



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Solución de la ecuación de Van der Pol a través de la Teoría de Sistemas Dinámicos

Trabajo Especial de Grado presentado ante la
ilustre Universidad Central de Venezuela por la
Br. Zorely A. Jesús I. para optar al título
de Licenciada en Matemática.

Tutor: Dr. José Luis Sánchez

Caracas, Venezuela

Mayo, 2010

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Solución de la ecuación de Van der Pol a través de la Teoría de Sistemas Dinámicos**”, presentado por la **Br. Zorely A. Jesús I.**, titular de la Cédula de Identidad **18.616.051**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática**.

Dr. José Luis Sanchez
Tutor

Dr. Nelson Merentes
Jurado

Dr. Manuel Maia
Jurado

Dedicatoria

A mis Padres, a mis Hermanos, a mi Sobrino, a mi Abuela y a mis familiares más
cercanos,

A mi novio y a mis amigos.

Para mis seres queridos es este trabajo...

Agradecimiento

En primer lugar, quiero agradecerle a Dios, por haberme dado salud, fuerza y fortaleza para culminar una de mis metas.

A mis Padres, Zoraida y Jesús, porque gracias a ustedes soy lo que soy, son mi inspiración para seguir luchando, gracias por el apoyo incondicional, la comprensión y por confiar en mi.

A mis Hermanos, Gaby y Egar, gracias por estar siempre a mi lado, en los buenos y más difíciles momentos. He querido ser su ejemplo.

A mi Abuela por siempre darme su apoyo y abrirme las puertas de su casa incondicionalmente.

Quiero agradecerle a mi novio, Alejandro, por su comprensión, paciencia y apoyo en todo momento. Por ser parte de mi vida.

Al profesor José Luis Sánchez, mi tutor, por compartir conmigo sus conocimientos, por toda colaboración prestada durante su tutoría y por su dedicación a pesar de sus obligaciones.

A mis Tías (Rosa, Nené, Mary, Verónica), a mi abuelo y a mis primos por brindarme su colaboración, apoyo y confianza, sobre todo cuando más los necesitaba.

También quiero agradecerle a mis amigas, Siham, Marianto y muy especialmente a Oda, por su apoyo incondicional, por escucharme, hacerme reír, verme llorar, aguantarme y compartir conmigo desde el inicio de mi carrera. A mi amigo Tomás por siempre estar allí y de igual forma a Jhon, por sus sinceridades tan sutiles y por ayudarme, hasta el último momento conté con tu ayuda para terminar este trabajo, gracias!

A los Profesores que me orientaron y fueron parte de mi formación, en especial al profesor Merentes, por darme un voto de confianza y orientarme en todo momento. A lo profesora Mariela por ayudarme, por siempre estar atenta y dispuesta a colaborarme, y al profesor Azócar, que con su alto nivel de formación siempre estuvo dispuesto a aclararme las dudas.

A todas aquellas personas que estuvieron a mi lado, amigos y compañeros como Henry, Ronaldys, Alonzo, Fory, José, Jean. A Roberto y Karelys, gracias por compartir conmigo, lamento no haberlos conocidos desde que entre a la uni...

Quiero agradecerle al Sr Freddy que sin conocerme me prestó su apoyo y colaboración.

Son tantas las personas a quienes debería agradecerle, tal vez no alcanza todo este espacio para hacerlo, disculpen si alguno no se encuentra.

Mil Gracias a todos que con sus pequeños detalles marcan la diferencia en mi corazón!!!

ÍNDICE GENERAL

Introducción	6
1 Preliminares	11
1.1 Teorema de Existencia y Unicidad de las soluciones	11
1.2 Sistema Dinámico	14
1.3 Interpretación geométrica de la estabilidad del ciclo límite	26
1.4 Teorema de Poincaré-Bendixson	30
1.4.1 Aplicación del Teorema de Poincaré-Bendixson	32
1.5 Teorema de Liénard	37
1.6 Método del Average en el caso periódico	39
2 Ciclo límite de la ecuación Van der Pol	41
2.1 Balthazar Van der Pol	41
2.2 Ecuación de Van der Pol	43
2.3 Solución periódica orbitalmente asintóticamente estable	46
2.4 Ciclo límite de la ecuación de Van der Pol	48
3 Método Poincaré-Lindstedt	60
3.1 Expansión de Poincaré	60

ÍNDICE GENERAL	6
3.2 Teorema de la Función Implícita	63
3.3 Integrales Paramétricas Reales	63
3.4 Método Poincaré-Lindstedt	64
4 Aplicaciones en Matlab	82
Conclusión	90
Bibliografía	93

INTRODUCCIÓN

La *Teoría de Sistemas Dinámicos* apareció por primera vez en el siglo XVII cuando Newton introdujo el concepto de ecuaciones diferenciales ordinarias en Mecánica. En tal sentido, dichos sistemas son planteados como un tópico especial en la *Teoría de Ecuaciones Diferenciales*, sin embargo, es a Henri Poincaré a quien se le considera como el padre de la teoría moderna de los sistemas dinámicos, él trabajó en este tema en el siglo XIX, seguido por I. Bendixson que estudio las propiedades topológicas de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas en el plano.

Aunque Poincaré fue un pionero en la Teoría de Sistemas Dinámicos, cabe destacar que Lyapunov desarrolló muchos métodos importantes, que hoy en día son conocidos como métodos de Lyapunov, los cuales permiten estudiar la estabilidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Lyapunov y Poincaré convirtieron la no linealidad en su objeto de estudio y aportaron métodos y conceptos fundamentales en el estudio de las ecuaciones lineales y no lineales. En 1892 se publicó la famosa memoria de Lyapunov *Problema General de la Estabilidad del Movimiento* (en ruso), la potencia de este método es su generalización, puede aplicarse a sistemas tanto variantes en tiempo (sistemas no autónomos) como invariantes

en tiempo (sistemas autónomos), independiente del orden del sistema. También ese mismo año Poincaré publicó el primer volumen del célebre *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, un tratado importante sobre la mecánica celeste. Ambos trabajos marcaron un hito en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales, en particular, cuando sus resultados son combinados con las nuevas técnicas matemáticas desarrolladas durante el siglo pasado. Algunos aspectos de estos trabajos han mostrado su conexión con la teoría del caos, el nuevo paradigma de las matemáticas y la física. Por ejemplo, los resultados de Poincaré sobre movimientos cercanos a órbitas homoclínicas y heteroclínicas y el concepto de Lyapunov de números característicos, hoy llamados exponentes de Lyapunov.

La Teoría de Poincaré-Bendixson es ahora un tópico estándar en la discusión de los cursos de sistemas dinámicos. Otro gran desarrollo de la Teoría de Poincaré es la introducción del concepto de trayectoria, es decir, una curva en el plano fase x, \dot{x} parametrizado por una variable de tiempo t .

De ésta manera, Poincaré comenzó un conveniente trabajo geométrico en el cual estudió la conducta de ecuaciones diferenciales en el plano. Los trabajos de Poincaré reflejan que él no estuvo interesado en la integración de los tipos de ecuaciones particulares, pero sí en la clasificación de todas las posibles conductas de las ecuaciones diferenciales de segundo orden.

La noción abstracta de sistema dinámico puede ser esencialmente atribuida a A. A. Markóv y H. Whitney, estos dos autores separadamente observaron la teoría cualitativa de familias de curvas (trayectorias) en un adecuado espacio X , siempre que estas familias sean de alguna manera restringida a X en sus posibles conductas.

Un gran impulso de la Teoría de Sistemas Dinámicos fue por el trabajo de G. D. Birkhoff, su monografía sobre Sistemas Dinámicos en 1927 es la base de muchas de las

investigaciones desde 1930 hasta el presente. Birkhoff estableció las dos principales líneas de trabajo sobre sistemas dinámicos, la teoría topológica y la teoría ergódica.

En 1947, V. V. Nemytskii y V. V. Stepanov completaron su “Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales”, que sirvió como una referencia estándar para el desarrollo de los sistemas dinámicos. Durante la década de 1950 se manejó una generalización del concepto de sistemas dinámicos para transformaciones topológicas de grupos.

Por otra parte, se tiene a B. Van der Pol, un físico e ingeniero eléctrico de origen holandés, que también realizó un gran aporte a la Teoría de Sistemas Dinámicos, encontró oscilaciones estables que hoy en día se conocen como ciclos límites estables en los circuitos eléctricos que emplean tubos de vacío, mientras realizaba trabajos en la Philips.

En este sentido, el oscilador de Van der Pol modela un circuito eléctrico que se implementó en las radios hacia 1920. Este oscilador ha sido usado en matemática, física, biología, ingeniería, medicina, telecomunicaciones, entre otras ramas de estudios. Por ejemplo: en biología existen modelos para las potencialidades de acción de las neuronas, en sismología modelos en una falla geológica. Mientras que en medicina: construyó una serie de modelos de circuitos electrónicos del corazón humano para estudiar el rango de estabilidad de la dinámica del corazón. Sus investigaciones con la adición de una señal externa de conducción son análogas a la situación en la que un corazón real está impulsado por un marcapasos. Él estaba interesado en averiguar, mediante su labor de arrastre, la forma de estabilizar una situación irregular del corazón o las pulsaciones, el nombre de van der Pol está asociado a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, la cual es:

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad \varepsilon \text{ positivo .}$$

Ésta ecuación apareció en su artículo “Relaxation-Oscillations”, publicado en la

revista Philosophical Magazine en 1926.

El propósito de este Trabajo Especial de Grado (T.E.G.) será estudiar la solución de la ecuación de Van der Pol a través de la Teoría de Sistemas Dinámicos, básicamente, estará estructurado en 4 Capítulos distribuidos de la siguiente manera:

- En el Capítulo I se presentará una introducción acerca de los sistemas dinámicos, a través de secciones que presentarán nociones básicas relativas a dichos sistemas. Determinando que la ecuación de Van der Pol posee solución periódica, a través del Criterio de Bendixson.
- En el Capítulo II se dará la aplicación de la teoría dada en el capítulo anterior, a la ecuación de Van der Pol para determinar que la solución es orbitalmente asintóticamente estable, hallada mediante el Teorema de Liénard. Obteniéndose el ciclo límite de la misma.
- En el capítulo III encontraremos una aproximación de una serie convergente para la solución periódica de dicha ecuación, utilizando el método de perturbación Poincaré-Lindstedt.
- Finalmente, en el Capítulo IV se realizará una representación gráfica en el plano fase, donde se presentan todos los posibles estados y comportamientos del sistema dinámico generado por la ecuación de Van der Pol, variando el parámetro, con Matlab, un programa para resolver problemas numéricos.

En este capítulo se dará una introducción acerca de los sistemas dinámicos, a través de secciones que presentarán nociones básicas relativas a tales sistemas, por medio de definiciones, teoremas, lemas y ejemplos de gran importancia para el desenlace que se realizará en los próximos capítulos.

1.1 Teorema de Existencia y Unicidad de las soluciones

Cuando un problema de valor inicial modela matemáticamente una situación física, la existencia y unicidad de la solución es de suma importancia, con seguridad se espera tener una solución, debido a que físicamente algo debe suceder. Por otra parte se supone que la solución sea única, pues si repetimos el experimento en condiciones idénticas cabe esperar los mismos resultados, siempre que el modelo sea determinístico, es decir, un sistema en el cual el azar no está involucrado en los futuros estados del mismo. Por lo tanto, al considerar un problema de valor inicial es natural hacerse las siguientes preguntas:

1. Existencia: ¿Existirá la solución del problema?

2. Unicidad: ¿En el caso de que exista la solución, será única?
3. Determinación: ¿En caso de que exista solución, como la determinamos?

En esta sección nos ocuparemos de las dos primeras interrogantes: existencia y unicidad de la solución.

Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y

$$x : I \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } t \longmapsto x(t),$$

una función diferenciable respecto a $t \in I$. Usaremos la notación \dot{x} para denotar $\frac{dx}{dt}$, donde la variable independiente t es un escalar que identificamos como el tiempo.

Consideremos la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial continuamente diferenciable en t y $x \in \mathbb{R}^n$. Debido a que la variable independiente no ocurre explícitamente, la ecuación diferencial (1.1) es llamada *autónoma*.

Dada una función vectorial $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con $G \subset \mathbb{R}$, es considerada una solución de la ecuación (1.1) sobre el intervalo G si es continuamente diferenciable y si satisface la ecuación (1.1), esto es:

$$\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t)) \text{ para todo } t \in G.$$

Además, la ecuación (1.1) es presentada como un problema de valor inicial (P.V.I) de primer orden para un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias si satisface lo anteriormente planteado, y lo siguiente:

$$x(t_0) = x_0, \text{ con } x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R},$$

entonces referimos al siguiente sistema como un P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \text{ con } x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Notamos que la función vectorial f en la ecuación diferencial (1.1) tiene que satisfacer ciertas condiciones, de las cuales la siguiente condición es muy importante.

Definición 1. Una función $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, se dice que satisface la condición Lipschitz en $D \subset \mathbb{R}^n$ si existe una constante L tal que

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|,$$

donde $x_1, x_2 \in D$. L es llamada constante Lipschitz.

A continuación daremos un ejemplo que ilustra el hecho de un P.V.I que tiene solución, pero ésta no es única.

Ejemplo 1. Considere el P.V.I

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x}, & \text{con } x \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

A través del método de separación de variable se obtiene que una solución es dada por $x(t) = (t + 2\sqrt{x_0})/4$, con $t_0 = 0$. Además, si $x_0 = 0$, entonces otra solución es la idénticamente a cero para todo t . Por lo tanto, el P.V.I no tiene solución única.

El ejemplo de arriba muestra la necesidad de ciertas condiciones sobre la función f con la finalidad de garantizar la unicidad de soluciones para el P.V.I.

Teorema 1 (Teorema de Existencia y Unicidad). Sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continuamente Lipschitz entonces para la condición inicial $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ la ecuación diferencial autónoma (1.1) tiene solución única en un intervalo maximal de existencia $G_{x_0} \equiv (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$.

La condición de Lipschitzidad juega un papel fundamental en el teorema anterior. Para más detalles de lo relacionado a la existencia y unicidad de soluciones ver [6] y [13].

1.2 Sistema Dinámico

Un sistema dinámico es un sistema complejo que presenta un cambio o evolución de su estado en el tiempo, en este sentido, puede considerarse como una colección de partes que interactúan entre sí y se modifican unas a otras a través del tiempo. El comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones. Por lo tanto, el objetivo de la Teoría de los Sistemas Dinámicos es el estudio del comportamiento a largo plazo o comportamiento asintótico de un sistema que depende del tiempo.

Entre los ejemplos de sistemas dinámicos se tienen: el movimiento del balanceo de un péndulo de reloj, el flujo de agua en una cañería, y el número de peces de cada primavera en un lago, entre otros.

Los sistemas dinámicos pueden ser: discretos o continuos, a continuación se darán las definiciones desde el punto de vista matemático.

Definición 2. *Un sistema dinámico discreto es una ecuación de la siguiente forma:*

$$x_{k+1} = f(x_k), \text{ con } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

donde f es la aplicación $f : X \rightarrow X$, definida en un cierto conjunto X .

Ejemplo 2. *En las siguientes ejemplos encontraremos ecuaciones donde se aplican los sistemas dinámicos discretos:*

- **La ecuación de Malthus** sirve para estudiar la evolución de la población de una determinada especie y es representada por:

$$x_{k+1} = x_k + dx_k = (1 + d)x_k = cx_k,$$

donde x_k es el número de individuos de la población en el instante k . Si suponemos que por cada individuo existente en el período k habrá c individuos en el período $k + 1$. La solución de esta ecuación es $x_k = c^k x_0$.

- **La curva de Verhulst**, es un modelo común del crecimiento de la población es proporcional tanto a la población existente, como al “espacio” disponible. Esto es,

$$x_{k+1} = x_k + dx_k(1 - x_k) = (1 + d)x_k - dx_k^2,$$

la población máxima admisible es 1 (normalizada) si se pasa de 1 el crecimiento se hace negativo.

- **La parábola logística de May**, es una ecuación para estudiar el crecimiento de la población de insectos en un ecosistema cerrado, ésta es representada por:

$$x_{k+1} = c(1 - x_k)x_k,$$

donde x_k expresa la fracción de población existente en el período k con respecto al nivel máximo de población.

En [11] pueden apreciarse diversos ejemplos de sistemas dinámicos discretos.

Definición 3. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$, un sistema dinámico continuo de clase C^k es la terna (U, I, φ) , donde φ es una aplicación de clase C^k , con $k > 0$, tal que $\varphi : I \times U \rightarrow U$. Donde $\varphi(t, x) = \varphi(x(t))$. Además dicha aplicación satisface las siguientes propiedades:

- (i) $\varphi(0, x_0) = x_0$ donde $x(t_0) = x_0$.
- (ii) $\varphi(t + s, x_0) = \varphi(s, \varphi(t, x_0))$ para cada $t, s \in I$.
- (iii) $\varphi(t, x_0)$ tiene inversa y es dada por $\varphi(-t, x_0)$.

En el desarrollo de este Trabajo Especial de Grado sólo se trabajará con sistemas dinámicos continuos, a los cuales, sin pérdida de generalidad, sólo se llamarán sistemas dinámicos. Al ejemplo que presentaremos a continuación se le verificarán las propiedades de la definición de sistema dinámico.

Ejemplo 3. Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria autónoma con un parámetro μ :

$$\dot{x} = f(x, \mu),$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in M$ espacio métrico y $f : \mathbb{R}^n \times M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ función continua. Ahora, supongamos por el Teorema de Existencia y Unicidad que para cada $(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times M$ el sistema tiene solución única $\psi((x, \mu), t)$ definida sobre \mathbb{R} satisfaciendo la condición inicial $\psi(0, (x, \mu)) = x$.

Sea $X = \mathbb{R}^n \times M$. Definamos $\varphi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ dada por $\varphi(t, (x, \mu)) = (\mu, \psi(t, (x, \mu)))$. Veamos que dicha aplicación es un sistema dinámico, a través de la verificación de las propiedades de la definición.

1. $\varphi(0, (x, \mu)) = (x, \mu)$?

$$\begin{aligned} \varphi(0, (x, \mu)) &= (\mu, \psi(0, (x, \mu))) \\ &= (x, \mu). \end{aligned}$$

2. Ahora debemos ver que $\varphi(t + s, (x, \mu)) = \varphi(s, \varphi(t, (x, \mu)))$ para cada $t, s \in \mathbb{R}$.

En particular supongamos $s = 0$ tal que ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi(s, \varphi(t, (x, \mu))) &= \varphi(0, \varphi(t, (x, \mu))) \\ &= \varphi(0, (\mu, \psi(t, (x, \mu)))) \\ &= (\mu, \psi(0, \psi(t, (x, \mu)))) \\ &= (\mu, \psi(t, (x, \mu))) \\ &= \varphi(t, (x, \mu)). \end{aligned}$$

Así, $\varphi(s, \varphi(t, (x, \mu))) = \varphi(t + s, (x, \mu))$.

3. Claramente la función inversa queda de la siguiente forma:

$$\varphi(-t, (x, \mu)) = (\mu, \psi(-t, (x, \mu))).$$

Finalmente, el sistema diferencial ordinario autónomo con un parámetro es un sistema dinámico.

Consideremos la ecuación autónoma (1.1), con $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. D es lo que se conoce como espacio fase, donde se tiene que si el espacio es \mathbb{R}^2 a D se le considera plano fase. Las proyecciones de las posibles soluciones de la ecuación autónoma (1.1) se representan en el espacio fase, tal como aparece en la siguiente figura:

Ejemplo 4. Consideremos en \mathbb{R}^2 al sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2, \\ \dot{y} = -y^3 + x^2. \end{cases}$$

Donde la conducta de dicho sistema queda expresada en el siguiente plano fase:

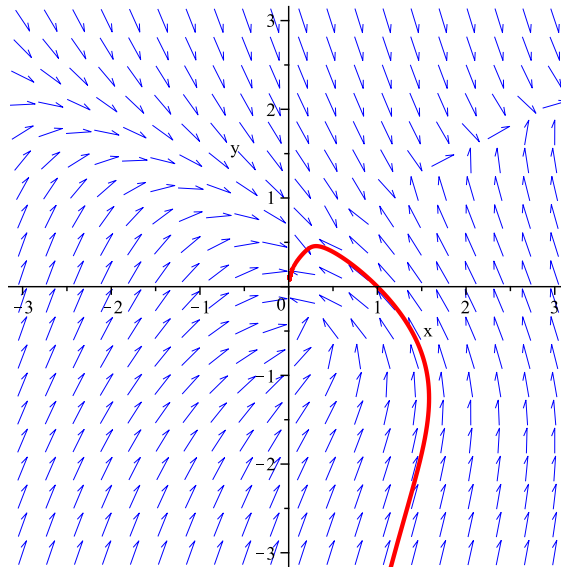


Figura 1.1: Plano fase

Las flechas azules representan el sentido y comportamiento del sistema y la curva roja es una trayectoria.

