



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA

# Fórmula de Inversión de Lagrange

Trabajo Especial de Grado presentado  
ante la ilustre Universidad Central de  
Venezuela por el **Br. Edwin Pin Baque**  
para optar al título de Licenciado en  
Matemática.

**Tutor: Manuel Maia.**

Caracas, Venezuela

Diciembre 2011

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Fórmula de Inversión de Lagrange**”, presentado por el **Br. Edwin Pin Baque**, titular de la Cédula de Identidad **18.813.365**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

---

**Manuel Maia**  
**Tutor**

---

**Cristina Balderrama**  
**Jurado**

---

**Miguel Méndez**  
**Jurado**

## Dedicatoria

A María Baque y Homero Pin, mis padres,  
por su apoyo en este largo proceso.

Y Alejandra Aguilera.  
La mejor compañera que se pueda desear.

## Agradecimiento

Agradezco muy especialmente al profesor Manuel Maia.

Sin su ayuda y guía no podría haber sido  
posible este trabajo.

## CONTENIDO

Introducción	1
Capítulo 1. Desarrollo original y antecedentes históricos.	3
1. El problema de Kepler.	3
2. Lagrange y su Teorema de Inversión.	7
3. Sobre el problema de Kepler.	11
Capítulo 2. Enfoque analítico.	13
Capítulo 3. Enfoque algebraico.	19
1. Demostración de FIG usando residuos.	25
2. Demostración de FIG usando operadores adjuntos.	27
Capítulo 4. Enfoque combinatorio.	32
1. Teoría de especies combinatorias.	32
2. Árboles R-enriquecidos.	49
Capítulo 5. Otras demostraciones y resultados.	57
1. Otra demostración analítica.	57
2. Algoritmo para FIL.	61
3. Arreglos de Riordan.	64
Capítulo 6. Aplicaciones	70
Bibliografía	82

## Introducción

El estudio de funciones expresadas implícitamente ha sido de mucho interés en la historia de la matemática desde que Descartes formalizó su idea en 1637. Joseph Lagrange demostró lo que probablemente sea el primer teorema de función implícita, aunque sería más acertado decir teorema de función inversa. La *Fórmula de Inversión de Lagrange* apareció por primera vez en *Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries* publicado en 1770, con el propósito específico de resolver el problema de Kepler.

Este trabajo se ha realizado con la finalidad de mostrar el largo alcance de la Fórmula de Inversión de Lagrange. Haremos un recorrido en un principio histórico para luego adentrarnos en varias de las distintas ramas de la matemática y examinar con moderado detalle cómo se demuestra y se aplica dicho resultado.

Dependiendo del área de matemática en el que trabajemos variarán las hipótesis del Teorema de Inversión de Lagrange, pero a modo genérico, podemos introducir la Fórmula de Inversión como la solución de la ecuación

$$\alpha - x + \varphi(x) = 0 \tag{P1}$$

siendo  $x$  el valor a determinar y  $\varphi$  una función de  $x$ . Al caso particular  $\alpha = 0$  lo llamaremos (P2). Este tipo de ecuaciones aparecen de manera natural tanto en problemas físicos como en problemas matemáticos, de ahí el propósito de esta monografía. Si bien existen varias generalizaciones de la fórmula de inversión, aquí sólo nos centraremos en la forma básica estudiada por Lagrange, la cual resultará suficiente para abarcar una gran cantidad de problemas.

En el Capítulo 1, hablaremos sobre Johannes Kepler y sus famosas leyes de movimiento planetario, del interés de Lagrange por resolver el problema de Kepler y el primer resultado obtenido a partir de su fórmula de inversión.

En el Capítulo 2, recordando varios tópicos de Funciones Analíticas, dotaremos a la función  $\varphi$  de condiciones necesarias para resolver la ecuación (P1), y así formalizar el estudio realizado por Lagrange.

En el Capítulo 3 nos alejaremos de los aspectos históricos de este trabajo y estudiaremos la ecuación (P2) mediante teoría de series formales, y finalmente daremos dos demostraciones algebraicas de la fórmula de inversión.

En el Capítulo 4 usaremos nuevamente las series formales, pero aplicadas esta vez desde un punto de vista combinatorio. Siguiendo el trabajo realizado por Joyal, usando teoría de especies daremos la demostración de la fórmula de inversión para series generatrices exponenciales que Labelle publicó en [10].

Demostraciones y otros aspectos de menor envergadura, pero no menos interesantes, los dejaremos para el Capítulo 5 y, finalmente, mostraremos las aplicaciones en el Capítulo 6.

## CAPÍTULO 1

### Desarrollo original y antecedentes históricos.

El impacto de Lagrange en las ciencias, especialmente en física matemática, aún sigue vigente. Uno de los resultados más trascendentales fue su Teorema de Inversión, creado particularmente para resolver la ecuación de Kepler, y que más tarde se usaría en distintas ramas de la matemática. Como veremos más adelante en este capítulo, la expresión de la Fórmula de Inversión viene dada como una serie de potencia, lo cual resultó sumamente satisfactorio debido al inmenso interés que existía en el siglo XVIII por la teoría de series, y hasta en tiempos actuales, resulta mucho más cómodo y conveniente trabajar con estas expresiones debido a su funcionalidad.

