C \in [a, A']$ éste debe estar en $[a, A]$.

Sea $C \in [a, A']$ y sea $I = \{i|\ p_i(A') \notin p(C)\}$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $r_m(C) = a$. Además $C \leq A'$, luego por el lema 7.4, tenemos que para cada $\bar{n} \in \mathbf{N}$ existe un único $n \in \mathbf{N}$ y una sucesión $\gamma_i(i \in J\backslash_n)$ tal que:

$$C_{\bar{n}} = A'_n + \sum_{i \in I \backslash n} \gamma_i A'_i$$

Veamos los siguientes casos:

– Si $\bar{n} \leq m$, entonces sólo fueron tomadas a lo sumo las primeras l filas de A' para construir a $C_{\bar{n}}$. Pero las primeras l filas de A' son las primeras l filas de B con lo que tenemos que $C_{\bar{n}} = B'_n + \sum_{i \in I \backslash n} \gamma_i B'_i$. Por otro lado tenemos que $a \sqsubset A$ y $A \leq B$, así, por ser representaciones únicas, tenemos que $B'_n + \sum_{i \in I \backslash n} \gamma_i B'_i$ corresponde a una fila de A, $\forall\ \bar{n} \leq m$ con lo que tenemos que $C_{\bar{n}} = A_{\bar{n}}$.

– Si $\bar{n} > m$, entonces $n > l$ ya que en caso contrario tendríamos una contradicción al hecho de que $r_m(A) = a$, por lo que $A'_n = A_n$ y $A'_i = A_i, \forall\ i \in I\backslash_n$. Con lo que $C_{\bar{n}} = A_n + \sum_{I \backslash n} \gamma_i A_i$.

Con lo que queda completa la prueba. $\square$

A.6 Si $depth_B(a) \geq 0$ y si $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{AM}_{|a|+1}$ entonces existe $A \in [depth_B(a), B]$ tal que $r_{|a|+1}[a, A] \subset \mathcal{O}$ o $r_{|a|+1}[a, A] \cap \mathcal{O} = \emptyset$.

Sub-Lema 7.7. *Sea $[a, B]$ un abierto básico no vacío, l la longitud de a y $\mathcal{O}$ un conjunto de aproximaciones de tamaño $l+1$. Entonces existe $A \in [depth_B(a), B]$ tal que $r_{l+1}[a, A] \subseteq \mathcal{O}$ o $r_{l+1}[a, A] \cap \mathcal{O} = \emptyset$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $a = r_l(B)$, es decir, $[a, B] = [l, B]$. En caso de no coincidir a con $r_l(B)$ entonces, como $[a, B] \neq \emptyset$, luego existe $B' \in [a, B]$ tal que $[l, B'] = [a, B'] \subseteq [a, B]$.

Para demostrar este lema utilizaremos el resultado del lema de Carlson-Simpson, Voigt mencionado en el capítulo 6 (lema 6.2) aplicado al alfabeto $L = F^l$.

Una palabra $w \in W_L$ de longitud k la podemos ver como una matriz $(w_{ij})_{(l\times k)}$. Para tal palabra podemos asociar una matriz $((l+1)\times m)$, $b = b(w)$, donde $m = p_{l+k}(B)$ dada por:

$$b_i = B_i|_{m+1} + \sum_{j\leq k} w_{ij} B_{l+j}|_{m+1}$$

para $i < l$, y

$$b_l = B_{l+k}\ |_{m+1}$$

Note que tal $b(w)$ pertenece al conjunto de aproximaciones de tamaño $l+1$ de $[l, B]$, $r_{l+1}[l, B]$, es decir, $b(w) = r_{l+1}(A)$ para algún $A \in [l, B]$. En particular, si la matriz A está definida de la siguiente manera:

- $A_i = B_i + \sum_{j<k} w_{ij} B_{l+j}$, si $i < l$.
- $A_i = B_{i+k}$, si $i \geq l$.

Este A satisface lo requerido. Recíprocamente, cada $r_{l+1}(A)$ para $A \in [l, B]$ tiene la forma $b(w)$ para algún $w \in W_L$. El w es determinado por la conclusión del sub-lema 7.4. La longitud de w será el entero k tal que $p_l(A) = p_{l+k}(B)$. Entonces, por el sub-lema 7.4 tenemos:

$$A_i = B_n + \sum_{j\in I\setminus n} \lambda_{ij} B_j$$

Como $A \in [l, B]$ entonces, para $i < l$ se tiene que $n = i$.