El plano fase del ejemplo anterior y de los próximos ejemplos que se presentarán en el desarrollo de este capítulo son a través de la aplicación de Maple, un programa

matemático capaz de realizar cálculos simbólicos, algebraicos y de álgebra computacional (ver [15]).

En el estudio de sistemas dinámicos, es importante mencionar el *conjunto límite*, puesto que éste puede ser usado para comprender el comportamiento a largo plazo de un sistema dinámico. Los conjuntos límites pueden ser: punto fijo o punto de equilibrio, ciclo límite y atractor.

Definición 4. *El punto $a \in \mathbb{R}^n$ es llamado punto de equilibrio de (1.1), si $f(a) = 0$.*

En tal sentido, los puntos de equilibrio son puntos correspondiente al estado del sistema que permanece constante el tiempo. Entre los ejemplos de los puntos fijos pueden considerarse: el estado final de una piedra que cae, un péndulo o un vaso con agua. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = -x, \text{ con } t \geq 0.$$

Donde en $x = 0$ tenemos un punto fijo, tal que $x(t) = 0$ corresponde a una solución de equilibrio (o solución estacionaria) de la ecuación para todo $t \geq 0$. Notándose, que para $x_0 \neq 0$ las soluciones son dadas por $x(t) = x_0 e^{-t}$, donde, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Ahora introduciremos la noción de trayectorias:

Definición 5. *Sea X un espacio métrico. Dada las aplicaciones:*

$$\gamma(x) = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

$$\gamma^+(x) = \{x(t) : t \in \mathbb{R}^+\}.$$

$$\gamma^-(x) = \{x(t) : t \in \mathbb{R}^-\}.$$

Para algún $x \in X$ los conjuntos $\gamma(x)$, $\gamma^+(x)$ y $\gamma^-(x)$ son respectivamente llamados trayectoria, semi-trayectoria positiva y semi-trayectoria negativa de x .

Definición 6. Un *Ciclo límite* es una trayectoria cerrada en el plano fase.

Definición 7. Una trayectoria compacta $\overline{\gamma(x)} = \Gamma$ es llamada *órbita cerrada*.

Teorema 2. Sea $f : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si la órbita de un punto converge a un punto ζ , ζ ha de ser un punto fijo.

Definición 8. Supongamos que $x = \psi(t)$ es una solución de la ecuación (1.1), con $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ tal que para el período T se tiene que $\psi(t + T) = \psi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\psi(t)$ es llamada *solución periódica* de la ecuación.

Lema 1. Una solución periódica de la ecuación autónoma (1.1) corresponde con una órbita cerrada (ciclo límite) en el plano fase y la órbita cerrada corresponde con la solución periódica.

La explicación de la prueba de este lema la encontramos en [16].

Ejemplo 6. Consideremos en \mathbb{R}^2 al sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

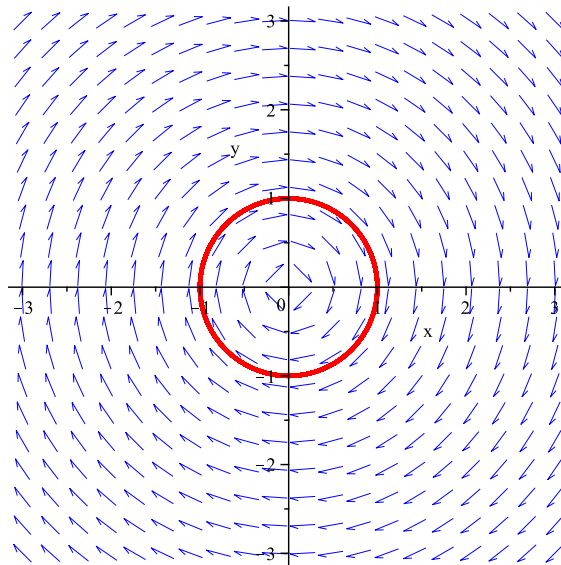


Figura 1.2: Ciclo límite

Este sistema es conocido como el oscilador armónico. El origen es un punto crítico y el ciclo límite si $x^2 + y^2 = 1$ como se observa en la figura.

Teorema 3. *Sea X un espacio métrico, $x \in X$. Entonces son equivalentes:*

1. x es punto fijo,
2. $\{x\} = \gamma(x)$,
3. $\{x\} = \gamma^+(x)$,
4. $\{x\} = \gamma^-(x)$,
5. $\{x\} = x[a, b]$ para algún $a < b$,
6. Sea $\{t_n\}$ una sucesión positiva, es decir, $t_n > 0$, $t_n \rightarrow 0$ con $x = x(t_n)$ para cada $n \geq 0$.

Para la demostración de este teorema recomendamos al lector ver [1].

Si bien es cierto, como se ha venido planteando la evolución de un sistema dinámico corresponde a trayectorias u órbitas en el espacio fase. En tal sentido, una manera de visualizar cualquier tipo de movimiento, es hacer dicho diagrama, en el que el tiempo queda implícito y cada eje representa una dimensión del estado.

Para complementar la información anterior se incluirá la próxima definición:

Definición 9. *Sea X un espacio métrico. Definamos las siguientes aplicaciones:*

1. $\Lambda^+(x) = \{y \in X : \text{dada una sucesión } \{t_n\} \text{ en } \mathbb{R} \text{ con } t_n \rightarrow +\infty \text{ y } x(t_n) \rightarrow y\}$,
2. $\Lambda^-(x) = \{y \in X : \text{dada una sucesión } \{t_n\} \text{ en } \mathbb{R} \text{ con } t_n \rightarrow -\infty \text{ y } x(t_n) \rightarrow y\}$.

Para algún $x \in X$, el conjunto $\Lambda^+(x)$ es llamado ω -límite y el conjunto $\Lambda^-(x)$ es llamado α -límite.

El siguiente sistema nos permite observar los conjuntos mencionados anteriormente.

Ejemplo 7. *Considere el sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + 0,7x, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

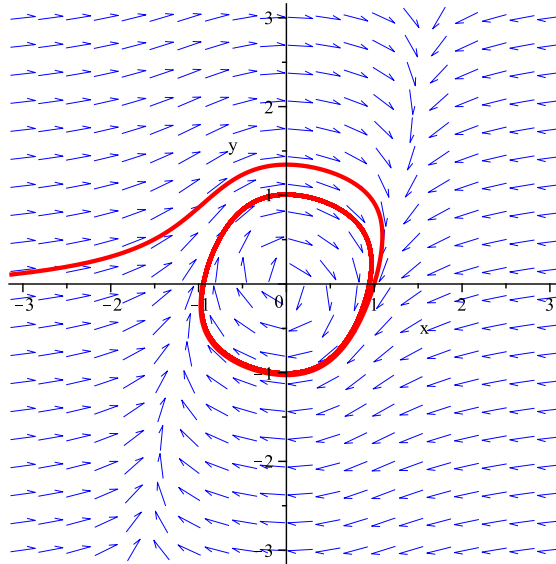


Figura 1.3: Conjuntos α -límite y ω -límite

- *Conjunto ω -límite*

$$\Lambda^+(x, y) = \{(0, 0)\}.$$

- *El conjunto α -límite es la trayectoria cerrada que observamos en la figura 1.3.*

Teorema 4. $\Lambda^+(x) = \gamma^+(x)$ si, y sólo si, x es un punto periódico.

Una demostración de este teorema puede ser encontrada en [1].

Por otra parte, como conjunto límite tenemos al atractor, éste es el conjunto al que el sistema evoluciona después de un tiempo lo suficientemente largo. Para que el conjunto sea un atractor, las trayectorias que le sean lo suficientemente próximas han de

permanecer próximas incluso si son ligeramente perturbadas. De una forma más formal se tiene la próxima definición de atractor:

Definición 10. Dado M un subconjunto compacto, no vacío de X espacio métrico. El conjunto

$$A(M) = \{x \in X : \Lambda^+ \neq \emptyset \text{ y } \Lambda^+ \subset M\}$$

es un atractor si es un entorno de M .

Ejemplo 8.

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r), \\ \dot{\theta} = \text{sen}^2(\theta/2). \end{cases}$$

Este sistema posee dos puntos críticos $P_1 = (0, 0)$ y $P_2 = (1, 0)$. Existe una trayectoria γ como un único ciclo con $\{P_2\}$. Además tenemos que $\{P_2\}$ es un atractor. Para el punto $P = (r, \theta) \neq P_1$ se tiene que $\Lambda^+(P) = \{P_2\}$.

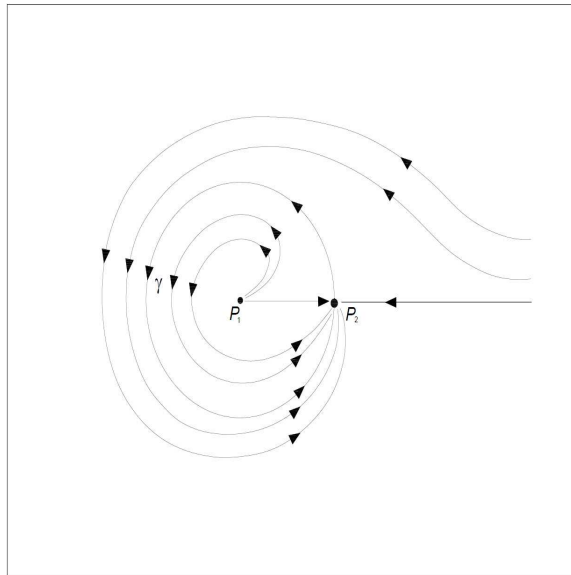


Figura 1.4: Atractor

Ahora presentaremos la noción de conjuntos invariantes y conjunto minimal, para así, seguir planteando las propiedades de los sistemas dinámicos.

Definición 11. *Considere la ecuación (1.1) en $D \subset \mathbb{R}^n$. El conjunto $M \subset D$ un subconjunto no vacío, es llamado invariante si la solución $x(t)$ con $x(0) \in M$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Además si $t \in \mathbb{R}^+$ entonces el conjunto es positivamente invariante y si $t \in \mathbb{R}^-$, M es llamado negativamente invariante.*

Teorema 5. *Para algún $x \in X$ se tiene:*

1. $\Lambda^+(x)$ y $\Lambda^-(x)$ son conjuntos invariantes.
2. $\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup \Lambda^+(x)$ y $\overline{\gamma^-(x)} = \gamma^-(x) \cup \Lambda^-(x)$.

Ver [1] para detalles de la demostración de este teorema.

Ejemplo 9. *El siguiente sistema posee un conjunto invariante que posee más de una trayectoria. Considere el sistema diferencial en \mathbb{R}^2 .*

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1-r) & , \\ \dot{\theta} &= \begin{cases} \text{sen}^2(\theta) + \frac{1}{\log 3} & \text{si } 0 < r \leq \frac{3}{4}, \\ \text{sen}^2(\theta) + \frac{1}{\log \frac{r}{1-r}} & \text{si } \frac{3}{4} < r < 1, \\ \text{sen}^2(\theta) & \text{si } r = 1, \\ \text{sen}^2 + \frac{1}{\log \frac{r}{r-1}} & \text{si } r > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Este sistema posee tres puntos críticos el origen, $A = (1, 0)$ y $B = (1, \pi)$. De allí, obtenemos las siguientes semitrayectorias:

- $\gamma_1 = \{(1, \theta) : 0 < \theta < \pi\}$.
- $\gamma_2 = \{(1, \theta) : \pi < \theta < 2\pi\}$.

Además se tienen los siguientes conjuntos límites para $P = (r, \theta)$:

- Con $r \neq 0, r \neq 1$ se forman trayectorias espirales.
- Con $0 < r < 1$ se tiene $\Lambda^+(P)$ es un ciclo límite y $\Lambda^-(P) = \{0\}$.
- Con $r > 1$ se tiene $\Lambda^+(P)$ es un ciclo límite.
- Si $P = (1, \theta)$ con $0 < \theta < \pi$ se tiene $\Lambda^+(P) = \{B\}$ y $\Lambda^-(P) = \{A\}$. Mientras que con $\pi < \theta < 2\pi$, $\Lambda^+(P) = \{A\}$ y $\Lambda^-(P) = \{B\}$.

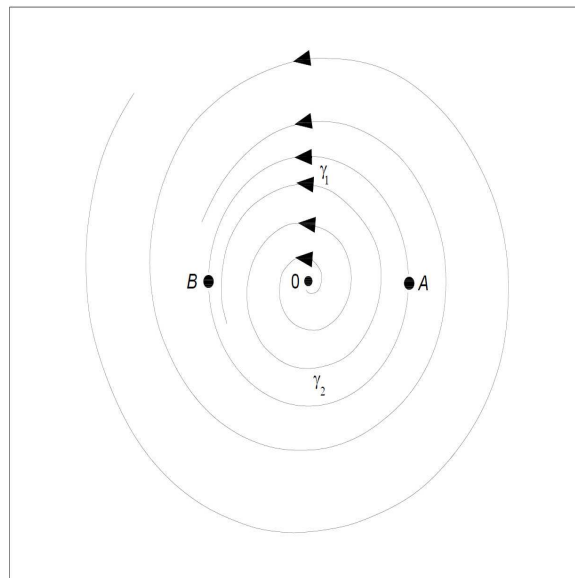


Figura 1.5: Plano fase

Definición 12. Un conjunto $M \subset X$ es llamado minimal, si este es no vacío, cerrado, invariante y sí M no posee un subconjunto que cumpla estas tres propiedades.

Teorema 6. Sea $M \subset X$ no vacío y compacto. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1. M es minimal,
2. $\overline{\gamma(x)} = M$ para todo $x \in M$,
3. $\overline{\gamma^+(x)} = M$ para todo $x \in M$,
4. $\overline{\gamma^-(x)} = M$ para todo $x \in M$,
5. $\Lambda^+(x) = M$ para todo $x \in M$,
6. $\Lambda^-(x) = M$ para todo $x \in M$.

Un punto en reposo y una trayectoria periódica son ejemplos de conjuntos compactos minimales.

Teorema 7. *Supongamos que A es un subconjunto no vacío, compacto e invariante de la ecuación (1.1) entonces existe un conjunto minimal $M \subset A$.*

Ejemplo 10.

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r), \\ \dot{\theta} = \text{sen}^2(\theta) + (1-r)^3. \end{cases}$$

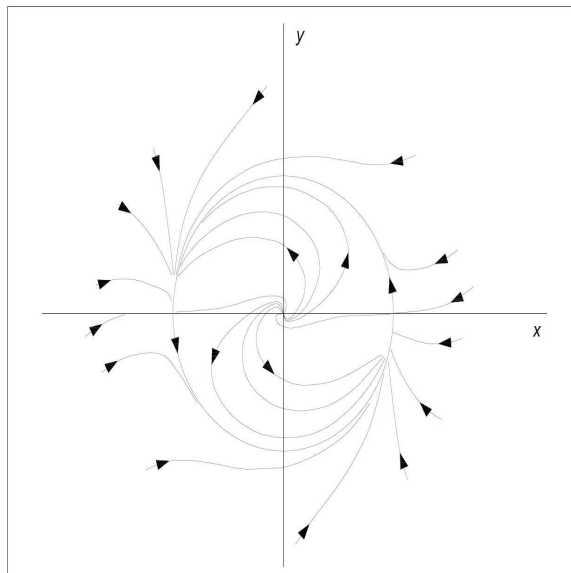


Figura 1.6: Plano fase

El origen y el ciclo $\{r = 1\}$ son conjuntos invariantes, además el ciclo $\{r = 1\}$ es un ω -límite para toda órbita que comienza fuera del origen y del ciclo. Mientras que el conjunto invariante $\{r = 1\}$ consta de cuatro órbitas dadas por $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $0 < \theta < \pi$ y $\pi < \theta < 2\pi$. Finalmente el conjunto ω -límite tiene dos conjuntos minimales, los puntos: $\{r = 1, \theta = 0\}$ y $\{r = 1, \theta = \pi\}$.

1.3 Interpretación geométrica de la estabilidad del ciclo límite

Los ciclos límites estables son muy importantes tanto en ingeniería como en las ciencias, para avalar mejor esto tenemos como ejemplos que la generación de electricidad no podría darse sin ellos, el bombeo periódico del corazón depende del sistema de realimentación que mantiene constante el latido cardíaco. También son importantes en los mecanismos de locomoción en humanos y animales.

El siguiente teorema, el cual es conocido como Teorema de la Curva de Jordan, fue enunciado por Camille Jordan, matemático francés, a finales del siglo XIX en una serie de libros denominada Cours d'Analyse. El mismo Jordan publicó en dicha serie una demostración del resultado que más tarde resultó ser incorrecta. La primera demostración correcta del resultado apareció en 1905 y se debe a Oswald Veblen.

Más adelante L. Brouwer propuso una generalización n -dimensional que fue probada por Alexander en 1922 y que se conoce en la actualidad como Teorema de Separación de Jordan-Brouwer.

Teorema 8 (Curva de Jordan). *Una curva C simple y cerrada en \mathbb{R}^2 separa a \mathbb{R}^2 en dos componentes conexas, una acotada, la cual se llama interior de la curva, y la otra no acotada, la cual es el exterior de la curva.*

Para más detalles del Teorema de la Curva de Jordan ver [12]. En la sección anterior fue dada la definición de ciclo límite, pero una vez planteado todo lo anterior y dado el Teorema de la Curva de Jordan podemos dar la siguiente definición de dicho ciclo, que es fundamental para el estudio de los sistemas dinámicos.

Definición 13. *Una órbita periódica Γ es llamada ciclo límite si para dos puntos en \mathbb{R}^2 , uno está en el interior de Γ y el otro está en el exterior, tal que los conjuntos α -límites ó ω -límites de la órbita a través de esos puntos es periódica.*

Definición 14. *Dada C una órbita.*

1. *Si todas las trayectorias, tanto exteriores como interiores, que salen de las proximidades de una órbita C , se acercan a C cuando $t \rightarrow +\infty$, el ciclo límite se dice estable.*
2. *Si todas las trayectorias cuyo origen se halla próximo a C , se acercan a C cuando $t \rightarrow -\infty$, el ciclo límite es completamente inestable.*
3. *Si las trayectorias interiores se aproximan sobre C para $t \rightarrow +\infty$ y las exteriores lo hacen para $t \rightarrow -\infty$, o inversamente, se dice que C es semiestable.*

En el plano fase del sistema (1.1) se tiene que alrededor de una trayectoria cerrada C , la cual corresponde a un ciclo límite, no hay trayectorias cerradas, que correspondan a soluciones periódicas del sistema. Un ciclo límite divide al plano fase en dos regiones: una interna y otra externa. Recordemos que por el Teorema de Existencia y Unicidad (TEU) de las soluciones de un sistema del tipo (1.1) y por el Teorema de la Curva de Jordan, sus trayectorias no pueden cortarse.

En tal sentido, cada trayectoria distinta de C deberá ser o bien interior o bien exterior al ciclo límite. Todas las trayectorias interiores o exteriores que parten de puntos próximos a C se arrollarán en espiral sobre C , ya sea cuando $t \rightarrow \infty$ ó $t \rightarrow -\infty$.

Ejemplo 11 (Ciclo límite estable).

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Es fácil ver que tiene un único punto crítico en $(0, 0)$. La evolución de las trayectorias, en función del tiempo, convergen al ciclo límite, correspondiente a $x^2 + y^2 = 1$, para las condiciones iniciales tanto interiores y exteriores las trayectorias se acercan al ciclo límite.

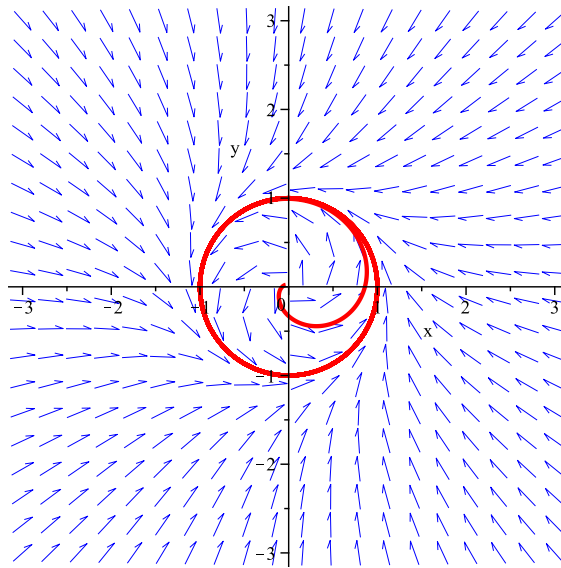


Figura 1.7: Ciclo límite estable

Ejemplo 12 (Ciclo límite inestable).