En este capítulo hablaremos de la teoría de Kepler sobre el movimiento de los planetas, la ecuación de Kepler, soluciones aproximadas de la ecuación de Kepler y el interés de Lagrange en la mecánica celeste. Luego mostraremos los resultados concernientes que Lagrange publicó en [11] y finalmente la solución de la ecuación de Kepler.

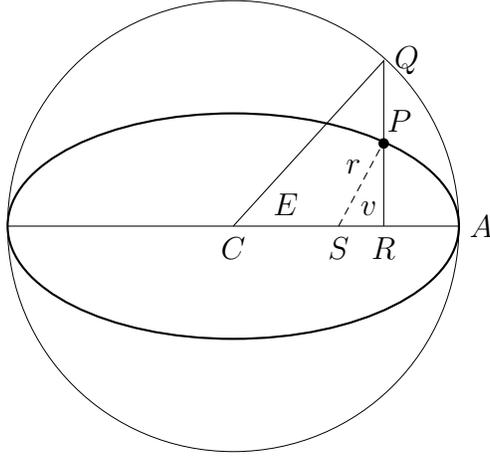
#### 1. El problema de Kepler.

Después de muchos años de trabajo Johannes Kepler anunció sus famosas leyes de movimiento planetario a comienzos del siglo XVII. Estas leyes establecen:

- (1) Los planetas viajan sobre una órbita elíptica con el sol sobre uno de sus focos.
- (2) Se mueven con una velocidad tal que las líneas que unen los planetas con el sol barren igual área en igual unidades de tiempo.
- (3) El cuadrado del período de la órbita de cada planeta es proporcional al cubo del ancho de la elipse que recorre.

Kepler dio a conocer las primeras dos leyes en *Astronomia Nova* publicado en 1609, y la tercera ley en *Harmonice Mundi* publicado en 1619. Estas leyes se basaron en observaciones detalladas de la órbita de Marte y para los seis planetas que se conocían en ese entonces los resultados fueron bastante exactos. A continuación, mostraremos la deducción para obtener el *Problema de Kepler*.

Supongamos que un planeta  $P$  se mueve contrarreloj en una órbita elíptica alrededor del sol con excentricidad  $\epsilon$ ,  $0 < \epsilon < 1$ , semieje mayor  $a$ , y período  $T$ . Teniendo en cuenta la Figura 1.1, la idea es hallar la posición del planeta  $P$  bajo las coordenadas polares  $(r, v)$  relativas al sol  $S$  en un tiempo  $t$ .



**Figura 1.1.** *Problema de Kepler.*

En astronomía, una *anomalía* es una cantidad angular usada para describir la posición en la órbita de un cuerpo celeste. El problema de Kepler cuenta con tres anomalías a considerar. Si queremos calcular las coordenadas  $(r, v)$  en el tiempo  $t$ , esas tres anomalías son: la cantidad  $v = \angle PSA$  llamada *anomalía real*, la cantidad  $E = \angle QCA$  llamada *anomalía excéntrica*, y por último, la *anomalía media*  $M$  que viene dada por la ecuación

$$M = \frac{2\pi t}{T},$$

la cual representa el ángulo que recorre un planeta ficticio que se mueve uniformemente en la órbita circular.

Una relación entre  $r$  y  $v$  en el tiempo  $t$  viene dada por

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos v}. \quad (1.1)$$

Con  $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$ , se sabe que

$$\frac{b}{a} = \frac{PR}{QR} = \frac{\text{Area } PRA}{\text{Area } QRA}, \quad (1.2)$$

así que

$$r \sin v = b \sin E, \quad (1.3)$$

$$r \cos v = CR - CS = a \cos E - a\epsilon \quad (1.4)$$

y

$$r = a(1 - \epsilon \cos E). \quad (1.5)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \tan \frac{v}{2} &= \frac{\text{sen } v}{1 + \cos v} = \frac{r \text{ sen } v}{r + r \cos v} \\ &= \frac{b \text{ sen } E}{a(1 - \epsilon \cos E) + a \cos E - a\epsilon} \\ &= \frac{b \text{ sen } E}{a(1 - \epsilon)(1 + \cos E)} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \text{ sen } E}{(1 - \epsilon)(1 + \cos E)}. \end{aligned}$$

y así

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} \tan \frac{E}{2}. \quad (1.6)$$