Tenemos,

$$A_i = B_i + \sum_{j\in I\setminus i} \lambda_{ij} B_j$$

Nótese que para $i < l$, se tiene que $min\{I\setminus i\} \geq l$. Así, $j \in I\setminus i$ implica que $j \geq l$. Por otro lado, tenemos que $p_{l+k}(B) = m$ por lo que $\forall\ j \in I\setminus(l+k)\ B_j\ |_{m+1}$ es nula. Entonces,

$$\sum_{j\in I\setminus i} \lambda_{ij} B_j\ |_{m+1} = \sum_{j\in I\setminus i\cap[l,l+k)} \lambda_{ij} B_j\ |_{m+1}$$

Definamos a w de la siguiente manera:

Para $0 \leq i \leq l$ y $0 \leq j < k$

$$w_{ij} = \begin{cases} \lambda_{i(j+l)} & si\ \ j+l \in I\setminus i \\ & 0\ si\ no \end{cases} \tag{7.1}$$

De aquí obtenemos que $A_i \mid_{m+1}= b_i(w)$.

Aplicando el lema de Carlson-Simpson, Voigt al conjunto $\mathcal{O}^* = \{w \in W_L \mid b(w) \in \mathcal{O}\}$ entonces existe $X = (x_n)$ sucesión infinita de palabras variables sobre L tal que $\langle X \rangle_L$ está contenido en $\mathcal{O}^*$ o es disjunto de él. Usemos $(x_n)_{n\geq 1}$ para definir $A \in [l, B]$. Sea x una palabra multivariable infinita, $x_0[v_0]^\frown....^\frown x_n[v_n]^\frown....$ Sea $\lambda \in L$, si λ ocupa la j-ésima posición de x denotemos por x_{ij} la i-ésima coordenada de la letra λ, $\lambda \in L$. Sea J el conjunto de todas las posiciones de x ocupadas por alguna letra y para $n \in \mathbb{N}$, sea I_n el conjunto de posiciones de x ocupadas por la variable v_n. Para $i < l$, sea:

$$A_i = B_i + \sum_{j\in J} x_{ij} B_{j+l}$$

y para $i \geq 0$

$$A_{i+l} = \sum_{j\in I_i} B_{l+j}$$

Este A satisface la conclusión del lema por el hecho que cada $b \in r_{l+1}[l, A]$ es de la forma $b(w)$ para algún $w \in \langle X \rangle_L$. Para ver la conclusión del sub-lema, tomemos $C \in [l, A]$ y sea $b = r_{l+1}(C)$. Sea $m = p_l(C)$, entonces $m = p_{l+\bar{k}}(A)$ para algún $\bar{k} \geq 0$.

Note que $p_{l+\bar{k}}(A) = p_{l+k}(B)$ donde $k = min(I_{\bar{k}})$. Por el lema 7.4 y por la construcción anterior, tenemos que para todo $i < l$,

$$C_i = A_i + \sum_{n\geq 0} \lambda_{in} A_n$$

$$C_l = A_{l+\bar{k}} + \sum_{n\geq 0} \mu_n A_{l+\bar{k}+n}$$

Se sigue que:

$$C_i = B_i + \sum_{j\in J} x_{ij} B_{j+l} + \sum_{n\geq 0} \lambda_{in} (\sum_{j\in I_n} B_{l+j})$$

$$C_l = B_{l+k} + \sum_{j\in I_l \setminus l+k} B_{l+j} + \sum_{n\geq 0} \mu_n (\sum_{j\in I_n} B_{l+j})$$

Restringiendo a m, entonces para $n > \bar{k}$ se tiene que $min(I_n) > k$, esto se debe a que I_n son las posiciones ocupadas por la variable v_n, para $n \geq k$ hay por lo menos k variables previas. Por lo tanto, para $j \in I_n$, con $n > \bar{k}$ se tiene que $B_{l+j} \mid_{m+1}$ es nula.

Además, si $n < k$ y $j \in I_n \backslash k$, entonces también $B_{l+j} \mid_{m+1}$ es nula, así:

$$C_i \mid_{m+1} = B_i \mid_m + \sum_{j \in J \cap [0,k)} x_{ij} B_{j+l} \mid_{m+1} + \sum_{n<k} \lambda_{in} (\sum_{j \in I_n \cap [0,k)} B_{l+j} \mid_{m+1})$$

$$C_l \mid_{m+1} = B_{l+k} \mid_{m+1}$$

Luego, tenemos que $(J \cap [0,k)) \cap (\cup_{n<k} I_n \cap [0,k)) = \emptyset$, esto es consecuencia de que si $j \in J \cap [0,k)$, entonces no puede estar en $I_n \cap [0,k)$ ya que j representa la ocurrencia de alguna letra y los I_n las ocurrencias de variables.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $[0,k) = (J \cap [0,k)) \cup (\cup_{n<k} I_n \cap [0,k))$, en caso de no ocurrir esto, completamos la siguiente expresión con ceros. Entonces, $i < l$:

$$C_i \mid_{m+1} = B_i \mid_{m+1} + \sum_{j<k} w_{ij} B_{l+j} \mid_{m+1}$$

$$C_l \mid_{m+1} = B_{l+k} \mid_{m+1}$$

Con $w = (w_{ij})_{l \times k}$ definida de la siguiente manera:

Para todo $i < l$ y todo $n < \bar{k}$, sea $\lambda_n = (\lambda_{in})$, λ_n determina un elemento en $F^l = L$. Sea $w = x_0[\lambda_0]^\frown ...^\frown x_{\bar{k}-1}[\lambda_{\bar{k}-1}]^\frown u$ donde u es el segmento inicial de $x_{\bar{k}}$ antes de la primera ocurrencia de variable, en este caso $v_{\bar{k}}$. Entonces, w es segmento inicial de:

$$x_0[\lambda_0]^\frown ...^\frown x_{\bar{k}-1}[\lambda_{\bar{k}-1}]^\frown x_{\bar{k}}[v_{\bar{k}}]^\frown ...$$

Volviendo a las definiciones, obenemos que $C|_{(l+1)\times(m+1)} = b(w)$.

Por el lema de Carlson, Simpson- Voigt, tenemos que $\langle X \rangle_L \subseteq \mathcal{O}^*$ o $\langle X \rangle_L \cap \mathcal{O}^* = \emptyset$.

Veamos los casos posibles:

Si ocurre que $\langle X \rangle_L \subseteq \mathcal{O}^*$, entonces todo elemento de $r_{l+1}[l, A]$ tiene la forma de $b(w)$, para algún $w \in \langle X \rangle_L$, por lo que $b(w) \in \mathcal{O}$, $\forall\ b \in r_{l+1}[l, A]$. Por lo tanto, $r_{l+1}[l, A] \subseteq \mathcal{O}$.

Si ocurre $\langle X \rangle_L \cap \mathcal{O}^* = \emptyset$, entonces $\forall\ w \in \langle X \rangle_L$, se tiene que $b(w) \notin \mathcal{O}$, es decir, $\forall\ b \in r_{l+1}[l, A]$, $b \notin \mathcal{O}$. Luego, $r_{l+1}[l, A] \cap \mathcal{O} = \emptyset$.

Esto completa la prueba.

$\square$

$\square$

TEOREMA 7.8 (Teorema de Carlson). *$(\mathcal{M}_\infty, \leq, r)$ es un espacio Ramsey-topológico.*

DEMOSTRACIÓN. Es inmediata del lema anterior y de la observación 7.2 en virtud del teorema de Ellentuck (teorema 4.12). □

2. Aplicación

Para $A \in \mathcal{M}_\infty$, sea

$$V(A) = \overline{span}\{A_i |\ i \in \mathbf{N}\},$$

es decir, el espacio vectorial cerrado generado por las filas de A en el espacio $F^{\mathbf{N}}$ dotado con la topología producto usual. Un argumento usual muestra que $A \mapsto V(A)$ es una biyección entre $\mathcal{M}_\infty$ y la colección de todos los subespacios cerrados infinitodimensionales de $F^{\mathbf{N}}$. Además, por la definición de $\leq$ tenemos que $A \leq B$ si y sólo si $V(A) \subseteq V(B)$.

NOTACIÓN 7.9. *Denotemos por $\mathcal{V}_\infty$ a la colección de todos los subespacios cerrados infinitodimensionales de $F^{\mathbf{N}}$*

Si dotamos a $\mathcal{V}_\infty(F)$ con la topología generada por los abiertos definidos de la siguiente manera: $\hat{V} \in \mathcal{V}_\infty(F)$ es un abierto si y sólo si $V^{-1}(\hat{V})$ es un abierto en $\mathcal{M}_\infty(F)$, entonces se verifica que $A \mapsto V(A)$ es un homeomorfismo entre $\mathcal{M}_\infty(F)$ y $\mathcal{V}_\infty(F)$.