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + 2x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = x + 2y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$$

En la figura se muestra el plano fase del sistema anterior, donde puede apreciarse que las trayectorias se alejan del ciclo límite, que corresponde a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, acercándose al punto crítico $(0, 0)$ para condiciones iniciales cercanas al ciclo límite, pero interiores a él, mientras que las trayectorias que parten de condiciones iniciales exteriores a él, se alejan hacia el infinito. El ciclo límite es, en este caso, inestable.

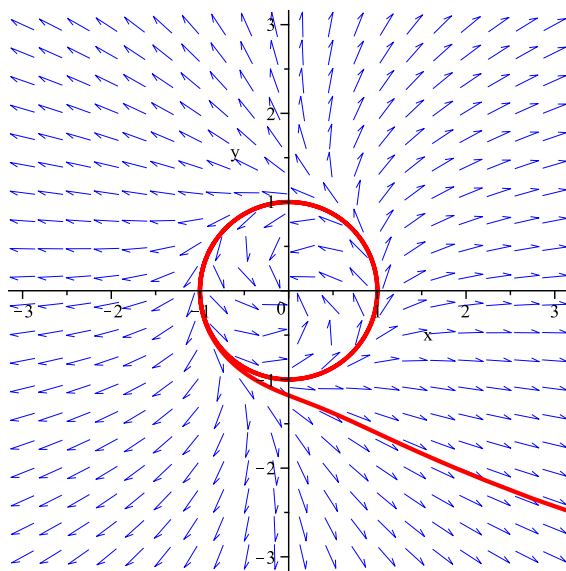


Figura 1.8: Ciclo límite inestable

Ejemplo 13 (Ciclo límite semi-estable).

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + 2x(x^2 + y^2 - 1)^2, \\ \dot{y} = x + 2y(x^2 + y^2 - 1)^2. \end{cases}$$

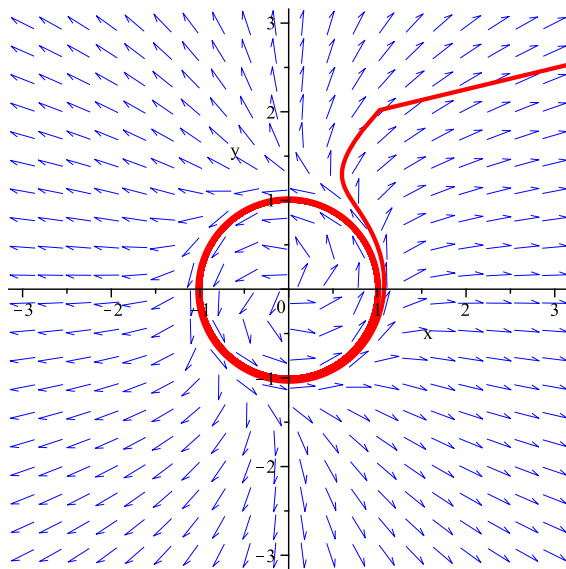


Figura 1.9: Ciclo límite semiestable

Nuevamente es $(0,0)$ un punto crítico. Observamos en este caso que las trayectorias que parten de condiciones iniciales interiores a C convergen hacia él cuando $t \rightarrow \infty$, pero no lo cruzan, mientras que las trayectorias que tienen condiciones iniciales exteriores a C se alejan de él. Este hecho indica que C si bien es un ciclo límite, es semi-estable.

1.4 Teorema de Poincaré-Bendixson

El Teorema de Bendixson y el Teorema de Poincaré-Bendixson predicen la inexistencia o existencia, respectivamente, de los ciclos límite de sistemas dinámicos no lineales en dos dimensiones.

En tal sentido, el teorema de Poincaré-Bendixson es una declaración sobre el comportamiento a largo plazo de las órbitas de los sistemas dinámicos, el mismo establece que cualquier órbita que se queda en una región compacta del espacio de estado de un plano, cuyos puntos fijos son aislados, se acerca a su conjunto ω -límite y si se aleja, éste se llama α -límite.

Una versión más débil del teorema fue originalmente concebido por Henri Poincaré, a pesar de que carecía de una prueba completa. Ivar Bendixson (1901) dio una demostración rigurosa del teorema completo en Acta Mathematica en 1901.

Considere el sistema autónomo en el plano:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.3)$$

Con $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas.

Teorema 9 (Criterio de Bendixson). *Suponga que el dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, f y g continuamente diferenciable en D . El sistema (1.3) puede tener solución*

periódica si $\nabla(f, g)$ cambia de signo en D o si $\nabla(f, g) = 0$ en D .

La explicación de la prueba de este teorema lo encontramos en [7] y [16].

Ejemplo 14. *Considere la ecuación de Van der Pol*

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad \text{con } \varepsilon \text{ positivo.} \quad (1.4)$$

Haciendo el cambio de variable $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$ se llega al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2. \end{cases}$$

Sea $f = x_2$ y $g = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2$, tal que:

$$\nabla(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2}$$

al derivar las funciones el gradiente es $\varepsilon(1 - x_1^2)$, notando el cambio de signo cuando $x = \pm 1$ así que la ecuación de Van der Pol posee solución periódica, por lo tanto posee un ciclo límite por el lema 1.

Consideremos $\varphi(t, x_0)$ la solución del sistema (1.3). Sea Γ una órbita periódica de dicho sistema. En este contexto, definimos la distancia de un punto $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ a la órbita periódica denotada por $dist(\hat{x}, \Gamma)$ como:

$$dist(\hat{x}, \Gamma) \equiv \min\{\|\hat{x} - x\|, \text{ para todo } x \in \Gamma\}.$$

Teorema 10. *Consideremos el sistema (1.3) con un número finito de puntos de equilibrios. Si la órbita positiva γ^+ es acotada, entonces lo siguiente es verdadero:*

1. El conjunto ω -límite es un único punto \hat{x} , el cual es un punto de equilibrio y $\psi(t, x) \rightarrow \hat{x}$ cuando $t \rightarrow +\infty$.
2. $\Lambda^+(x)$ es una órbita periódica Γ y $\gamma^+(x) = \Lambda^+(x) = \Gamma$ y además $\gamma^+(x)$ es una espiral con tiempo creciente hacia Γ sobre una parte de Γ .

3. $\Lambda^+(x)$ consiste de puntos de equilibrios y órbitas cuyos conjuntos α -límite y ω -límite son puntos de equilibrios.

Teorema 11 (Poincaré-Bendixson). *Considere la ecuación (1.1) en \mathbb{R}^2 . Sea γ^+ una órbita positiva y acotada. $\Lambda^+(\gamma^+)$ no contiene puntos de equilibrios. Entonces $\Lambda^+(\gamma^+)$ es una órbita periódica. Si $\Lambda^+(\gamma^+) = \gamma^+$ la órbita periódica es llamada ciclo límite. Un análogo resultado es válido para una órbita negativa y acotada.*

La prueba de estos teoremas lo encontramos en [5] y [16]. La finalidad de usar el teorema de Poincaré-Bendixson es conseguir la existencia de una órbita periódica no trivial. Otra versión clásica del Teorema de Poincaré-Bendixson es la siguiente:

Teorema 12. *Suponga que*

1. R es un subconjunto cerrado y acotado del plano,
2. $\dot{x} = f(x)$ es un campo vectorial continuamente diferenciable en un conjunto abierto que contiene a R ,
3. R no contiene ningún punto fijo,
4. Existe una trayectoria C confinada en R , es decir, empieza en R y permanece en R para todo tiempo.

Entonces C es una órbita cerrada, o tiende en forma de espiral a una órbita cerrada. En cualquier caso R contiene una trayectoria cerrada.

1.4.1 Aplicación del Teorema de Poincaré-Bendixson

En la figura (1.10) se representa a R con forma de anillo, pues no tiene puntos fijos, pero sabemos que toda trayectoria cerrada debe encerrar un punto fijo. Para la aplicación del teorema, la condición 4 es la más difícil de verificar, las otras son directas. Para garantizar la existencia de una trayectoria confinada se definen líneas rodeando a

R , es decir que el campo vectorial apunte hacia el interior de R por todo el contorno. Hay que garantizar también que no hay puntos fijos en R .

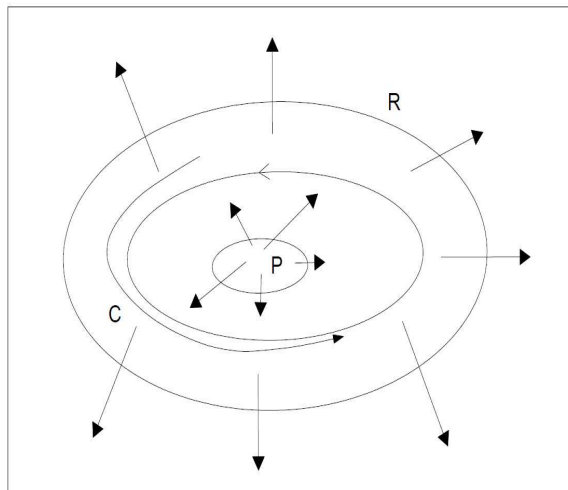


Figura 1.10: Región del Teorema de Poincaré

Imposibilidad de Caos en 2D.

- El Teorema de Poincaré-Bendixson implica que en el plano no puede haber caos. Una trayectoria confinada a una región cerrada y acotada que no tiene puntos fijos debe eventualmente acercarse a una trayectoria cerrada. No es posible nada más complicado.
- Para dimensión 3 o más, una trayectoria puede permanecer divagando en una región cerrada y acotada que no tiene puntos fijos sin ser una trayectoria cerrada.

Para complementar las aplicaciones del Teorema de Poincaré-Bendixson observemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 15.

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos(\theta), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

- Cuando $\mu = 0$, en $(0,0)$ se tiene un punto crítico que se comporta como un conjunto α -límite y en $r = 1$, es decir, $x^2 + y^2 = 1$ en coordenadas cartesianas, hay un ciclo límite que a su vez es un conjunto ω -límite. Observe la siguiente figura:

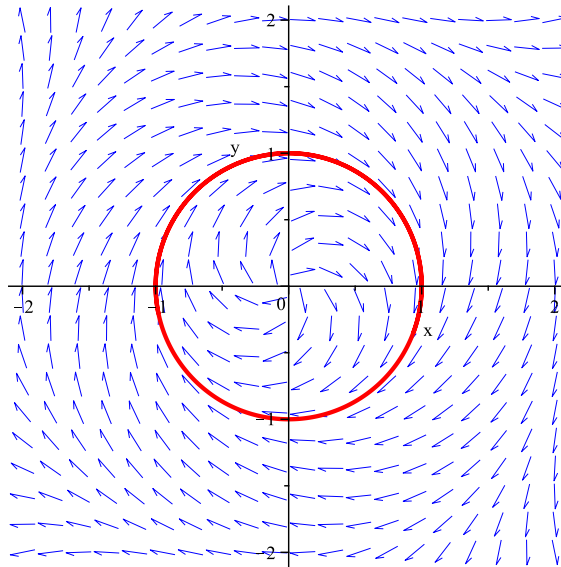


Figura 1.11: Plano fase

Se quiere aplicar el Teorema de Poincaré-Bendixson para $\mu > 0$, aunque pequeño.

- Se buscan círculos concéntricos de radios r_{min} y r_{max} de tal manera que $\dot{r} > 0$ en el círculo interior y $\dot{r} < 0$ en el exterior. Por lo tanto el anillo será la región de confinamiento.
- No hay puntos fijos en el anillo pues $\dot{\theta} > 0$.
- Para determinar r_{min} se requiere que $\dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos(\theta) > 0$ para todo θ . Así que $r_{min} < \sqrt{1 - \mu}$. Suponiendo que $\mu < 1$. Por ejemplo $r_{min} = 0,999\sqrt{1 - \mu}$
- Usando un argumento similar $r_{max} = 1,001\sqrt{1 + \mu}$

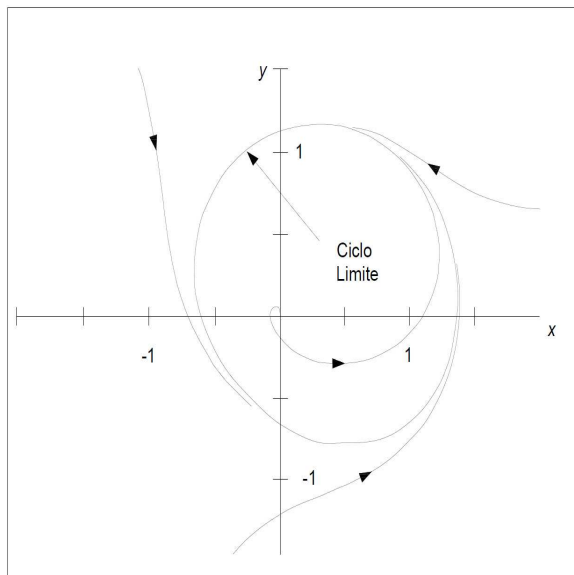


Figura 1.12: Ciclo límite. Conjuntos α -límite y ω -límite del sistema (15).

Ejemplo 16.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 + y^2 - x - 2) - y, \\ \dot{y} = y(x^2 + y^2 - x - 2) + x. \end{cases}$$

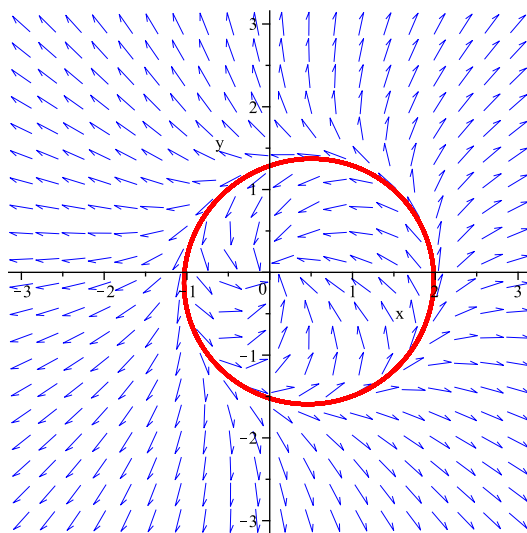


Figura 1.13: Ciclo límite. Conjuntos α -límite y ω -límite

En la figura se muestra un ciclo límite inestable. Aplicando el Teorema de Poincaré-Bendixson para conseguir la región R se debe considerar $0 < r_{\min} < 1$ y $r_{\max} > 2$, pero finito, tal que ésta región formada por los radios contenga al ciclo límite que se observa en la figura anterior. Además, la órbita cerrada es un α -límite y el origen ω -límite, ambos conjuntos invariantes por el teorema 5.

Ejemplo 17.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 + y^2). \end{cases}$$

En la siguiente figura, se muestra que existe una solución periódica y es el ciclo límite $x^2 + y^2 = 1$, el cual es un ciclo límite estable.

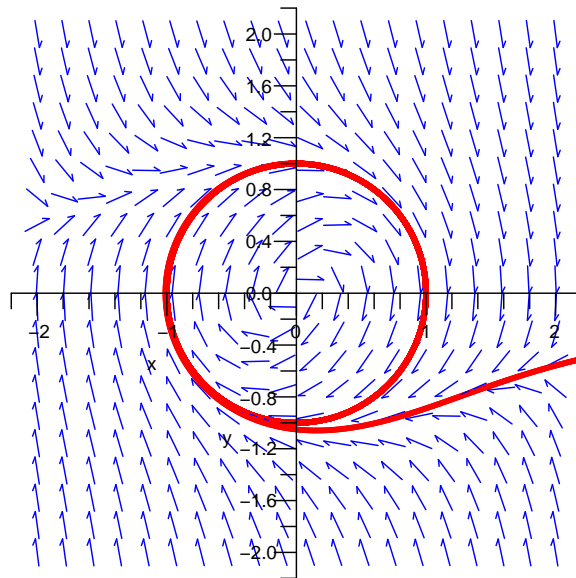


Figura 1.14: Ciclo límite. Conjuntos α -límite y ω -límite

Nótese que el Teorema de Poincaré-Bendixson y el Teorema de Bendixson sólo proporcionan la existencia de los ciclos límites, más no aseguran la estabilidad e inestabilidad del sistema que se desee investigar; por tal razón a continuación se presentará una sección que satisfecerá tal condición con el Teorema de Liénard.

1.5 Teorema de Liénard

En el estudio de sistemas dinámicos y ecuaciones diferenciales, la ecuación Liénard es un cierto tipo de ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, que debe satisfacer ciertas condiciones establecidas por el francés Alfred Marie Liénard.

Liénard(1869-1958) fue un físico e ingeniero que trabajó en los campos de la electricidad, el magnetismo, y la mecánica. Uno de sus trabajos más importantes es el Potencial Liénard-Wiechert, este potencial describe el efecto electromagnético clásico del movimiento de la carga del punto eléctrico en términos de un potencial vector y potencial escalar.

Así como también investigó los problemas relacionados con la elasticidad y la resistencia de los materiales, y escribió artículos sobre la termodinámica y la hidrodinámica. Por otra parte, durante el desarrollo de la radio que empleaban tubos de vacío, la ecuación de Liénard fue intensamente estudiada, ya que puede ser utilizada para modelar los circuitos oscilantes, ésta apareció como una generalización del Oscilador de Van der Pol en 1928. Bajo ciertas suposiciones adicionales el Teorema de Liénard garantiza la existencia de un ciclo límite orbitalmente asintóticamente estable para dicho sistema. Para comenzar se dará la siguiente definición:

Definición 15. Sean f y g dos funciones continuamente diferenciables en \mathbb{R} , con g una función impar y f una función par, entonces la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden de la siguiente forma:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (1.5)$$

se llama **ecuación de Liénard**.

Ésta ecuación puede ser transformada en un equivalente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, haciendo $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ para $x \in \mathbb{R}$, se obtiene:

$$\ddot{x} + \dot{F}(x) + g(x) = 0.$$

luego a través del cambio $\dot{x} + F(x) = y$, nos resulta:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -g(x), \end{cases}$$

este sistema es conocido como **sistema de Liénard**.

Para enunciar el Teorema de Liénard debemos comprender las siguientes definiciones:

Definición 16. Una órbita periódica Γ del sistema (1.3) se dice que es *orbitalmente estable* si, para algún $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si la $\text{dist}(x_0, \Gamma) < \delta$ entonces la $\text{dist}(\varphi(t, x_0), \Gamma) < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$. La órbita Γ se dice *orbitalmente inestable* si no es orbitalmente estable.

Definición 17. Una órbita periódica Γ del sistema (1.3) se dice que es *orbitalmente asintóticamente estable* si esta es orbitalmente estable y, adicionalmente, existe $b > 0$ tal que si la $\text{dist}(x_0, \Gamma) < b$ entonces la $\text{dist}(\varphi(t, x_0), \Gamma) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Ejemplo 18. El siguiente sistema plano posee órbitas periódicas orbitalmente asintóticamente estables.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -0,05(1 - x_1^2 - x_2)x_2 - x_1. \end{cases}$$

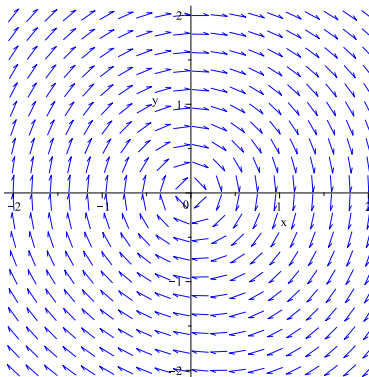


Figura 1.15: Soluciones periódicas orbitalmente asintóticamente estables

En [4] se puede conseguir más información acerca de la estabilidad orbital.

Teorema 13 (Liénard). *Consideremos la ecuación de Liénard*

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

donde

1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas y g es Lipschitz en todo intervalo acotado.
2. $f(z) < 0$ para $z_1 < z < z_2$ y $f(z) > 0$ para $z < z_1$ y $z > z_2$ siendo $z_1 < 0 < z_2$.
3. $zg(z) > 0$ para $z \neq 0$.
4. Si $G(z) = \int_0^z g(s)ds$ se tiene que $G(z_1) = G(z_2)$.

Entonces toda solución periódica de la ecuación de Liénard es orbitalmente asintóticamente estable.

En [16] se ubican los detalles de la demostración del teorema anterior, sólo para el caso de $g(x) = x$. Más adelante, en el próximo capítulo, veremos que ese es el caso que nos interesa en este T.E.G. Finalmente, en este capítulo se presentará el método del average, que servirá para calcular el ciclo límite de la ecuación de Van der Pol.

1.6 Método del Average en el caso periódico

El método del average consiste en reemplazar un campo vectorial (sobre el tiempo o una variable angular) con la meta de obtener aproximaciones asintóticas del sistema original y de obtener soluciones periódicas. La idea del average como una técnica computacional, sin prueba y sin validez apareció en 1788 por Lagrange. Aunque en 1920 Van der Pol promovió el uso del método para las ecuaciones surgiendo en la teoría del circuito

electrónico. Sólo en 1928 la primera prueba de validez asintótica del método fue dada por Fatou.

Considere la ecuación:

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon) \text{ con } x \in D \subset \mathbb{R}^n,$$

donde D es un conjunto compacto de \mathbb{R}^n , el parámetro ε es muy pequeño y positivo y $f : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, una función diferenciable respecto a todas las variables y es T -periódica en t .

El average viene dado por:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, s) ds.$$

Luego la ecuación averageada viene dada por:

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y).$$

CAPÍTULO 2

Ciclo límite de la ecuación Van der Pol

En este capítulo, se presentará la aplicación, en gran parte, de la teoría dada en el capítulo anterior, a la ecuación de Van der Pol. Primero se dará una breve introducción de Balthazar Van der Pol, el creador de ésta ecuación y luego se colocarán secciones que presentarán, básicamente, el estudio de la ecuación a través del ciclo límite de la misma.

2.1 Balthazar Van der Pol

Balthazar Van der Pol (1889-1959). De origen holandés, fue un físico e ingeniero eléctrico que inició la dinámica moderna experimental en Gran Bretaña durante los años 1920 y 1930. Investigó los circuitos eléctricos que emplean los tubos de vacío y encontró que tienen oscilaciones estables, que ahora se llaman *ciclos límites*.

Van Der Pol completó su tesis doctoral “*El efecto de un gas ionizado en la electro-propagación de la onda magnética y su aplicación a la radio*” y lo presentó a la Universidad de Utrecht. Fue galardonado con el grado de Doctor en Ciencias (con honores) en dicha universidad el 27 de abril de 1920. Posteriormente en el año 1922

realizó diversos trabajos de investigación en los laboratorios Philips, donde desarrolló su Teoría de Relajación de Oscilación. Este mismo año participó en diversos proyectos de la radiación de rayos X para la recepción de radio.

Más tarde se convirtió en Director de la Radio de Investigación Científica. En 1927 fue nombrado Caballero de la Orden de Oranje Nassau para el establecimiento de la primera radio-comunicación telefónica entre los Países Bajos y las Indias Orientales Holandesas. En septiembre de 1927 en la revista británica "Nature", él y su colega Van der Marcos informaron de que un "ruido irregular", se escucharon en determinadas frecuencias de conducción entre el arrastre natural de frecuencias. Por la reconstrucción del tubo de circuito electrónico, hoy en día sabemos que habían descubierto el caos determinista. Su papel es probablemente uno de los primeros informes experimentales del caos.

Construyó una serie de modelos de circuitos electrónicos del corazón humano para estudiar el rango de estabilidad de la dinámica del corazón. Sus investigaciones con la adición de una señal externa de conducción son análogas a la situación en la que un corazón real está impulsado por un marcapasos. Él estaba interesado en averiguar, mediante su labor de arrastre, la forma de estabilizar una situación irregular del corazón o las pulsaciones, el nombre de van der Pol está asociado con la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Finalmente la *ecuación de Van der Pol* describe el comportamiento de circuitos electrónicos no lineales como los que fueron usados en los primeros aparatos de radio en la década de 1920.

2.2 Ecuación de Van der Pol

El oscilador de Van der Pol modela un circuito eléctrico apareció en su artículo “Relaxation-Oscillations”, publicado en la revista Philosophical Magazine en 1926, con particularidad es el uso de tubos de vacíos, estos actúan como una resistencia normal cuando la corriente es elevada, y como una resistencia “negativa” cuando la corriente es baja.

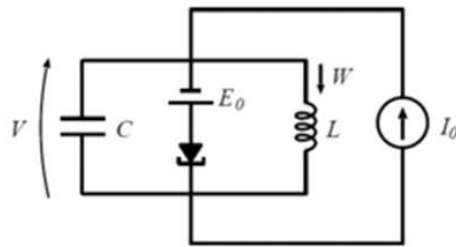


Figura 2.1: Circuito eléctrico de la Ecuación de Van der Pol

La ecuación modela un circuito de serie RLC, el cual consta de tres ramas: una *resistencia* (R), un *inductor* (L) y un *condensador* (C); por las cuales circula la corriente de la misma intensidad, en nuestro caso éstas se representan, respectivamente, por $i = (i_R, i_L, i_C) \in \mathbb{R}^3$. Veamos el siguiente diagrama, del cual se utilizará el sentido de las intensidades de corriente y el voltaje, para aplicar ciertas leyes físicas.

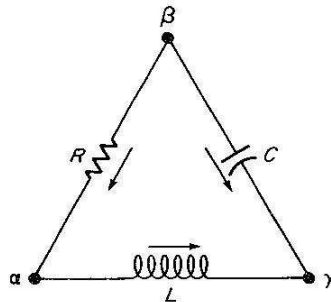


Figura 2.2: Diagrama del circuito del Oscilador de Van der Pol

Por la Ley de Kirchhoff de la Corriente (LKC) se tiene que “la suma de las intensidades de corriente que llegan a un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen de él”, donde nodo es lo que se denomina como el punto de la red o circuito donde concurren dos o más ramas, en virtud a esto, una rama puede considerarse como la unión entre dos o más nodos. En fin KCL a través del sentido de las flechas en la figura (2.2) se obtiene que:

$$i_R = i_L = -i_C, \quad (2.1)$$

esto define un subespacio unidimensional $W \subset \mathbb{R}^3$. Luego usando la Ley de Kirchhoff para el Voltaje (LKV), la cual establece que “la suma algebraica de la diferencia de los cambios de potencial a través de todos los elementos alrededor de cualquier circuito cerrado debe ser cero”, se tiene lo siguiente:

$$v_R + v_L - v_C = 0. \quad (2.2)$$

Lo anterior define un subespacio unidimensional $E \subset \mathbb{R}^3$. Así,

$$v = (v_R, v_L, v_C) \in \mathbb{R}^3.$$

Por otra parte usando la Ley de Ohm Generalizada (LOG) se obtiene la función F de clase C^1 conocida como “característica de la resistencia”:

$$F(i_R) = v_R. \quad (2.3)$$

Sea el par $(i, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathcal{S}$ tal que en este espacio definimos:

$$t \rightarrow (i(t), v(t)).$$

Mientras que por la Ley de Faraday se tiene que “el voltaje inducido en un circuito cerrado es directamente proporcional a la rapidez con que cambia en el tiempo...”, expresando esto en forma de ecuación se llega a:

$$L \frac{di_L(t)}{dt} = v_L(t), \quad (2.4)$$

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = i_C(t). \quad (2.5)$$

L y C son constantes positivas. Hemos venido observando que el estado del circuito es dado por (i, v) que es un elemento de \mathcal{S} . Por medio de las restricciones dadas por: (2.1), (2.2) y (2.3). De las cuales desprendemos lo siguiente:

Por LKC:

$$\begin{cases} i_R = i_L, \\ i_C = -i_L. \end{cases}$$

Por LOG:

$$v_R = F(i_R) = F(i_L).$$

Por LKV:

$$v_L = v_C - v_R = v_C - F(i_L).$$

Llegando al siguiente sistema, usando lo anterior, (2.4) y (2.5).

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt}(t) = v_L(t) = v_C - F(i_L), \\ C \frac{dv_C}{dt}(t) = i_C(t) = i_C = -i_L. \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt}(t) = v_C - F(i_L), \\ C \frac{dv_C}{dt}(t) = -i_L. \end{cases}$$

Haciendo $t \longrightarrow (CL)^{1/2}$ y con el cambio de variable $y \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2} = v_C$ y $x = i_L$ se obtiene el próximo sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2} F(x), \\ \frac{dy}{dt} = -x, \end{cases} \quad (2.6)$$

este sistema es equivalente a la siguiente ecuación

$$\ddot{x} + \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2} f(x)\dot{x} + x = 0, \quad (2.7)$$

con $F(x) = \int_0^x f(s)ds$.

Si f y g son funciones continuamente diferenciable en \mathbb{R} , y además f una función par y g una función impar, entonces la ecuación (2.7) es considerada como la ecuación de Liénard, y, por lo tanto, el sistema (2.6) es conocido como el sistema de Liénard; tal como lo establecimos en la sección 1.5.

En tal sentido, considerando la ecuación de Van der Pol

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad \text{con } \varepsilon \text{ positivo.}$$

Haciendo la analogía con la ecuación (2.7) se tiene que para $\varepsilon = (\frac{L}{C})^{1/2}$, positivo, además las funciones $f(x) = -(1 - x^2)$ y $g(x) = x$ claramente son continuamente diferenciable en \mathbb{R} . Ahora, veamos que f y g son funciones par e impar respectivamente.

- $f(-x) = -(1 - (-x)^2) = -(1 - x^2) = f(x)$, por lo tanto f es una función par.
- $g(-x) = -x = -g(x)$, por lo tanto g es una función impar.

Obteniendo así que la ecuación de Van der Pol es considerada como una ecuación de Liénard y además es de la forma (2.7), es decir, representa la ecuación del circuito eléctrico de Van der Pol.

2.3 Solución periódica orbitalmente asintóticamente estable

En el *ejemplo* 5 del capítulo anterior obtuvimos, a través del Teorema de Bedixson que la ecuación de Van der Pol posee solución periódica. Ahora, por medio del Teorema de

Liénard expuesto en la sección (1.5), veamos que ésta solución periódica es orbitalmente asintóticamente estable, para esto se verificarán las hipótesis del Teorema de Liénard, no obstante, al final de la sección anterior, probamos ciertas hipótesis que exige dicho teorema sólo nos resta ver las siguientes:

1. Veamos que g es una función Lipschitz (Ver *Definición 13*).

$$\begin{aligned} \|g(x_1) - g(x_2)\| &= \|x_1 - x_2\|, \\ &\leq L \|x_1 - x_2\| \text{ para todo } L \geq 1. \end{aligned}$$

2. Ahora la segunda hipótesis la dividimos en dos partes:

Primero $f(z) < 0$ para $z_1 < z < z_2$?

$$f(z) = -\varepsilon(1 - z^2) < 0,$$

$$\begin{aligned} \text{Si } (1 - z^2) &> 0, \\ 1 &> z^2, \\ z^2 &< 1, \\ z &< \pm 1. \end{aligned}$$

Obteniendo, así que $f(z) < 0$ para $-1 < z < 1$.

Segundo $f(z) > 0$ para $z < z_1$ y $z > z_2$ siendo $z_1 < 0 < z_2$?

$$f(z) = -\varepsilon(1 - z^2) > 0$$

$$\begin{aligned} \text{Si } (1 - z^2) &< 0, \\ 1 &> z^2, \\ z^2 &> 1, \\ z &> \pm 1. \end{aligned}$$

Obteniendo, así que $f(z) > 0$ para $z > 1$ y $z < -1$, además se cumple que $-1 < 0 < 1$.

3. Ahora nos toca ver si $zg(z) > 0$ para $z \neq 0$. Donde $zg(z) = z^2$, claramente, es positiva para $z \neq 0$.

4. Si $G(z) = \int_0^z g(s)ds$ se tiene que $G(z_1) = G(z_2)$?

En nuestra ecuación

$$\begin{aligned} G(z) &= \int_0^z s \, ds \\ &= \left(\frac{s^2}{2} \right) \Big|_0^z \\ &= \frac{z^2}{2}. \end{aligned}$$

Ahora como $G(z) = \frac{z^2}{2}$ evaluemos $z_1 = -1$ y $z_2 = 1$.

$$\begin{aligned} G(z_1) &= G(-1) \\ &= \frac{(-1)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= G(1) \\ &= G(z_2). \end{aligned}$$

Finalmente se satisfacen las hipótesis del teorema, ya mencionado, así que toda solución periódica de la ecuación de Van der Pol es orbitalmente asintóticamente estable.

2.4 Ciclo límite de la ecuación de Van der Pol

Para la interpretación geométrica del ciclo límite de la ecuación de Van der Pol se deberán realizar diversos cálculos para conseguir el radio del mismo. Para esto se comenzará transformando la ecuación (1.4) en el sistema de Liénard.

Se multiplica la ecuación (1.4) por $\frac{1}{\varepsilon}$,

$$\frac{1}{\varepsilon}\ddot{x} - (1 - x^2)\dot{x} + \frac{x}{\varepsilon} = 0,$$

despejando la ecuación anterior

$$\frac{1}{\varepsilon}\ddot{x} - (1 - x^2)\dot{x} = -\frac{x}{\varepsilon},$$

donde se puede sustituir la siguiente expresión

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\varepsilon} - \left(x - \frac{x^3}{\varepsilon} \right) \right) = \frac{1}{\varepsilon}\ddot{x} - (1 - x^2)\dot{x},$$

llegando así a lo que sigue

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\varepsilon} - \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \right) = -\frac{x}{\varepsilon},$$

ahora haciendo el cambio de variable

$$y = \frac{\dot{x}}{\varepsilon} - \left(x - \frac{x^3}{3} \right),$$

sustituyendo se llega a:

$$\frac{d}{dt}(y) = -\frac{x}{\varepsilon},$$

con $y = x$, tal que $\dot{y} = \dot{x}$, se obtiene al sistema:

$$\begin{cases} \dot{y} = -\frac{x}{\varepsilon}, \\ \dot{x} = \varepsilon \left(y + x - \frac{x^3}{3} \right). \end{cases}$$

a través de un despeje se obtiene un sistema equivalente al anterior:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{y} = -x, \\ \dot{x} = \varepsilon \left(x - \frac{x^3}{3} \right) + \varepsilon y. \end{cases}$$

por medio de un nuevo cambio de variable $-\varepsilon y = w$ tal que $-\varepsilon\dot{y} = \dot{w}$, el sistema nos queda:

$$\begin{cases} \dot{w} = x \\ \dot{x} = -w + \varepsilon \left(x - \frac{x^3}{3} \right). \end{cases} \quad (2.8)$$

este sistema (2.8) es equivalente a la ecuación (1.4). Además es considerado como sistema de Liénard, donde

$$F(x) = \int_0^x -\varepsilon(1 - s^2)ds = -\varepsilon \left(x - \frac{x^3}{3} \right).$$

Por otro lado, para el estudio del sistema (2.8) se comenzará realizando el siguiente cambio a coordenadas polares:

$$u = x \cos(t) + w \operatorname{sen}(t), \quad (2.9)$$

$$v = -x \operatorname{sen}(t) + w \cos(t), \quad (2.10)$$

para despejar a x , w se realizan las siguientes operaciones:

1. Multiplicando a (2.9) por $\cos(t)$ y a (2.10) por $\operatorname{sen}(t)$, luego el resultado de ambas ecuaciones se suman.

$$\begin{cases} u \cos(t) = x \cos^2(t) + w \operatorname{sen}(t) \cos(t) \\ -v \operatorname{sen}(t) = x \operatorname{sen}^2(t) - w \operatorname{sen}(t) \cos(t) \end{cases}$$

$$u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t) = x. \quad (2.11)$$

2. Multiplicando al sistema (2.9) por $\operatorname{sen}(t)$ y a (2.10) por $\cos(t)$, luego el resultado de ambas ecuaciones se suman.

$$\begin{cases} u \operatorname{sen}(t) = x \operatorname{sen}(t) \cos(t) + w \operatorname{sen}^2(t) \\ -v \cos(t) = x \cos(t) \operatorname{sen}(t) - w \cos^2(t) \end{cases}$$

$$u \operatorname{sen}(t) + v \cos(t) = w. \quad (2.12)$$

De (2.11) y (2.12) se obtiene un nuevo sistema:

$$\begin{cases} x = u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t) \\ w = u \operatorname{sen}(t) + v \cos(t), \end{cases} \quad (2.13)$$

ahora derivando al sistema anterior (2.13) se obtiene lo que sigue:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{u} \cos(t) - u \operatorname{sen}(t) - \dot{v} \operatorname{sen}(t) - v \cos(t) \\ \dot{w} = \dot{u} \operatorname{sen}(t) + u \operatorname{sen}(t) + \dot{v} \cos(t) - v \operatorname{sen}(t), \end{cases} \quad (2.14)$$

luego se sustituyen las ecuaciones del sistema (2.14) en (2.8) obteniendo:

$$\begin{aligned} \dot{u} \cos(t) - u \operatorname{sen}(t) - \dot{v} \operatorname{sen}(t) - v \cos(t) &= - (u \operatorname{sen}(t) + v \cos(t)) \\ &+ \varepsilon \left(u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{3} (u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t))^3 \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\dot{u} \operatorname{sen}(t) + u \operatorname{sen}(t) + \dot{v} \cos(t) - v \operatorname{sen}(t) = u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t), \quad (2.16)$$

de (2.16) se tiene que:

$$\dot{u} \operatorname{sen}(t) + \dot{v} \cos(t) = 0,$$

tal que

$$\dot{u} = -\dot{v} \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}, \quad (2.17)$$

se procede a sustituir (2.17) en (2.15) llegando a lo que sigue:

$$\begin{aligned} \dot{v} \frac{\cos^2(t)}{\operatorname{sen}(t)} - u \operatorname{sen}(t) - \dot{v} \operatorname{sen}(t) - v \cos(t) &= - (u \operatorname{sen}(t) + v \cos(t)) \\ &+ \varepsilon \left(u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{3} (u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t))^3 \right), \end{aligned}$$

resolviendo la expresión anterior nos resulta

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos^2(t) - u \operatorname{sen}^2(t) - \dot{v} \operatorname{sen}^2(t) - v \cos(t) \operatorname{sen}(t) &= -u \operatorname{sen}^2(t) - v \operatorname{sen}(t) \cos(t) \\ &+ \varepsilon \operatorname{sen}(t) \left(u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{3} (u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t))^3 \right), \end{aligned}$$

entonces, se eliminan algunos términos quedando de la siguiente forma

$$\dot{v} = -\varepsilon \operatorname{sen}(t) \left(u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{3} (u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t))^3 \right), \quad (2.18)$$

luego se sustituye (2.18) en (2.17)

$$\dot{u} = \varepsilon \operatorname{sen}(t) \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)} \left(u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{3} (u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t))^3 \right),$$

obteniendo que

$$\dot{u} = \varepsilon \cos(t) \left(u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{3} (u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t))^3 \right), \quad (2.19)$$

de (2.18) y (2.19) se llega al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{v} = -\varepsilon \operatorname{sen}(t) \left(u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{3} (u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t))^3 \right), \\ \dot{u} = \varepsilon \cos(t) \left(u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{3} (u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t))^3 \right). \end{cases} \quad (2.20)$$

Nótese que \dot{u} y \dot{v} son ecuaciones diferenciales ordinarias que dependen de un parámetro ε , el cual es positivo y muy pequeño; además la parte derecha de cada ecuación es diferenciable. Consideramos el período $T = 2\pi$, puesto que las ecuaciones están en base a $\cos(t)$ y $\operatorname{sen}(t)$, pudiendo así aplicar el método del average a ambas ecuaciones diferenciales ordinarias.

Utilizando dicho método la ecuaciones quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\dot{u} = \varepsilon^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \left(u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{3} (u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t))^3 \right) dt, \quad (2.21)$$

$$\dot{v} = -\varepsilon^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t) \left(u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{3} (u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t))^3 \right) dt. \quad (2.22)$$

Ahora se trabajarán las ecuaciones por sepadaras para facilidad del lector, primero con (2.21).