NOTACIÓN 7.10. *Denotemos por $\mathcal{V}_\infty(F, V)$ a la colección de todos los subespacios cerrados infinitodimensional de $V \subseteq F^{\mathbb{N}}$.*

COROLARIO 7.11. *Sea $\mathcal{X}$ es un subconjunto analítico del espacio $\mathcal{V}_\infty(F)$. Entonces existe $V \in \mathcal{V}_\infty(F)$ tal que $\mathcal{V}_\infty(F, V)$ está contenida en $\mathcal{X}$ o es disjunta de $\mathcal{X}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{X}$ subconjunto de $\mathcal{V}_\infty(F)$ analítico. Sea f el homeomorfismo antes mencionado entre $\mathcal{V}_\infty(F)$ y $\mathcal{M}_\infty(F)$.
Tenemos entonces que $f^{-1}(\mathcal{X})$ es también analítico. Por lo que $f^{-1}(\mathcal{X})$ es Ramsey, luego $\forall\ [a, A] \subseteq \mathcal{M}_\infty\ \exists\ B \in [depth_a(A), B]$ tal que $[a, B] \subseteq f^{-1}(\mathcal{X})$ o $[a, B] \cap f^{-1}(\mathcal{X}) = \emptyset$.
Fijemos $[0, A] \in \mathcal{M}_\infty(F)$, entonces existe $B \in [0, A]$ tal que $[0, B] \subseteq f^{-1}(\mathcal{X})$ o $[0, B] \cap f^{-1}(\mathcal{X}) = \emptyset$.
Tomemos $V = f(B)$, entonces $\mathcal{V}_\infty(F, V) = \{f(C) \in \mathcal{V}_\infty |\ C \in [0, B]\}$.
Supongamos que ocurre $[0, B] \subseteq f^{-1}(\mathcal{X})$. Sea $\hat{V} \in \mathcal{V}_\infty(F, V)$, entonces $\hat{V} = f(C)$ para algún

$C \in [0, B]$. Luego, $C \in f^{-1}(\mathcal{X})$, así, $\hat{V} \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\mathcal{V}_\infty(V) \subseteq \mathcal{X}$.
Supongamos ahora que ocurre la otra parte, es decir, $[0, B] \cap f^{-1}(\mathcal{X}) = \emptyset$. Sea $\hat{V} \in \mathcal{V}_\infty(F, V)$, entonces $\hat{V} = f(C)$ para algún $C \in [0, B]$. Como $[0, B] \cap f^{-1}(\mathcal{X}) = \emptyset$ entonces $C \notin f^{-1}(\mathcal{X})$. Luego, $\hat{V} \notin \mathcal{X}$. Obteniendo así que $\mathcal{V}_\infty(V) \cap \mathcal{X} = \emptyset$.

$\square$

Bibliografía

[1] T. J. Carlson, *An infinitary version of the Graham-Leeb-Rothschild theorem*, J. Comb. Th., Series A**44** (1987), 22–33

[2] T. J. Carlson and S. G. Simpson, Topological Ramsey Theory, in *Mathematics of Ramsey Theory, Algorithms and Combinatorics* **5**, J. Neŝetr̂il and V. Rödl (Eds.), Springer-Verlag. 1990. pp. 172-183.

[3] P. Erdös and P. Rado, *A partition calculus in set theory*, Bulletin of the Amer. Math. Soc. **62** (1956), 417-439.

[4] E. Ellentuck, *A new proof that analytic sets are Ramsey*, J. Symbolic Logic 39 (1974)163-165. 1

[5] F. Galvin, *A generalizition of Ramsey's theorem*, Notices of the Amer. Math. Soc. **15** (1968), 548. 1

[6] F. Galvin and K. Prikry, *Borel sets and Ramsey's theorem*, J. Symbolic Logic 38 (1973)193-198. 1

[7] K. R. Milliken, *Ramsey's theorem with sums or unions*, J. Combinatorial Theory (A) 18 (1975), 276-290.

[8] Mijares, J. *Parametrizing the abstract Ellentuck theorem*, Discrete Math., **307**(2007), 216–225.

[9] Mijares, J. *A notion of selective ultrafilter correspopnding to topological Ramsey spaces*, Math. Log. Q. **53**(2007), n3, 255–267.

[10] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 30 (1929), 264-286. 1

[11] J. Silver, *Every analytic set is Ramsey*, J. Symbolic Logic 35 (1970), 60-64. 1

[12] Todorcevic, S., *Introduction to Ramsey spaces*, Princeton University Press, por aparecer. 2

[13] Dugundji, J., *Topology*: *Allyn and Bacon, INC.* Boston, (1974). 11

[14] Herstein, I. N.*Álgebra Moderna: Grupos, anillos, campos, teoría de Galois*:

[15] Di Prisco, C., *Una introducción a la teoría de conjuntos y los fundamentos de las matemáticas*: *Coleção CLE. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência.* UNICAMP, (1997).

[16] Quintana, Y., *Topología*, Universidad Central de Venezuela, (2002)

[17] Kechrish, A., *Classical set theory Springer-Verlag New York, Inc.* (1995). 17

11

17