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \left(u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{3} (u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t))^3 \right) dt \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(u \cos^2(t) - v \cos(t) \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{3} \cos(t) (u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t))^3 \right) dt \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \left(u \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt - v \int_0^{2\pi} \cos(t) \operatorname{sen}(t) dt - \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos(t) (u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t))^3 dt \right), \end{aligned}$$

se llega a la siguiente expresión

$$\dot{u} = \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \left(u \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt - v \int_0^{2\pi} \cos(t) \operatorname{sen}(t) dt - \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos(t) (u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t))^3 dt \right), \quad (2.23)$$

donde, por comodidad se resolverán las integrales individualmente

1. Veamos que

$$u \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = u\pi. \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} u \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt &= u \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\ &= \frac{u}{2} \left(t + \frac{\text{sen}(2t)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{u}{2} \left(2\pi + \frac{\text{sen}(4\pi)}{2} - \frac{\text{sen}(0)}{2} \right) \\ &= \frac{u}{2} 2\pi \\ &= u\pi. \end{aligned}$$

2. Esta integral trivialmente resulta nula, debido a la periodicidad de $\text{sen}(t)$ y $\cos(t)$

$$v \int_0^{2\pi} \cos(t) \text{sen}(t) dt = 0. \quad (2.25)$$

3. La última integral

$$\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos(t) (u \cos(t) - v \text{sen}(t))^3 dt.$$

aplicando producto notable la integral queda expresada como sigue:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos(t) (u^3 \cos^3(t) - 3u^2 \cos^2(t)v \text{sen}(t) + 3u \cos(t)v^2 \text{sen}^2(t) - v^3 \text{sen}^3(t)) dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (u^3 \cos^4(t) - 3u^2 \cos^3(t)v \text{sen}(t) + 3u \cos^2(t)v^2 \text{sen}^2(t) - v^3 \text{sen}^3(t) \cos(t)) dt. \end{aligned}$$

Para resolver la integral anterior es mas facil resolverla una por una

(a) La primera integral nos queda así:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} u^3 \cos^4(t) dt &= \frac{1}{3} u^3 \int_0^{2\pi} \cos^4(t) dt \\
 &= \frac{1}{3} u^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2} \right)^2 dt \\
 &= \frac{1}{12} u^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2t))^2 dt \\
 &= \frac{1}{12} u^3 \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos(2t) + \cos^2(2t)) dt \\
 &= \frac{1}{12} u^3 \left(\int_0^{2\pi} 1 + 2 \cos(2t) dt + \int_0^{2\pi} \cos^2(2t) dt \right).
 \end{aligned}$$

Continuando con la solución de la integral tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} u^3 \cos^4(t) dt &= \frac{1}{12} u^3 \left(2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(4t)}{2} dt \right) \\
 &= \frac{1}{12} u^3 \left(2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(4t)}{2} dt \right) \\
 &= \frac{1}{12} u^3 \left(2\pi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 + \cos(4t) dt \right) \\
 &= \frac{1}{12} u^3 \left(2\pi + \frac{1}{2} 2\pi \right) \\
 &= \frac{1}{12} u^3 3\pi.
 \end{aligned}$$

Obteniendo que

$$\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} u^3 \cos^4(t) dt = \frac{1}{4} u^3 \pi. \quad (2.26)$$

(b) La siguiente integral es nula debido a la periodicidad de las funciones a integrar

$$\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} -3u^2 \cos^3(t) v \operatorname{sen}(t) dt = 0. \quad (2.27)$$

(c) En la siguiente se utilizarán resultados previos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} 3u \cos^2(t) v^2 \operatorname{sen}^2(t) dt &= uv^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \left(\frac{1 - \cos^2(t)}{2} \right) dt \\ &= \frac{uv^2}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) - \cos^4(t)) dt \end{aligned}$$

Por (2.24) y (2.26) se llega a

$$= \frac{uv^2}{2} \left(\pi - \frac{3}{4}\pi \right).$$

llegando a lo que sigue

$$\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} 3u \cos^2(t) v^2 \operatorname{sen}^2(t) dt = \frac{uv^2\pi}{4}. \quad (2.28)$$

(d) Por último se tiene por la misma razón que en (b) otra integral nula

$$\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} -v^3 \operatorname{sen}^3(t) \cos(t) dt = 0. \quad (2.29)$$

Finalmente de (2.26), (2.27), (2.28) y (2.29) se llega a:

$$\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos(t) (u \cos(t) - v \operatorname{sen}(t))^3 dt = \frac{1}{4} u^3 \pi + \frac{uv^2\pi}{4}. \quad (2.30)$$

Luego la ecuación (2.23) viene dada por sustituir los resultados de las integrales (2.24), (2.25) y (2.30).

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \left(u\pi - \frac{1}{4}u^3\pi - \frac{uv^2\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \pi u \left(1 - \frac{1}{4}(u^2 + v^2) \right) \\ &= \frac{u\varepsilon^2}{2} \left(\frac{4 - u^2 - v^2}{4} \right). \end{aligned}$$

La ecuación averageada (2.23), una vez resuelta las integrales, llega a la siguiente expresión.

$$\dot{u} = \frac{u\varepsilon^2}{8} (4 - (u^2 + v^2)). \quad (2.31)$$

Ahora se trabajará con la ecuación (2.24) para la cual se utilizarán los resultados anteriores de las integrales ya calculadas.

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= -\frac{\varepsilon^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(t) \left(u \cos(t) - v \text{sen}(t) - \frac{1}{3} (u \cos(t) - v \text{sen}(t))^3 \right) dt \\
&= -\frac{\varepsilon^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(u \text{sen}(t) \cos(t) - v \text{sen}^2(t) - \frac{1}{3} (u \cos(t) - v \text{sen}(t))^3 \right) dt \\
&= -\frac{\varepsilon^2}{2\pi} \left(u \int_0^{2\pi} \text{sen}(t) \cos(t) dt - v \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(t) dt - \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \text{sen}(t) (u \cos(t) - v \text{sen}(t))^3 dt \right) \\
&= -\frac{\varepsilon^2}{2\pi} \left(0 - v\pi + \frac{u^2 v \pi}{4} + \frac{v^3 \pi}{4} \right) \\
&= \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \left(-v\pi + \frac{1}{4} u^2 v \pi + \frac{v^3 \pi}{4} \right) \\
&= \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \pi v \left(-1 + \frac{1}{4} (u^2 + v^2) \right) \\
&= \frac{v \varepsilon^2}{2} \left(\frac{4 + u^2 + v^2}{4} \right),
\end{aligned}$$

así la ecuación averageada de (2.24) es dada por:

$$\dot{v} = \frac{v \varepsilon^2}{8} (4 - (u^2 + v^2)). \quad (2.32)$$

Obteniéndose el siguiente sistema con las ecuaciones averageadas (2.31) y (2.32).

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{u \varepsilon^2}{8} (4 - (u^2 + v^2)), \\ \dot{v} = \frac{v \varepsilon^2}{8} (4 - (u^2 + v^2)). \end{cases} \quad (2.33)$$

Haciendo el cambio a coordenadas polares se tiene que $r^2 = u^2 + v^2$, $u = r \cos(\theta)$ y $v = r \text{sen}(\theta)$, así que al sustituir estas ecuaciones en el sistema (2.33), éste queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\varepsilon^2 r \cos(\theta)}{8} (4 - r^2) \\ \dot{v} = \frac{\varepsilon^2 r \text{sen}(\theta)}{8} (4 - r^2). \end{cases} \quad (2.34)$$

Ahora derivando a $r^2 = u^2 + v^2$ se obtiene lo que sigue:

$$2r\dot{r} = 2u\dot{u} + 2v\dot{v}$$

$$r\dot{r} = u\dot{u} + v\dot{v},$$

así que al sustituir las ecuaciones del sistema (2.34) en la ecuación derivada anteriormente se llega a:

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= r \cos(\theta) \frac{\varepsilon^2 r \cos(\theta)}{8} (4 - r^2) + r \operatorname{sen}(\theta) \frac{\varepsilon^2 r \operatorname{sen}(\theta)}{8} (-4 + r^2), \\ r\dot{r} &= \frac{r^2 \varepsilon^2 \cos^2(\theta) (4 - r^2) + r^2 \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2(\theta) (-4 + r^2)}{8}, \\ r\dot{r} &= \frac{r^2 \varepsilon^2}{8} (4 - r^2) (\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)), \end{aligned}$$

finalmente a través del cambio a coordenadas polares la expresión resulta:

$$\dot{r} = \frac{r\varepsilon^2}{8} (4 - r^2), \quad (2.35)$$

veamos cuales son los puntos críticos de (2.35). Esto es haciendo $\dot{r} = 0$, es decir,

$$\frac{r\varepsilon^2}{8} (4 - r^2) = 0,$$

realizando los siguientes cálculos:

$$r = 0 \quad \text{ó} \quad 4 - r^2 = 0,$$

$$r = 0 \quad \text{ó} \quad r^2 = 4,$$

$$r = 0 \quad \text{ó} \quad r = \sqrt{4},$$

por lo tanto, los puntos de equilibrios son: $r = 0$ y $r = 2$; con ellos podemos hallar las siguientes regiones:

1. Región interna

$$\mathbf{R}_1 = \{(r, \theta) \in (0, 2) \times [0, 2\pi]\}.$$

Al tomar un valor de r en esta región veamos si el radio crece o decrece:

Si $r = 1$, entonces

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{\varepsilon^2}{8}(4 - 1^2) \\ \dot{r} &= \frac{3\varepsilon^2}{8} > 0, \text{ pues } \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Así que el radio crece, es decir, $\dot{r} > 0$ en toda la región R_1 .

2. Región externa

$$\mathbf{R}_2 = \{(r, \theta) \in (2, \infty) \times [0, 2\pi]\}.$$

Hagamos el mismo procedimiento para la región \mathbf{R}_2 :

Si $r = 4$, entonces

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{4\varepsilon^2}{8}(4 - 4^2) \\ \dot{r} &= -6\varepsilon^2 < 0, \text{ pues } \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Así que el radio decrece, es decir, $\dot{r} < 0$ en toda la región R_2 .

Finalmente, de las regiones anteriores se consiguen los siguientes conjuntos límites:

- En R_1 .

$$\alpha - \text{limite}(r, \theta) = \{(0, 0)\}.$$

$$\omega - \text{limite}(r, \theta) = \{(r, \theta) : r = 2, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

- En R_2 .

$$\omega - \text{limite}(r, \theta) = \{(r, \theta) : r = 2, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

- Ciclo límite orbitalmente asintóticamente estable, tal como lo establece el Teorema de Liénard es:

$$C = \{(r, \theta)/r = 2, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

- C es una curva de Jordan.

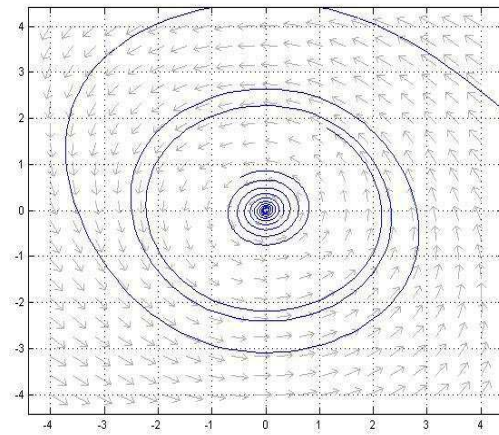


Figura 2.3: Ciclo límite de la ecuación de Van der Pol

CAPÍTULO 3

Método Poincaré-Lindstedt

En el capítulo I demostramos que la ecuación de Van der Pol posee solución periódica, y en el capítulo II, probamos que ésta solución es orbitalmente asintóticamente estable, ahora, en este capítulo encontraremos una aproximación de serie convergente para la solución periódica de dicha ecuación usando el Teorema de Expansión de Poincaré y la periodicidad de la solución. Este método es usualmente llamado Poincaré-Lindstedt o método continuación.

3.1 Expansión de Poincaré

Definición 18. *Considere la función vectorial $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la función $f(t, x, \varepsilon)$ es continua en las variables $t \in \mathbb{R}$ y $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, ε es un parámetro pequeño. La función f puede ser expandida con respecto a ε . En el caso simple que f tiene una expansión de Taylor con respecto a ε cerca de $\varepsilon = 0$ como sigue:*

$$f(t, x, \varepsilon) = f(t, x, 0) + \varepsilon f_1(t, x) + \varepsilon^2 f_2(t, x) + \dots + \varepsilon^n f_n(t, x) + \dots$$

con coeficientes $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ los cuales dependen de t y x . Las expresiones $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n, \dots$ son llamadas funciones de orden.

Definición 19. Se dice que $\delta_1(\varepsilon) = O(\delta_2(\varepsilon))$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ si existe una constante $\kappa > 0$ tal que $\delta_1(\varepsilon) \leq \kappa\delta_2(\varepsilon)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ejemplo 19. Para ε^4 se tiene que $\varepsilon^4 = O(\varepsilon^2)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Ahora para $\text{sen}(\varepsilon)$ se tiene $O(\varepsilon)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Definición 20. $\delta_1(\varepsilon) = o(\delta_2(\varepsilon))$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)} = 0.$$

Definición 21. Considere la función $f(t, x, \varepsilon)$, $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ y las funciones de orden $\delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2(\varepsilon)$; $f(t, x, \varepsilon) = O(\delta_1(\varepsilon))$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ sobre la escala de tiempo $1/\delta_2(\varepsilon)$ si la estimación es válida para $x \in D$, $0 \leq \delta_2(\varepsilon)t \leq C$, con C una constante independiente de ε . Esta definición es análoga para el caso de $o(\delta_2(\varepsilon))$.

Ejemplo 20. Dada $f_1(t, x, \varepsilon) = \varepsilon t \text{sen}(x)$ con $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$; luego $f_1(x, t, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ sobre la escala de tiempo 1, así como también $f_1(t, x, \varepsilon) = O(1)$ sobre la escala de tiempo $1/\varepsilon$.

Definición 22. Considere las funciones $f(t, x, \varepsilon)$, $g(t, x, \varepsilon)$, $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$; $g(t, x, \varepsilon)$ es una aproximación asintótica de $f(t, x, \varepsilon)$ sobre el tiempo escala $1/\delta(\varepsilon)$ si

$$f(t, x, \varepsilon) - g(t, x, \varepsilon) = o(1) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

La aproximación de funciones tomará la forma de expansión asintótica como:

$$f(t, x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^N \delta_n(\varepsilon) f_n(t, x, \varepsilon) + o(\delta_n(\varepsilon)),$$

con $\delta_n(\varepsilon)$, $n = 0, \dots, N$, funciones de orden tales que $\delta_{n+1}(\varepsilon) = o(\delta_n(\varepsilon))$, $n = 0, \dots, N-1$. La expansión de coeficientes $f_n(t, x, \varepsilon)$ son acotadas y $O(1)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ sobre el dominio de t, x dado.

Considere el problema de valor inicial con la función vectorial descrita arriba,

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \quad x(t_0) = \eta. \quad (3.1)$$

donde asumimos que $f(t, x, \varepsilon)$ puede ser expandido por una serie de Taylor convergente con respecto a ε y $x \in \mathbb{R}^n$. El problema no perturbado es:

$$\dot{x}_0 = f(t, x, 0).$$

Así como también admitiremos, para μ constante, lo siguiente:

$$x(t_0) = x_0(t_0) + \mu,$$

como este punto es independiente de ε . Trasladamos

$$x = y + x_0(t),$$

encontramos para y ,

$$\dot{y} = F(t, y, \varepsilon), \quad y(t_0) = \mu, \quad (3.2)$$

con $F(t, y, \varepsilon) = f(t, y + x_0, \varepsilon) - f(t, x_0(t), 0)$. Cabe destacar que las propiedades de expansión de $f(t, x, \varepsilon)$ implica que $F(t, y, \varepsilon)$ posee una expansión de serie de potencias con respecto a y y ε en una vecindad de $y = 0$ y $\varepsilon = 0$. Una vez expuesto todo lo anterior, es conveniente enunciar el siguiente Teorema de la Expansión de Poincaré, también conocido como expansión asintótica o serie asintótica.

Teorema 14 (Expansión de Poincaré). *Considere el P.V.I (3.2),*

$$\dot{y} = F(t, y, \varepsilon), \quad y(t_0) = \mu.$$

con $|t - t_0| \leq h$, $y \in D \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$. Si $F(t, y, \varepsilon)$ es continua con respecto a y, t, ε y puede ser expandido en una serie de potencia convergente con respecto a y, ε para $\|y\| \leq \rho$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ entonces $y(t)$ puede ser expandido en una serie de potencia convergente con respecto a ε y μ en una vecindad de $\varepsilon = \mu = 0$, convergente en un tiempo escala 1.

Para los detalles de la demostración ver [16].

3.2 Teorema de la Función Implícita

En esta sección nos referimos al Teorema de la Función Implícita el cual es uno de los teoremas que nos garantiza la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial (1.1). Este establece condiciones bajo las cuales una ecuación de varias variables permite definir a una de ellas como función de las demás.

Teorema 15 (Teorema de la Función Implícita). *Sea $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^p , $p \geq 1$. Supongamos que $(x_0, y_0) \in A$ y $f(x_0, y_0) = 0$. Dado el determinante:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

evaluado en (x_0, y_0) , donde $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. Si $\Delta \neq 0$. Entonces existen una vecindad abierta $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 , una vecindad V de y_0 en \mathbb{R}^m y una función $g : U \rightarrow V$ tal que

$$f(y, g(y)) = 0$$

para todo $x \in U$. Además, g es de clase C^p .

La prueba de este teorema podemos encontrarlo en [8] y [14].

3.3 Integrales Paramétricas Reales

Más adelante, al realizar los diversos cálculos en el Método de Poincaré-Lindstedt, será de gran utilidad la regla de derivación bajo la integral, es decir, la siguiente igualdad:

$$\frac{d}{d\lambda} \int f(x, \lambda) dx = \int \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) dx,$$

la cual dice esencialmente que cuando se deriva una integral respecto a un parámetro distinto a la variable en la que se integra, derivada e integral pueden intercambiarse.

Según el sentido que se quiera dar a la integral y a la derivada, este resultado requiere distintas condiciones sobre la función f . Una versión clásica del teorema que sustenta lo anterior será expuesto en el siguiente teorema:

Teorema 16. *Sean I, J intervalos reales, con I compacto y J abierto. Sea $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que*

- $f(x, \lambda)$ es integrable en I para todo $\lambda \in J$.

- $f(x, \lambda)$ es derivable en J para todo $x \in I$.

Supongamos además que $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ es continua en $I \times J$. Entonces,

- $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ es integrable $\lambda \in J$ para todo $\lambda \in J$.

- $\int_I f(x, \lambda) dx$ es derivable con derivada continua en J para todo $x \in I$.

y se cumple la regla de la derivación bajo la integral,

$$\frac{d}{d\lambda} \int_I f(x, \lambda) dx = \int_I \frac{\partial f}{\partial \lambda} dx \quad \text{para todo } \lambda \in J$$

La prueba de este teorema puede observarse en [3].

3.4 Método Poincaré-Lindstedt

Consideremos la ecuación de la siguiente forma:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}, \varepsilon), \quad (x, \dot{x}) \in D \subset \mathbb{R}^2. \quad (3.3)$$

Supongamos que la ecuación posee solución periódica para un parámetro ε pequeño y positivo. Además para D y para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ asumiremos que las condiciones del Teorema de la Expansión de Poincaré son satisfechas. Cabe destacar que el período T de la solución y el valor inicial dependen del parámetro ε . Por esta razón colocamos:

$$T = T(\varepsilon), \quad x(0) = a(\varepsilon), \quad \dot{x}(0) = 0,$$

donde

$$a(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n a_n,$$

La escala de tiempo de validez de la aproximación también juega un papel importante en esta sección. Del teorema de expansión se deduce que sobre el tiempo escala 1,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = a(0) \cos(t).$$

Realizando la transformación para $t \rightarrow \theta$ tal que, en la nueva variable de tiempo θ , la solución es periódica con período 2π . Transformamos:

$$\begin{cases} wt = \theta, \\ w^{-2} = 1 - \varepsilon\eta(\varepsilon), \end{cases} \quad (3.4)$$

donde,

$$\eta(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \eta_n,$$

resultando que,

$$\omega = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon\eta_0 + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2}\eta_1 + \frac{3}{8}\eta_0^2 \right) + \dots, \quad (3.5)$$

para el período $T = \frac{2\pi}{\omega}$, se tiene que:

$$T = 2\pi \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\eta_0 + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2}\varepsilon\eta_0 + \frac{1}{8}\eta_0^2 \right) + \dots \right). \quad (3.6)$$

Retomando la ecuación (3.3), al sustituir la transformación (3.4) en dicha ecuación, donde la notación es $x' = dx/d\theta$, se llega a lo siguiente:

$$x'' + x = \varepsilon[\eta + (1 - \varepsilon\eta)f(x, (1 - \varepsilon\eta)^{-\frac{1}{2}}x', \varepsilon)], \quad (3.7)$$

haciendo $[\eta + (1 - \varepsilon\eta)f(x, (1 - \varepsilon\eta)^{-\frac{1}{2}}x', \varepsilon)] = g(x, x', \varepsilon, \eta)$, nos resulta el siguiente sistema con las condiciones iniciales.

$$\begin{cases} x'' + x = \varepsilon g(x, x', \varepsilon, \eta), \\ x(0) = a(\varepsilon), \quad x'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

La condición inicial a y el parámetro η , los cuales determinan el período desconocido, deben ser elegidos tal que se obtenga la solución con un período de 2π en θ de la ecuación (3.8). Utilizando la fórmula de variación de constantes se tiene que el problema de valor inicial (3.8) es equivalente con la siguiente ecuación integral:

$$x(\theta) = a \cos(\theta) + \varepsilon \int_0^\theta \text{sen}(\theta - \tau) g(x(\tau), x'(\tau), \varepsilon, \eta) d\tau.$$

Por la solución periódica tenemos que $x(\theta) = x(\theta + 2\pi)$ la cual produce la condición de periodicidad

$$\int_\theta^{\theta+2\pi} \text{sen}(\theta - \tau) g(x(\tau), x'(\tau), \varepsilon, \eta) d\tau = 0.$$

Expandiendo $\text{sen}(\theta - \tau)$ encontramos dos condiciones de periodicidad,

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(\tau) g(x(\tau), x'(\tau), \varepsilon, \eta) d\tau = 0, \quad (3.9)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\tau) g(x(\tau), x'(\tau), \varepsilon, \eta) d\tau = 0. \quad (3.10)$$

Como la solución periódica depende del parámetro ε y también de a y η , entonces el sistema de las integrales (3.9) y (3.10) puede ser visto como un sistema de dos ecuaciones con a y η desconocidos. Por el Teorema de la Función Implícita este sistema tiene solución única en una vecindad de $\varepsilon = 0$ si el correspondiente Jacobiano no se anula. Escribiendo las integrales (3.9) y (3.10) en la forma $F_1(a, \eta) = 0$, $F_2(a, \eta) = 0$, respectivamente, esto significa que en una vecindad de $\varepsilon = 0$

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(a, \eta)} \neq 0. \quad (3.11)$$

Si la condición (3.11) es satisfecha, tenemos con la suposición de la parte derecha de la ecuación (3.3), que $a(\varepsilon)$ y $\eta(\varepsilon)$ pueden ser expandido en la serie de Taylor con respecto a ε . De la ecuación (3.8) encontramos para las condiciones de periodicidad con $\varepsilon = 0$ lo que sigue:

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(\tau) f(a(0) \cos(\tau), -a(0) \text{sen}(\tau), 0) d\tau = 0, \quad (3.12)$$

$$\pi\eta(0)a(0) + \int_0^{2\pi} \cos(\tau)f(a(0)\cos(\tau), -a(0)\operatorname{sen}(\tau), 0)d\tau = 0. \quad (3.13)$$

Aplicando (3.11) en las integrales (3.12) y (3.13), con la notación de $f = f(x, y, \varepsilon)$ se obtiene lo que sigue:

$$\left(a(0) \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\tau) \frac{\partial f}{\partial x}(a(0)\cos(\tau), -a(0)\operatorname{sen}(\tau), 0) - a(0)\operatorname{sen}^2(\tau) \frac{\partial f}{\partial y}(a(0)\cos(\tau), -a(0)\operatorname{sen}(\tau), 0) \right] d\tau \right) \neq 0. \quad (3.14)$$

Finalmente si la condición (3.11) es satisfecha, la solución periódica correspondiente al sistema (3.8) puede ser representada por la siguiente serie de potencia convergente:

$$x(\theta) = a(0)\cos(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \gamma_n(\theta), \quad (3.15)$$

tal que sus derivadas son las siguientes:

$$x'(\theta) = -a(0)\operatorname{sen}(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \gamma'_n(\theta),$$

$$x''(\theta) = -a(0)\cos(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \gamma''_n(\theta),$$

y la condición inicial es:

$$x(0) = a(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \eta_n(0), \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

mientras que las condiciones iniciales para $\gamma(\theta)$ son $\gamma(0) = a_n$ y $\gamma'(0) = 0$.

Una vez realizada la construcción del método de Poncaré-Lindstedt, veamos el siguiente teorema:

Teorema 17. *Considere la ecuación (3.3). Si las condiciones del Teorema de la Expansión de Poincaré han sido satisfechas y simultáneamente las condiciones de periodicidad (3.9) y (3.10), la condición de existencia y unicidad (3.11), entonces existe una solución periódica para la ecuación (3.3). Ésta solución puede ser representada por una serie de potencia convergente en ε para $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$.*

En [16] y [17] existe un gran desarrollo de la teoría del método.

Veamos el método de Poincaré-Lindstedt a través de la ecuación de Van der Pol (4):

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} \text{ con } 0 \leq \varepsilon \ll 1.$$

La primera condición del método es que la ecuación de Van der Pol posea solución periódica para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, y esto ya ha sido previamente estudiado en los capítulos anteriores, donde $0 \leq \varepsilon \ll 1$. Nótese que en la ecuación de Van der Pol

$$f(x, \dot{x}, \varepsilon) = (1 - x^2)\dot{x}. \quad (3.16)$$

Uno de nuestros propósitos es expresar la ecuación (1.4) de la forma (3.7), entonces mediante una serie de cálculos se logrará dicho fin. Usando la primera ecuación del sistema de transformación (3.4) obtenemos:

$$w^2 x'' + x = \varepsilon w(1 - x^2)x'.$$

como $\omega^{-1} = (1 - \varepsilon\eta)^{1/2}$ se llega a:

$$x'' + w^{-2}x = \varepsilon w^{-1}(1 - x^2)x',$$

sustituyendo la segunda ecuación del sistema de transformación (3.4) en la ecuación anterior se llega lo siguiente:

$$x'' + (1 - \varepsilon\eta)x = \varepsilon(1 - \varepsilon\eta)^{1/2}(1 - x^2)x',$$

aplicando propiedad distributiva,

$$x'' + x - \varepsilon\eta x = \varepsilon(1 - \varepsilon\eta)^{1/2}(1 - x^2)x',$$

despejando,

$$x'' + x = \varepsilon\eta x + \varepsilon(1 - \varepsilon\eta)^{1/2}(1 - x^2)x',$$

llegando así al siguiente sistema con valores iniciales:

$$\begin{cases} x'' + x = \varepsilon [\eta x + (1 - \varepsilon\eta)^{1/2}(1 - x^2)x'] \\ x(0) = a(\varepsilon), \quad x'(0) = 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

donde $g(x, x', \varepsilon, \eta) = \varepsilon [\eta x + (1 - \varepsilon\eta)^{1/2}(1 - x^2)x']$.

Ahora determinaremos a $a(0)$ y $\eta(0)$ con las ecuaciones (3.12) y (3.13), para ver el segundo requisito del método, es decir, la condición (3.11), donde al sustituir en (3.27)

$$f(a(0) \cos(\tau), -a(0)\text{sen}(\tau), 0) = (1 - a^2(0) \cos^2(\tau))(-a(0)\text{sen}(\tau)),$$

en la integral (3.13) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \pi\eta(0)a(0) + \int_0^{2\pi} \cos(\tau)((1 - a^2(0) \cos^2(\tau))(-a(0)\text{sen}(\tau)))d\tau \\ &= \pi\eta(0)a(0) + \int_0^{2\pi} -a(0)\text{sen}(\tau) \cos(\tau)((1 - a^2(0) \cos^2(\tau)))d\tau \\ &= \pi\eta(0)a(0) + \int_0^{2\pi} -a(0)\text{sen}(\tau) \cos(\tau) + a^3(0) \cos^2(\tau)\text{sen}(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

por la periodicidad de $\text{sen}(\tau)$ y $\cos(\tau)$ se llega a:

$$\int_0^{2\pi} [-a(0)\text{sen}(\tau) \cos(\tau) + a^3(0) \cos^3(\tau)\text{sen}(\tau)] d\tau = 0,$$

así se obtiene la primera condición $\pi\eta(0)a(0) = 0$. Ahora calculemos la otra integral (3.12) de la condición de periodicidad al sustituir $f(a(0) \cos(\tau), -a(0)\text{sen}(\tau), 0)$ expresada anteriormente.

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \text{sen}(\tau)((1 - a^2(0) \cos^2(\tau))(-a(0)\text{sen}(\tau)))d\tau = 0 \\ &= \int_0^{2\pi} -a(0)\text{sen}^2(\tau)((1 - a^2(0) \cos^2(\tau)))d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} [-a(0)\text{sen}^2(\tau) + a^3(0)\text{sen}2(\tau) \cos^2(\tau)] d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-a(0) \left(\frac{1 - \cos(2\tau)}{2} \right) + a^3(0)(1 - \cos^2(\tau)) \cos^2(\tau) \right] d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-a(0)\frac{1}{2} + a^3(0)(\cos^2(\tau) - \cos^4(\tau)) \right] d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-a(0)\frac{1}{2} + a^3(0)\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1 - \cos(2\tau)}{2}\right)^2\right) \right] d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-a(0)\frac{1}{2} + a^3(0)\frac{1}{2} - \left(\frac{1 - 2\cos(2\tau) + \cos(2\tau)^2}{4}\right) \right] d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left[-a(0)\frac{1}{2} + a^3(0) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1 + \cos(4\tau)}{2} \right) \right) \right] d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-a(0)\frac{1}{2} + a^3(0)\frac{1}{8} \right] d\tau \\
&= -a(0)\frac{1}{2}2\pi + a^3(0)\frac{1}{8}2\pi \\
&= a(0)\pi \left(\frac{a^2(0)}{4} - 1 \right), \tag{3.18}
\end{aligned}$$

de (3.18) obtenemos que $\left(\frac{a^2(0)}{4} - 1 \right) = 0$ tal que $a(0) = \pm 2$.

Así que $\eta(0) = 0$ y, sin pérdida de generalidad, trabajaremos con $a(0) = 2$.

Por otra parte, sustituyendo (3.15) con sus respectivas derivadas en (3.17) se llega a lo que sigue:

$$\begin{aligned}
-a(0)\cos(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \gamma''_n(\theta) + a(0)\cos(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \gamma_n(\theta) &= \varepsilon [\eta x + (1 - \varepsilon\eta)^{1/2}(1 - x^2)x'], \\
\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \gamma''_n(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \gamma_n(\theta) &= \varepsilon [\eta x + (1 - \varepsilon\eta)^{1/2}(1 - x^2)x'].
\end{aligned}$$

Al sustituir las expansiones en la parte derecha de la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n (\gamma''_n(\theta) + \gamma_n(\theta)) = \\
&\varepsilon \left[\eta \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \gamma_n(\theta) \right) + (1 - \varepsilon\eta)^{1/2} \left(1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \gamma_n(\theta) \right)^2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \gamma'_n(\theta) \right].
\end{aligned}$$

Trabajaremos para cada potencia de ε , es decir, ε^n con $n = 1, 2, 3, \dots$ iniciaremos con ε , para esto tomemos la expansión con $n = 1$. Sin pérdida de generalidad, consideremos $a(0) = a_0$ y $\eta(0) = \eta_0$.

$$\begin{aligned}
\varepsilon (\gamma''_1 + \gamma_1) &= \varepsilon [(\eta_0 + \varepsilon\eta_1)(a_0 \cos(\theta) + \varepsilon\gamma_1) \\
&\quad + (1 - \varepsilon(\eta_0 + \varepsilon\eta_1))^{1/2}(1 - (a_0 \cos(\theta) + \varepsilon\gamma_1)^2)x'],
\end{aligned}$$

simplificando los ε se llega a lo que sigue:

$$\begin{aligned}\gamma''_1 + \gamma_1 &= (\eta_0 + \varepsilon\eta_1)(a_0 \cos(\theta) + \varepsilon\gamma_1) \\ &+ (1 - \varepsilon(\eta_0 + \varepsilon\eta_1))^{1/2}(1 - (a_0 \cos(\theta) + \varepsilon\gamma_1)^2)(-a_0 \operatorname{sen}(\theta) + \varepsilon\gamma'_1).\end{aligned}$$

Ahora, sólo se tomarán en cuenta los valores acompañados por ε^0 , puesto que los ε ya fueron simplificados anteriormente.

$$\begin{aligned}\gamma''_1 + \gamma_1 &= \eta_0 a_0 \cos(\theta) + (1 - a_0^2 \cos^2(\theta))(-a_0 \operatorname{sen}(\theta)) \\ &= \eta_0 a_0 \cos(\theta) - a_0 \operatorname{sen}(\theta) + a_0^3 \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \\ &= \eta_0 a_0 \cos(\theta) - a_0 \operatorname{sen}(\theta) + a_0^3 (1 - \operatorname{sen}^2(\theta)) \operatorname{sen}(\theta) \\ &= \eta_0 a_0 \cos(\theta) - a_0 \operatorname{sen}(\theta) + a_0^3 \operatorname{sen}(\theta) - a_0^3 \operatorname{sen}^3(\theta),\end{aligned}$$

obteniendo así,

$$\gamma''_1 + \gamma_1 = \eta_0 a_0 \cos(\theta) - a_0 \operatorname{sen}(\theta) + a_0^3 \operatorname{sen}(\theta) - a_0^3 \operatorname{sen}^3(\theta). \quad (3.19)$$

Veamos que la condición de existencia y unicidad se cumple, a través del Teorema de la Función Implícita, donde de (3.19) se obtiene:

$$f(a_0 \cos(\theta), -a_0 \operatorname{sen}(\theta), 0) = \eta_0 a_0 \cos(\theta) - a_0 \operatorname{sen}(\theta) + a_0^3 \operatorname{sen}(\theta) - a_0^3 \operatorname{sen}^3(\theta),$$

tal que al sustituir en las integrales (3.9) y (3.10), respectivamente se llega a las siguientes expresiones:

$$F_1(a_0, \eta_0) = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\tau) [\eta_0 a_0 \cos(\tau) - a_0 \operatorname{sen}(\tau) + a_0^3 \operatorname{sen}(\tau) - a_0^3 \operatorname{sen}^3(\tau)] d\tau, \quad (3.20)$$

$$F_2(a_0, \eta_0) = \int_0^{2\pi} \cos(\tau) [\eta_0 a_0 \cos(\tau) - a_0 \operatorname{sen}(\tau) + a_0^3 \operatorname{sen}(\tau) - a_0^3 \operatorname{sen}^3(\tau)] d\tau. \quad (3.21)$$

Calculemos el jacobiano con las ecuaciones (3.20) y (3.21), para esto aplicaremos integrales paramétricas primero con (3.20):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial a_0} &= \frac{\partial}{\partial a_0} \int_0^{2\pi} \text{sen}(\tau) [\eta_0 a_0 \cos(\tau) - a_0 \text{sen}(\tau) + a_0^3 \text{sen}(\tau) - a_0^3 \text{sen}^3(\tau)] d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a_0} [\eta_0 a_0 \cos(\tau) \text{sen}(\tau) - a_0 \text{sen}^2(\tau) + a_0^3 \text{sen}^2(\tau) - a_0^3 \text{sen}^4(\tau)] d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} [\eta_0 \cos(\tau) \text{sen}(\tau) - \text{sen}^2(\tau) + 3a_0^2 \text{sen}^2(\tau) - 3a_0^2 \text{sen}^4(\tau)] d\tau \\
&= \left(-1 + 3a_0^2 - 3a_0^2 \frac{3}{4} \right) \pi,
\end{aligned}$$

obteniendo que,

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_0} = \left(-1 + 3a_0^2 - 3a_0^2 \frac{3}{4} \right) \pi,$$

luego, como $a_0 = 2$ se tiene que,

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_0} = \left(-1 + 3(2)^2 - 3(2)^2 \frac{3}{4} \right) \pi,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_0} = 2\pi. \quad (3.22)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial \eta_0} &= \frac{\partial}{\partial \eta_0} \int_0^{2\pi} \text{sen}(\tau) [\eta_0 a_0 \cos(\tau) - a_0 \text{sen}(\tau) + a_0^3 \text{sen}(\tau) - a_0^3 \text{sen}^3(\tau)] d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \eta_0} a_0 \cos(\tau) \text{sen}(\tau) d\tau,
\end{aligned}$$

así,

$$\frac{\partial F_1}{\partial \eta_0} = 0. \quad (3.23)$$

Ahora, trabajando con (3.21):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial a_0} &= \frac{\partial}{\partial a_0} \int_0^{2\pi} \cos(\tau) [\eta_0 a_0 \cos(\tau) - a_0 \text{sen}(\tau) + a_0^3 \text{sen}(\tau) - a_0^3 \text{sen}^3(\tau)] d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a_0} [\eta_0 a_0 \cos^2(\tau) - a_0 \text{sen}(\tau) \cos(\tau) + a_0^3 \text{sen}(\tau) \cos(\tau) - a_0^3 \text{sen}^2(\tau) \cos(\tau)] d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} [\eta_0 \cos^2(\tau) - \text{sen}(\tau) \cos(\tau) + 3a_0^2 \text{sen}(\tau) \cos(\tau) - 3a_0^2 \text{sen}^2(\tau) \cos(\tau)] d\tau \\
&= \eta_0 \pi,
\end{aligned}$$

obteniendo que se anula, puesto que $\eta_0 = 0$, así:

$$\frac{\partial F_2}{\partial a_0} = 0. \quad (3.24)$$

Luego derivando F_2 respecto a η_0 se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial \eta_0} &= \frac{\partial}{\partial \eta_0} \int_0^{2\pi} \cos(\tau) [\eta_0 a_0 \cos(\tau) - a_0 \operatorname{sen}(\tau) + a_0^3 \operatorname{sen}(\tau) - a_0^3 \operatorname{sen}^3(\tau)] d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \eta_0} [\eta_0 a_0 \cos^2(\tau) - a_0 \cos(\tau) \operatorname{sen}(\tau) + a_0^3 \cos(\tau) \operatorname{sen}(\tau) - a_0^3 \operatorname{sen}^2(\tau) \cos(\tau)] d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} a_0 \cos^2(\tau) d\tau \\ &= a_0 \pi, \end{aligned}$$

con $a_0 = 2$ se llega a:

$$\frac{\partial F_2}{\partial \eta_0} = 2\pi. \quad (3.25)$$

Luego sustituyendo (3.22), (3.23), (3.24) y (3.25) el jacobiano nos queda tal como sigue:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\pi & 0 \\ 0 & 2\pi \end{vmatrix} = 4\pi^2,$$

nótese que el jacobiano es distinto de cero, por lo tanto satisface la condición del Teorema de la Función Implícita.

Finalmente se sustituyen en (3.19) los valores de $a_0 = 2$, $\eta_0 = 0$ y la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}^3(\theta) = \left(\frac{3\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}(3\theta)}{4} \right). \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \gamma''_1 + \gamma_1 &= -2\operatorname{sen}(\theta) + 8\operatorname{sen}(\theta) - 8\operatorname{sen}^3(\theta) \\ &= -2\operatorname{sen}(\theta) + 8\operatorname{sen}(\theta) - 8 \left(\frac{3\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}(3\theta)}{4} \right) \\ &= -2\operatorname{sen}(\theta) + 8\operatorname{sen}(\theta) - 6\operatorname{sen}(\theta) + 2\operatorname{sen}(3\theta), \end{aligned}$$

luego,

$$\gamma''_1 + \gamma_1 = 2\text{sen}(3\theta), \quad (3.27)$$

donde, la solución para $O(\varepsilon)$ a través de la solución de la ecuación homogénea y la ecuación particular de (3.28) es:

$$\gamma_1(\theta) = A_1 \cos(\theta) + B_1 \text{sen}(\theta) - \frac{1}{4} \text{sen}(3\theta), \quad (3.28)$$

con las condiciones iniciales $\gamma_1 = a_1$ y $\gamma'_1 = 0$ se obtienen $A_1 = a_1$ y $B_1 = 3/4$ al sustituirlas en la ecuación (3.28) se llega a la siguiente solución, donde a_1 será calculada con la ecuación para $O(\varepsilon^2)$.

$$\gamma_1(\theta) = a_1 \cos(\theta) + \frac{3}{4} \text{sen}(\theta) - \frac{1}{4} \text{sen}(3\theta). \quad (3.29)$$

Ahora tomaremos la expansión hasta $n = 2$, sólo se trabajará con los términos de ε^2 .

$$\begin{aligned} \varepsilon(\gamma''_1 + \gamma_1) + \varepsilon^2(\gamma''_2 + \gamma_2) &= \varepsilon [(\varepsilon\eta_1 + \varepsilon\eta_2)(2 \cos(\theta) + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2)] \\ &+ \varepsilon [(1 - \varepsilon\eta)^{1/2}(1 - (2 \cos(\theta) + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2)^2)x'], \end{aligned}$$

tal que al tomar los ε^2 se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\gamma''_2 + \gamma_2) &= \varepsilon^2\eta_1 2 \cos(\theta) + \varepsilon [1 - (2 \cos(\theta) + \varepsilon\gamma_1)^2] (-2\text{sen}(\theta) + \varepsilon\gamma'_1 + \varepsilon^2\gamma''_1), \\ \varepsilon^2(\gamma''_2 + \gamma_2) &= \varepsilon^2\eta_1 2 \cos(\theta) + \varepsilon [8\varepsilon\gamma_1 \cos(\theta)\text{sen}(\theta) + \varepsilon\gamma'_1 - 4\varepsilon\gamma'_1 \cos^2(\theta)], \\ \gamma''_2 + \gamma_2 &= \eta_1 2 \cos(\theta) + 8\gamma_1 \cos(\theta)\text{sen}(\theta) + \gamma'_1 - 4\gamma'_1 \cos^2(\theta), \end{aligned}$$

luego al sustituir (3.29) y su derivada, $\gamma'_1 = -a_1 \text{sen}(\theta) + \frac{3}{4} \cos(\theta) - \frac{9}{4} \cos(3\theta)$, ésta ecuación nos resulta:

$$\begin{aligned} \gamma''_2 + \gamma_2 &= 2\eta_1 \cos(\theta) + 8 \left(a_1 \cos(\theta) + \frac{3}{4} \text{sen}(\theta) - \frac{1}{4} \text{sen}(3\theta) \right) \cos(\theta)\text{sen}(\theta) - a_1 \text{sen}(\theta) \\ &+ \frac{3}{4} \cos(\theta) - \frac{9}{4} \cos(3\theta) - 4 \left(-a_1 \text{sen}(\theta) + \frac{3}{4} \cos(\theta) - \frac{9}{4} \cos(3\theta) \right) \cos^2(\theta), \end{aligned} \quad (3.30)$$

la ecuación anterior será trabajada por parte para la facilidad del lector. Utilizando la identidad trigonométrica (3.26) y las siguientes:

$$\cos^3(\theta) = \left(\frac{3 \cos(\theta) - \cos(3\theta)}{4} \right). \quad (3.31)$$

$$\cos^5(\theta) = \left(\frac{10 \cos(\theta) + 5 \cos(3\theta) + \cos(5\theta)}{16} \right). \quad (3.32)$$

Esto es,

$$\begin{aligned} & 8 \left(a_1 \cos(\theta) + \frac{3}{4} \operatorname{sen}(\theta) - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(3\theta) \right) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \\ &= 8a_1(1 - \operatorname{sen}^2(\theta)) \operatorname{sen}(\theta) + 6\operatorname{sen}^2(\theta) \cos(\theta) - 2(3\operatorname{sen}(\theta) - 4\operatorname{sen}^3(\theta)) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \\ &= 8a_1 \operatorname{sen}(\theta) - 8a_1 \operatorname{sen}^3(\theta) + 6\operatorname{sen}^2(\theta) \cos(\theta) - 6\operatorname{sen}^2(\theta) \cos(\theta) + 8\operatorname{sen}^4(\theta) \cos(\theta) \\ &= 8a_1 \operatorname{sen}(\theta) - 8a_1 \left(\frac{3\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}(3\theta)}{4} \right) + 8(1 - \cos^2(\theta))^2 \cos(\theta) \\ &= 8a_1 \operatorname{sen}(\theta) - 6a_1 \operatorname{sen}(\theta) + 2a_1 \operatorname{sen}(3\theta) + 8 \cos(\theta)(1 - 2 \cos^2(\theta) + \cos^4(\theta)) \\ &= 2a_1 \operatorname{sen}(\theta) + 2a_1 \operatorname{sen}(3\theta) + 8 \cos(\theta) - 16 \cos^3(\theta) + 8 \cos^5(\theta) \\ &= 2a_1 \operatorname{sen}(\theta) + 2a_1 \operatorname{sen}(3\theta) + 8 \cos(\theta) - 16 \left(\frac{3 \cos(\theta) + \cos(3\theta)}{4} \right) \\ &\quad + 8 \left(\frac{10 \cos(\theta) + 5 \cos(3\theta) + \cos(5\theta)}{16} \right) \\ &= 2a_1 \operatorname{sen}(\theta) + 2a_1 \operatorname{sen}(3\theta) + 8 \cos(\theta) - 12 \cos(\theta) - 4 \cos(3\theta) + \cos(\theta) + \frac{5}{2} \cos(3\theta) \\ &\quad + \frac{\cos(5\theta)}{2} \\ &= 2a_1 \operatorname{sen}(\theta) + 2a_1 \operatorname{sen}(3\theta) + \cos(\theta) - \frac{3}{2} \cos(3\theta) + \frac{\cos(5\theta)}{2}, \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned} 8 \left(a_1 \cos(\theta) + \frac{3}{4} \operatorname{sen}(\theta) - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(3\theta) \right) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) &= 2a_1 \operatorname{sen}(\theta) + 2a_1 \operatorname{sen}(3\theta) + \cos(\theta) \\ &\quad - \frac{3}{2} \cos(3\theta) + \frac{\cos(5\theta)}{2}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Por otra parte, sustituimos las identidades trigonométricas (3.26), (3.31) y (3.32) en la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} -4\gamma'_1 \cos^2(\theta) &= -4 \left(-a_1 \operatorname{sen}(\theta) + \frac{3}{4} \cos(\theta) - \frac{3}{4} \cos(3\theta) \right) \cos^2(\theta) \\ &= 4a_1 \operatorname{sen}(\theta) \cos^2(\theta) - 3 \cos^3(\theta) + 3 \cos(3\theta) \cos^2(\theta) \\ &= 4a_1 \operatorname{sen}(\theta)(1 - \operatorname{sen}^2(\theta)) - 3 \left(\frac{3\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}(3\theta)}{4} \right) + 3(4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4a_1 \operatorname{sen}(\theta) - 4a_1 \operatorname{sen}^3(\theta) - \frac{9}{4} \cos(\theta) - \frac{3}{4} \cos(3\theta) + 12 \cos^5(\theta) - 9 \cos^3(\theta) \\
&= 4a_1 \operatorname{sen}(\theta) - 4a_1 \left(\frac{3 \operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}(3\theta)}{4} \right) - \frac{9}{4} \cos(\theta) \\
&+ 12 \left(\frac{10 \cos(\theta) + 5 \cos(3\theta) + \cos(5\theta)}{16} \right) - 9 \left(\frac{3 \cos(\theta + \cos(3\theta))}{4} \right) \\
&= a_1 \operatorname{sen}(\theta) + a_1 \operatorname{sen}(3\theta) + \frac{3}{4} \cos(3\theta) - \frac{3}{2} \cos(\theta) + \frac{3}{4} \cos(5\theta),
\end{aligned}$$

luego,

$$-4\gamma'_1 \cos^2(\theta) = a_1 \operatorname{sen}(\theta) + a_1 \operatorname{sen}(3\theta) + \frac{3}{4} \cos(3\theta) - \frac{3}{2} \cos(\theta) + \frac{3}{4} \cos(5\theta). \quad (3.34)$$

Ahora sustituyendo γ'_1 , (3.33) y (3.34) en (3.35) se llega a la siguiente expresión que sigue:

$$\begin{aligned}
\gamma''_2 + \gamma_2 &= 2\eta_1 \cos(\theta) + 2a_1 \operatorname{sen}(\theta) + 2a_1 \operatorname{sen}(3\theta) + \cos(\theta) \\
&\quad - \frac{3}{2} \cos(3\theta) + \frac{\cos(5\theta)}{2} - a_1 \operatorname{sen}(\theta) + \frac{3}{4} \cos(\theta) - \frac{3}{4} \cos(3\theta) \\
&\quad + a_1 \operatorname{sen}(\theta) + a_1 \operatorname{sen}(3\theta) + \frac{3}{4} \cos(3\theta) - \frac{3}{2} \cos(\theta) + \frac{3}{4} \cos(5\theta) \\
&= 2\eta_1 \cos(\theta) + 2a_1 \operatorname{sen}(\theta) + 3a_1 \operatorname{sen}(3\theta) - \frac{3}{2} \cos(3\theta) + \frac{5}{4} \cos(5\theta) + \frac{1}{4} \cos(\theta),
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\gamma''_2 + \gamma_2 = 2\eta_1 \cos(\theta) + 2a_1 \operatorname{sen}(\theta) + 3a_1 \operatorname{sen}(3\theta) - \frac{3}{2} \cos(3\theta) + \frac{5}{4} \cos(5\theta) + \frac{1}{4} \cos(\theta). \quad (3.35)$$

Ahora determinaremos a a_1 y η_1 con las ecuaciones (3.12) y (3.13) para ver el segundo requisito del método, es decir, la condición (3.11), donde al sustituir de (3.35) a

$$\begin{aligned}
f(a_1 \cos(\tau), -a_1 \operatorname{sen}(\tau), 0) &= 2\eta_1 \cos(\theta) + 2a_1 \operatorname{sen}(\theta) + 3a_1 \operatorname{sen}(3\theta) \\
&\quad - \frac{3}{2} \cos(3\theta) + \frac{5}{4} \cos(5\theta) + \frac{1}{4} \cos(\theta), \quad (3.36)
\end{aligned}$$

en la integral (3.13) se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \text{sen}(\tau) \left[\left(2\eta_1 + \frac{1}{4} \right) \cos(\tau) + 2a_1 \text{sen}(\tau) + 3a_1 \text{sen}(3\tau) - \frac{3}{2} \cos(3\tau) + \frac{5}{4} \cos(5\tau) \right] d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\left(2\eta_1 + \frac{1}{4} \right) \cos(\tau) \text{sen}(\tau) + 2a_1 \text{sen}^2(\tau) + 3a_1 (3\text{sen}(\tau) - 4\text{sen}^3(\tau)) \text{sen}(\tau) \right. \\
&\quad \left. + \frac{5}{4} 16 \cos^5(\tau) - 10 \cos(\tau) - 5(4 \cos^3(\tau) - 3 \cos(\tau)) \text{sen}(\tau) \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{2} (4 \cos^3(\tau) - 3 \cos(\tau)) \text{sen}(\tau) \right] d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} \left[2a_1 \text{sen}^2(\tau) + 3a_1 (3\text{sen}^2(\tau) - 4\text{sen}^4(\tau)) - 6 \cos^3(\tau) \text{sen}(\tau) + \frac{9}{2} \cos(\tau) \text{sen}(\tau) \right. \\
&\quad \left. + 20 \cos^5(\tau) \text{sen}(\tau) - \frac{25}{2} \cos(\tau) \text{sen}(\tau) - \frac{25}{4} (4 \cos^3(\tau) \text{sen}(\tau) - 3 \cos(\tau) \text{sen}(\tau)) \right] d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} \left[2a_1 \text{sen}^2(\tau) + 9a_1 \text{sen}^2(\tau) - 12a_1 \left(\frac{1 - \cos(2\tau)}{2} \right)^2 \right] d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} \left[11a_1 \text{sen}^2(\tau) - \frac{12}{4} a_1 (1 - 2 \cos(2\tau) + \cos^2(2\tau)) \right] d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} [11a_1 \text{sen}^2(\tau) - 3a_1 [1 - \cos^2(2\tau)]] d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} [11a_1 \text{sen}^2(\tau) - 3a_1 + 3a_1 \cos^2(2\tau)] d\tau \\
&= \left(\frac{11}{2} a_1 - 3a_1 + \frac{3}{2} a_1 \right) 2\pi \\
&= 4\pi a_1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Entonces $a_1 = 0$. Ahora calculemos la otra integral (3.12) de la condición de periodicidad, usando resultados previos.

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \left[\cos(\tau) \left(2\eta_1 + \frac{1}{4} \right) \cos(\tau) + 2a_1 \text{sen}(\tau) + 3a_1 (3\text{sen}(\tau) - 4\text{sen}^3(\tau)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{2} (4 \cos^3(\tau) - 3 \cos(\tau)) + \frac{5}{4} [16 \cos^5(\tau) - 10 \cos(\tau) - 5(4 \cos^3(\tau) - 3 \cos(\tau))] \right] d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left[\cos^2(\tau) \left(2\eta_1 + \frac{1}{4} \right) - 6 \cos^4(\tau) + \frac{9}{2} \cos^2(\tau) \right. \\
&\quad \left. + \frac{5}{4} (16 \cos^6(\tau) - 10 \cos^2(\tau) - 20 \cos^4(\tau) + 15 \cos^2(\tau)) \right] d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(2\eta_1 + \frac{1}{4} \right) d\tau \\
&= 2\eta_1 + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Entonces $2\eta_1 + \frac{1}{4} = 0$ así $\eta_1 = -\frac{1}{8}$.

Ahora, veamos que la condición de existencia y unicidad se cumple, a través del Teorema de la Función Implícita al sustituir (3.36) en las condiciones de periodicidad nos quedan

$$\begin{aligned}
F_1(a_1, \eta_1) &= \int_0^{2\pi} \text{sen}(\tau) (2\eta_1 \cos(\tau) + 2a_1 \text{sen}(\tau) + 3a_1 \text{sen}(3\tau) - \frac{3}{2} \cos(3\tau) \\
&\quad + \frac{5}{4} \cos(5\tau) + \frac{1}{4} \cos(\tau)) d\tau, \tag{3.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(a_1, \eta_1) &= \int_0^{2\pi} \cos(\tau) (2\eta_1 \cos(\tau) + 2a_1 \text{sen}(\tau) + 3a_1 \text{sen}(3\tau) - \frac{3}{2} \cos(3\tau) \\
&\quad + \frac{5}{4} \cos(5\tau) + \frac{1}{4} \cos(\tau)) d\tau. \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Calculemos el jacobiano para (3.37) y (3.38), para esto aplicaremos integrales paramétricas primero con (3.37), donde utilizaremos resultados previos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial a_1} &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial F_1}{\partial a_1} \left[\text{sen}(\tau) \left(2\eta_1 \cos(\tau) + 2a_1 \text{sen}(\tau) + 3a_1 \text{sen}(3\tau) - \frac{3}{2} \cos(3\tau) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{5}{4} \cos(5\tau) + \frac{1}{4} \cos(\tau) \right) \right] d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} \text{sen}(\tau) (2\text{sen}(\tau) + 3\text{sen}(3\tau)) d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} [2\text{sen}^2(\tau) + 3(3\text{sen}(\theta) - 4\text{sen}^3(\theta))\text{sen}(\theta)] d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} [2\text{sen}^2(\tau) + 9\text{sen}^2(\theta) - 12\text{sen}^4(\theta)] d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} [11\text{sen}^2(\tau) - 12\text{sen}^4(\theta)] d\tau \\
&= 11\pi - 12(3/4)\pi.
\end{aligned}$$

Así que, por un lado se tiene que

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_1} = 3\pi. \quad (3.39)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \eta_1} &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial F_1}{\partial \eta_1} \left[\text{sen}(\tau)(2\eta_1 \cos(\tau) + 2a_1 \text{sen}(\tau) + 3a_1 \text{sen}(3\tau) - \frac{3}{2} \cos(3\tau) \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{4} \cos(5\tau) + \frac{1}{4} \cos(\tau)) \right] d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \cos(\tau) \text{sen}(\tau) d\tau \\ &= 0, \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\frac{\partial F_1}{\partial \eta_1} = 0. \quad (3.40)$$

Ahora, calculando la derivada de (3.38):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial \eta_1} &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial F_2}{\partial \eta_1} \cos(\tau)(2\eta_1 \cos(\tau) + 2a_1 \text{sen}(\tau) + 3a_1 \text{sen}(3\tau) - \frac{3}{2} \cos(3\tau) \\ &\quad + \frac{5}{4} \cos(5\tau) + \frac{1}{4} \cos(\tau)) d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \cos^2(\tau) d\tau \\ &= 2\pi, \end{aligned}$$

se llega,

$$\frac{\partial F_2}{\partial \eta_1} = 2\pi. \quad (3.41)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial a_1} &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial F_2}{\partial a_1} \left[\cos(\tau)(2\eta_1 \cos(\tau) + 2a_1 \text{sen}(\tau) + 3a_1 \text{sen}(3\tau) - \frac{3}{2} \cos(3\tau) \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{4} \cos(5\tau) + \frac{1}{4} \cos(\tau)) \right] d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} [2 \text{sen}(\tau) + 3 \text{sen}(3\tau)] \cos(\tau) d\tau \\ &= 0. \end{aligned}$$

obteniendo que

$$\frac{\partial F_2}{\partial a_1} = 0. \quad (3.42)$$

luego el jacobiano, al sustituir (3.39), (3.40), (3.41) y (3.42) nos queda tal como sigue:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3\pi & 0 \\ 0 & 2\pi \end{vmatrix} = 6\pi^2,$$

obteniendo que el jacobiano no se anula, es decir, que satisface la condición del Teorema de la Función Implícita.

Finalmente se sustituyen en (3.35) los valores de $a_1 = 0$ y $\eta_1 = -1/8$.

$$\gamma''_2 + \gamma_2 = 2 \left(-\frac{1}{8} \right) \cos(\theta) - \frac{3}{2} \cos(3\theta) + \frac{5}{4} \cos(5\theta) + \frac{1}{4} \cos(\theta),$$

obteniéndose lo que sigue:

$$\gamma''_2 + \gamma_2 = -\frac{3}{2} \cos(3\theta) + \frac{5}{4} \cos(5\theta). \quad (3.43)$$

Luego al conseguir las soluciones de la ecuación particular y ecuación homogénea de (3.43), se llega a lo siguiente:

$$\gamma_2 = A_2 \cos(\theta) + B_2 \text{sen}(\theta) + \frac{3}{16} \cos(3\theta) - \frac{5}{96} \cos(5\theta). \quad (3.44)$$

Con las condiciones iniciales $\gamma_2 = a_2$ y $\gamma'_2 = 0$ se obtienen $B_2 = 0$ y $A_2 = a_2 - \frac{13}{96}$, donde a_2 puede ser determinado al realizar la extensión para $n = 3$, caso que no calcularemos, al sustituir dichas condiciones, en la ecuación (3.44) se llega a la siguiente solución para $O(\varepsilon^2)$:

$$\gamma_2 = \left(a_2 - \frac{13}{96} \right) \cos(\theta) + \frac{3}{16} \cos(3\theta) - \frac{5}{96} \cos(5\theta). \quad (3.45)$$

Con (3.29) y (3.45), finalmente, encontramos la aproximación de la solución periódica de la ecuación de Van der Pol para $O(\varepsilon^3)$, a través de la siguiente serie convergente:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= 2 \cos(\theta) + \varepsilon \left\{ \frac{3}{4} \text{sen}(\theta) - \frac{1}{4} \text{sen}(3\theta) \right\} \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ \left(a_2 - \frac{13}{96} \right) \cos(\theta) + \frac{3}{16} \cos(3\theta) - \frac{5}{96} \cos(5\theta) \right\} + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Al sustituir en la ecuación (3.5) los valores de $\eta_0 = 0$ y $\eta_1 = -\frac{1}{8}$ obtenemos la frecuencia:

$$\omega = 1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Por lo tanto, sustituyendo en (3.6) el período viene dado por:

$$T = 2\pi \left(1 + \frac{1}{16}\varepsilon^2 \right) + O(\varepsilon^3).$$

CAPÍTULO 4

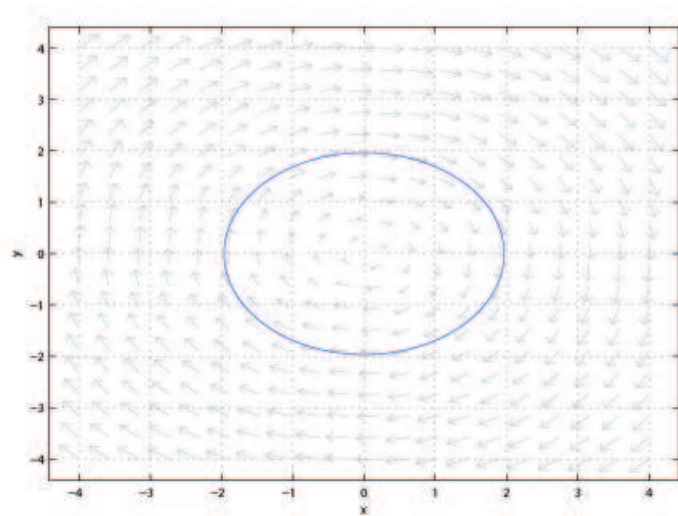
Aplicaciones en Matlab

En los capítulos anteriores realizamos un estudio de la ecuación de Van der Pol, centrandonos en la solución de la misma, a través de las diferentes herramientas utilizadas llegamos a que la ecuación de Van der Pol posee solución periódica, y que además es orbitalmente asintóticamente estable, así como también encontramos que dicha solución puede ser expandida en una serie de potencia convergente; estas soluciones fueron halladas por el Teorema de Bedixson, el Teorema de Liénard y el Método de Poincaré-Lindstedt, respectivamente.

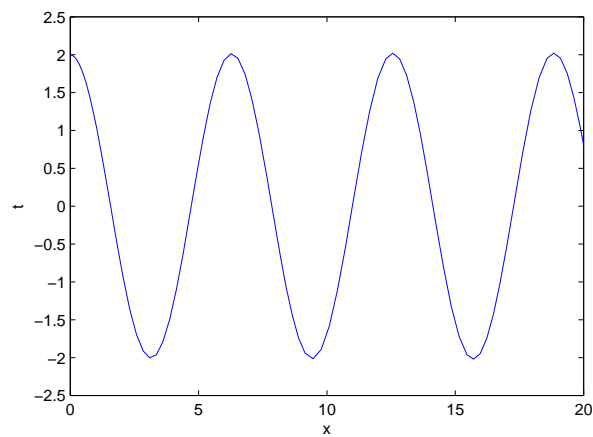
Ahora en este capítulo haremos una representación gráfica de la ecuación de Van der Pol, a través de la variación del parámetro de la ecuación. Recordemos la ecuación de Van der Pol

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \text{ con } 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Ésta representación gráfica se hará a través de Matlab, el cual es un programa para resolver problemas numéricos.



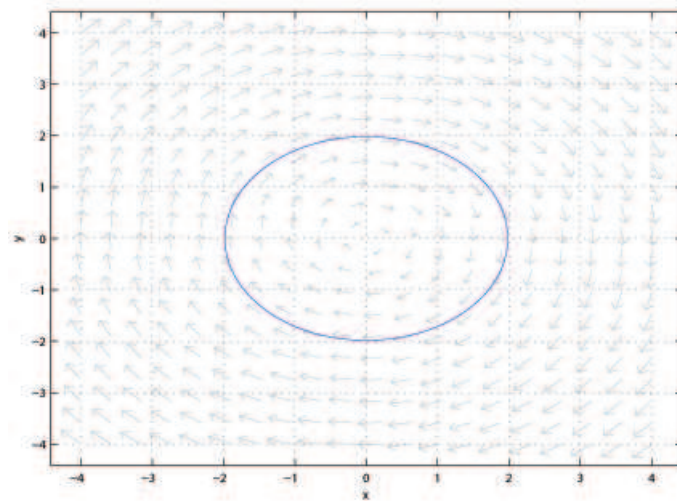
(a) Plano fase



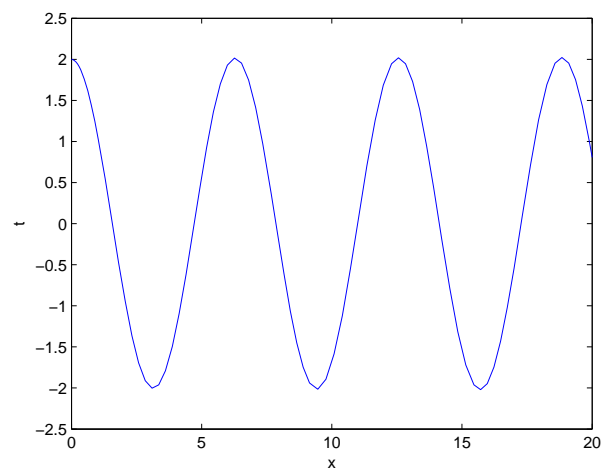
(b) Solución respecto al tiempo

Figura 4.1: Van der Pol con parámetro $\varepsilon = 0$

Apreciamos en estas figuras el plano fase y la solución del sistema correspondiente al oscilador de Van der Pol para $\varepsilon = 0$, con este parámetro el sistema es un oscilador armónico.



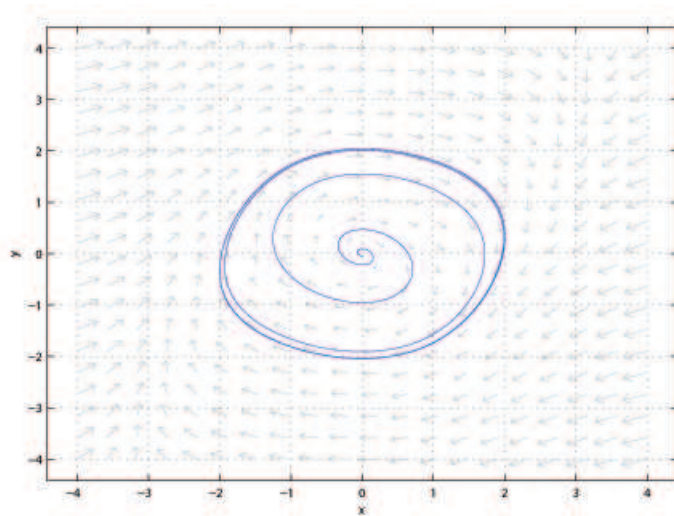
(a) Plano fase



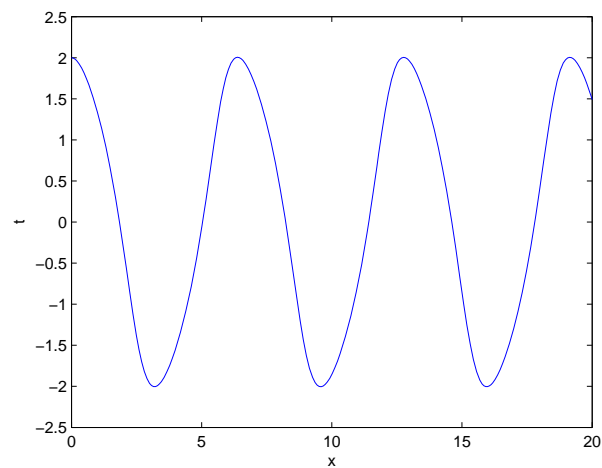
(b) Solución respecto al tiempo

Figura 4.2: Van der Pol con parámetro $\varepsilon = 0,000001$

Aquí notamos que al variar el parámetro con $\varepsilon = 0,000001$ el plano fase y la solución respecto al tiempo no varía mucho en comparación a las figuras presentadas anteriormente, (4.1), para $\varepsilon = 0$.



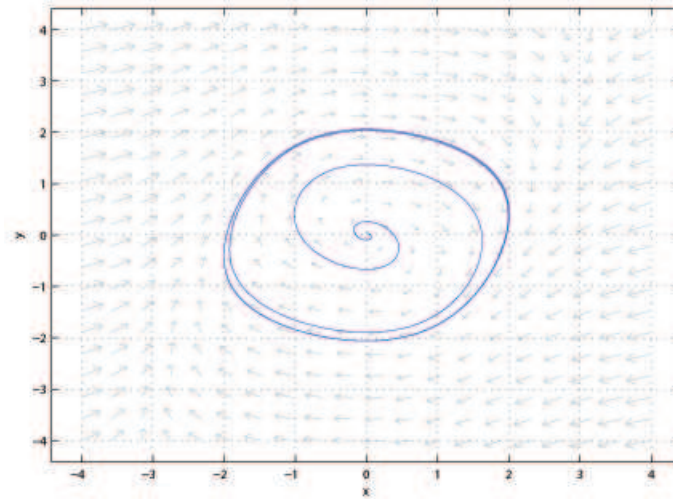
(a) Plano fase



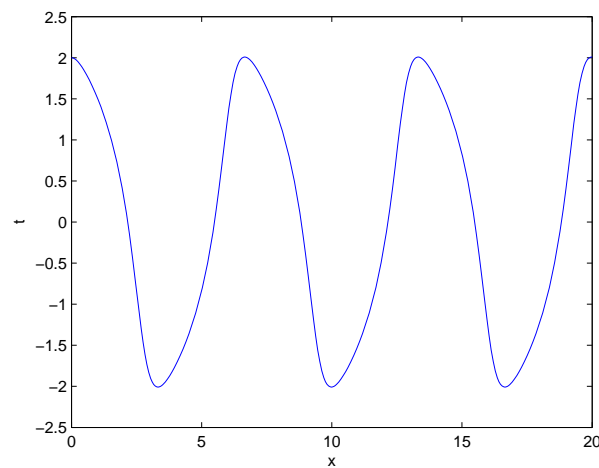
(b) Solución respecto al tiempo

Figura 4.3: Van der Pol con parámetro $\varepsilon = 0,5$

Aquí el plano fase comienza a variar un poco con respecto a las figuras (4.1) y (4.2). Las trayectorias se aproximan al ciclo límite con más rapidez debido a que la solución periódica es orbitalmente asintóticamente estable.



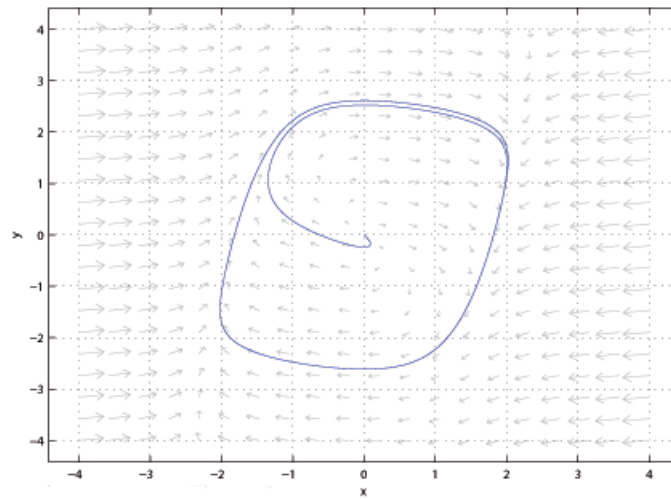
(a) Plano fase



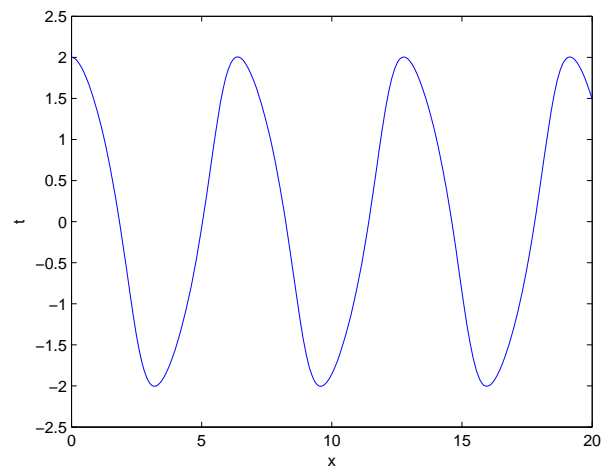
(b) Solución respecto al tiempo

Figura 4.4: Van der Pol con parámetro $\varepsilon = 1$

En estas figuras se muestra la evolución del modelo de Van der Pol para $\varepsilon = 1$. Nótese que para $0 \leq \varepsilon \ll 1$ la solución de la ecuación posee ciclos límites, en forma de circunferencia, mientras que para este nuevo valor para el parámetro observamos otra conducta, pero que al final no deja de ser ciclo límite, debido a que divide el plano fase en dos regiones; veamos que pasa cuando $\varepsilon > 1$.



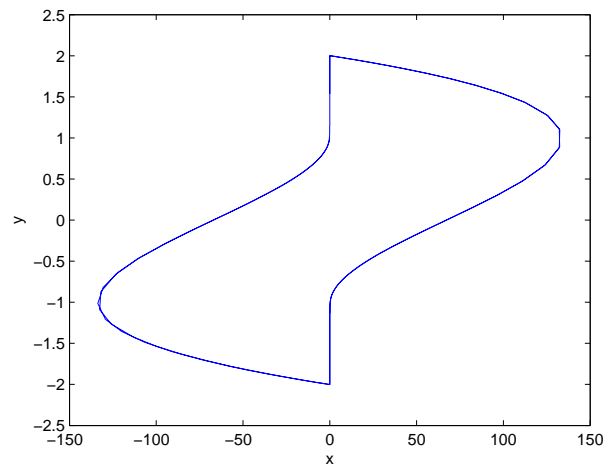
(a) Plano fase



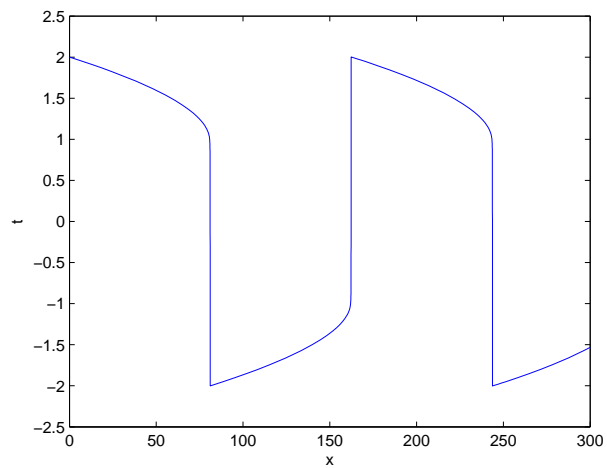
(b) Solución respecto al tiempo

Figura 4.5: Van der Pol con parámetro $\epsilon = 2$

Para este parámetro el plano fase, sin duda, presenta un cambio considerable respecto a los demás.



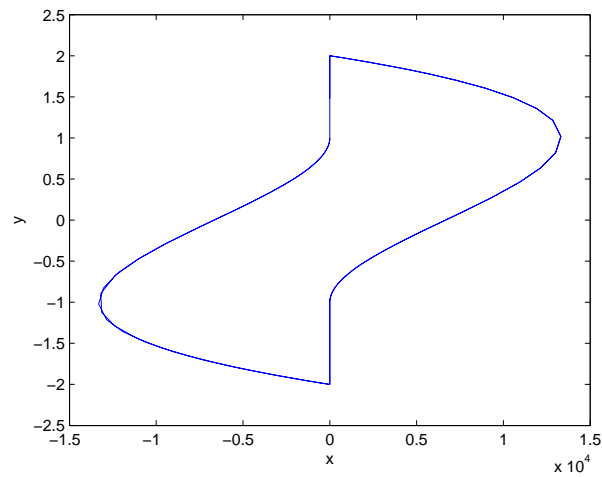
(a) Plano fase



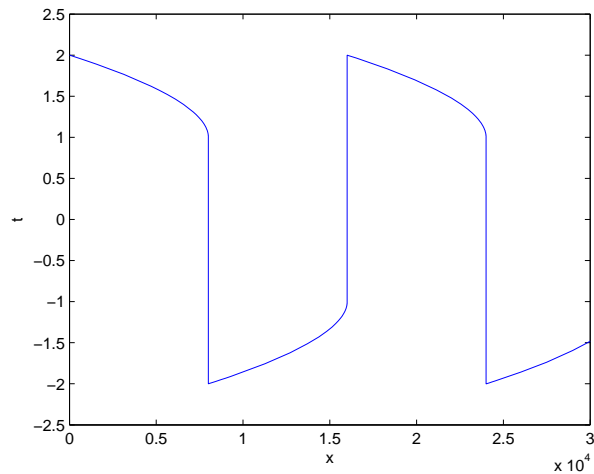
(b) Solución respecto al tiempo

Figura 4.6: Van der Pol con parámetro $\varepsilon = 100$

Observamos que tanto el plano fase como la solución respecto al tiempo varían notablemente en comparación con las figuras (4.1), (4.2), (4.5) y (4.4).



(a) Plano fase



(b) Solución con respecto al tiempo

Figura 4.7: Van der Pol con parámetro $\varepsilon = 10000$

Finalmente la conducta para $\varepsilon \geq 1$ del plano fase y la solución respecto al tiempo varía a medida que se aumenta el parámetro, mientras que cuando $0 \leq \varepsilon \ll 1$ no presenta cambios drásticos, es decir, presentan similitud. Ahora al comparar ambos casos, es decir, para $\varepsilon \geq 1$ y $0 \leq \varepsilon \ll 1$ notamos que ocurren cambios drásticamente.

El plano fase es una herramienta que permite obtener un punto de vista diferente sobre algunos de los fenómenos que se pueden encontrar en los sistemas no lineales. El plano fase puede ayudar a comprender y visualizar lo que podría ocurrir en un sistema no lineal.

En ocasiones las trayectorias tienden a formar una órbita cerrada, cuando esto sucede se dice que existe un ciclo límite. Las órbitas periódicas en los planos fases corresponden a soluciones periódicas o ciclos límites, que no se intersectan por la unicidad de soluciones. Además se tiene que una trayectoria cerrada del sistema rodea, necesariamente, al menos un punto crítico.

Acordando con el teorema de la curva de Jordan estos ciclos dividen al plano en dos regiones, la interior y la exterior de la órbita cerrada. Ésta propiedad es reconocida en uno de los descubrimientos fundamentales de Poincaré y Bendixson. El teorema de Poincaré-Bendixson permite clasificar todos los posibles comportamientos en el espacio fase en 2 dimensiones para funciones de clase C^1 que tengan un número finito de puntos críticos, los cuales se pueden clasificar a groso modo en convergencia (divergencia) a puntos críticos u órbitas periódicas y no existe otro tipo de comportamiento. Bendixson, también, estableció un criterio que nos permite decidir sobre la ausencia o existencia de

la solución periódica.

Los ciclos límites pueden ser: *estables*, cuando los puntos próximos se mueven hacia él; *inestables*, donde los puntos próximos se alejan de él, o *semi-estables* que presentan ambos comportamientos.

Balthazar Van der Pol encontró un ciclo límite extremadamente importante, esto a través de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, que surgió en 1926 de los aparatos de radio que tenían la particularidad del uso de tubos de vacíos. Éstos se usaron en las radios hasta que en 1947 cuando William Shockley, John Bardeen y Walter Brattain, de los laboratorios de la Bell Telephone, inventaron el transistor, no obstante, los transistores aplican un análisis matemático similar.

El contexto original de dicha ecuación fue el estudio de circuitos eléctricos que contenían tubos de vacío, sin embargo ha tenido significativas aplicaciones en diversas áreas de estudios importantes, tales como: física, biología, química, ingeniería, medicina, entre otras ramas. Por ejemplo: en biología existen modelos para las potencialidades de acción de las neuronas, en sismología modelos en una falla geológica. En medicina: construyó una serie de modelos de circuitos electrónicos del corazón humano para estudiar el rango de estabilidad de la dinámica del corazón. Sus investigaciones con la adición de una señal externa de conducción son análogas a la situación en la que un corazón real está impulsado por un marcapasos. Él estaba interesado en averiguar, mediante su labor de arrastre, la forma de estabilizar una situación irregular del corazón o las pulsaciones.

En 1928 el físico Francés Lienard estudió la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0,$$

como una generalización de la ecuación de Van der Pol. A través de la creación de un

teorema que de acuerdo con el cumplimiento de ciertas hipótesis permite determinar que las ecuaciones de esa forma poseen soluciones órbitamente asintóticamente estables.

Finalmente en este T.E.G. tras la aplicación de una parte de la teoría de sistemas dinámicos se logró obtener:

- La ecuación de Van der Pol posee solución periódica, esto mediante el criterio de Bendixson.
- Por el Teorema de Liénard se determinó que la ecuación de Van der Pol presenta una solución periódica orbitalmente asintóticamente estable.
- A través de una serie de cálculos se logró obtener el radio del ciclo límite, así como también ciertas propiedades, tales como los conjuntos α -límite y ω -límite.
- Encontramos una aproximación de una serie convergente para la solución periódica de dicha ecuación, cabe destacar que esta aproximación puede hallarse por otros métodos de perturbación, tal como el Método de Múltiple Escala y el Método de Lighthill.
- Se realizó una representación gráfica de la solución de la ecuación de Van der Pol, variando el parámetro de la ecuación utilizando Matlab.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Bhatia, N. y Szego, G. (1970). *Stability Theory of Dynamical Systems*. Berlin: Alemania. Springer-Verlag.
- [2] Drazin, P.(1992). *Nonlinear System*. [Libro en línea]. Consultado el 19 de febrero de 2010 en:
<http://books.google.es>
- [3] Fuster, R. y Giménez, (2006). *Variable Compleja y Ecuaciones Diferenciales*. [Libro en línea]. Consultado el 01 de marzo de 2010 en:
<http://books.google.es>
- [4] Guzman, M. (1975). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Teoría de Estabilidad y Control*. España: Alhambra.
- [5] Hale, J. y Koçak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. Atlanta: USA. Springer-Verlag.
- [6] Hirsch, M. y Smale, S.(1970). *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. New York: USA. Academic Press.
- [7] Jordan, D. y Smith, P. (1999). *Nonlinear Ordinary Differential Equations: an introduction to dynamical systems*. [Libro en línea]. Consultado el 16 de diciembre de

- 2009 en:
<http://books.google.co.ve>
- [8] Marsden, J. y Hoffman M. (1970). *Elementary Classical Analysis*. San Francisco: USA. Springer-Verlag.
- [9] Nápoles, J. (2004). Un siglo de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. *Lecturas Matemáticas*, 25, 59-111.
- [10] Marion, J.(1992). *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. [Libro en línea]. Consultado el 15 de febrero de 2010 en:
<http://books.google.es>
- [11] Martín, M., Morán, M. y Reyes, M. (1995). *Iniciación al Caos*. Madrid: España. Síntesis.
- [12] McCleary, J. (2006). *A first Course in Topology. Continuity and Dimension*. [Libro en línea]. Consultado el 02 de febrero de 2010 en:
<http://books.google.es>
- [13] Plato, R. (2003). *Conscice Numerical Mathematics*. [Libro en línea]. Consultado el 15 de enero de 2010 en:
<http://books.google.es>
- [14] Rodríguez, G. (2003). *Diferenciación de funciones de varias variables reales*. [Libro en línea]. Consultado el 15 de marzo de 2010 en:
<http://books.google.es>
- [15] Stephen, L. (2001). *Dynamical Systems: with applications using Maple*. Boston: USA. Birkhäuser.
- [16] Verhulst, F. (1989). *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: USA. Springer-Verlag.

-
- [17] Verhulst, F. (1989). *Methods and Applications of Singular Perturbations: Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics*. [Libro en línea]. Consultado el 20 de enero de 2010 en: <http://books.google.es>