Es decir, las coordenadas  $(r, v)$  pueden ser determinadas por  $E$ . Luego, la segunda ley de Kepler implica que

$$\begin{aligned} \text{Area } PSA &= \left(\frac{t}{T}\right) (\text{Área encerrada por la órbita}) \\ &= \frac{t\pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}}{T} \\ &= \frac{1}{2} M a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}. \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} \text{Area } PSA &= \text{Area } PSR + \text{Area } PRA \\ &= \frac{1}{2} a(\cos E - \epsilon)(r \text{ sen } v) + \frac{b}{a} \text{Area } QRA \\ &= \frac{1}{2} ab(\cos E - \epsilon) \text{ sen } E + \frac{b}{a} \left( \frac{1}{2} a^2 E - \frac{1}{2} a^2 \text{ sen } E \cos E \right) \\ &= \frac{1}{2} a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} (E - \epsilon \text{ sen } E), \end{aligned}$$

de donde obtenemos la *Ecuación de Kepler*

$$M = E - \epsilon \text{ sen } E. \quad (\text{EK})$$

Resumiendo, si conocemos  $t$  y  $M$  y podemos hallar una solución  $E$  de (EK), entonces las ecuaciones (1.5) y (1.6) determinarán la posición  $(r, v)$  del planeta  $P$  en el tiempo  $t$ . Note además que esta ecuación es comparable con (P1), siendo  $E$  la variable a determinar y la función  $\varphi(x) = \epsilon \operatorname{sen}(x)$ .

Desde el momento de su publicación, el interés general por resolver el problema (EK) fue tan desmesurado que podemos encontrar una gran bibliografía dedicada solamente a buscar su solución. Para ilustrar la importancia de la Fórmula de Inversión de Lagrange, daremos tres ejemplos (cronológicamente previos al resultado de Lagrange) de aproximaciones al problema (EK).

EJEMPLO 1.1 (Solución de Kepler). La solución planteada por el propio Kepler fue de esta manera: dado  $\epsilon$  y  $M$ , aproximamos una solución  $E_0$  de  $E$  y calculamos

$$M_0 = E_0 + \epsilon \operatorname{sen} E_0.$$

Sea  $E_1 = E_0 + (M - M_0)$  y calculamos

$$M_1 = E_1 + \epsilon \operatorname{sen} E_1.$$

Luego, calculamos  $E_2 = E_1 + (M - M_1)$ , la cual Kepler determinó que es una mejor aproximación de  $E$ . Para los planetas que se conocían estas cuentas producían valores aceptables de  $E$  en dos pasos, aunque podía ser problemático para Mercurio, cuya excentricidad es mayor que 0.2.

EJEMPLO 1.2 (Aproximación por series de Taylor). Fijando  $M$ , una manera bastante sencilla de obtener una aproximación de  $E$  es considerando la serie de arcoseno y  $E - M = \operatorname{arsen}(\operatorname{sen}(E - M))$  para escribir

$$\epsilon \operatorname{sen} E = E - M = \operatorname{sen}(E - M) + \frac{1}{6} \operatorname{sen}^3(E - M) + \frac{3}{40} \operatorname{sen}^5(E - M) + \dots$$

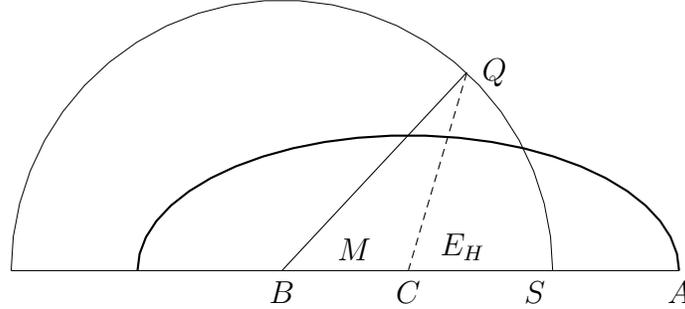
Luego,

$$\epsilon \operatorname{sen} E \approx \operatorname{sen}(E - M);$$

es decir, una aproximación al problema (EK) es hallar un valor de  $E$  tal que

$$\epsilon \approx \frac{\operatorname{sen}(E - M)}{\operatorname{sen} E}.$$

EJEMPLO 1.3 (Solución de Horrocks). En 1638 Jeremiah Horrocks usó un método diferente para resolver (EK). La proveniencia de la solución es más interesante debido a los argumentos geométricos que se utilizan.



**Figura 1.2.** *Dibujo de Horrocks*

Alrededor del foco vacío  $B$  se describe un círculo de radio  $AC$ . Sobre este círculo se marca un punto  $Q$ , tal que la anomalía media satisfaga  $M = \angle QBS$ . La aproximación de Horrocks,  $E_H$ , de  $E$  es el ángulo  $\angle QCS$ . Horrocks dedujo que

$$\tan\left(E_H - \frac{M}{2}\right) = \left(\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}\right) \tan \frac{M}{2} \quad (1.7)$$

y demostró a partir de esta ecuación que

$$E_H - E \approx \frac{1}{6}\epsilon^3 \sin^3 M.$$

La deducción de todos los resultados de Horrocks puede hallarlos en [5].

■

Estos tres ejemplos no son más que una pequeña muestra de lo realizado antes de la intervención de Lagrange, sin embargo, una característica común de la mayoría de los resultados de (EK) publicados entre los siglos XVII y XVIII es que tendían a fallar para distintos valores de la excentricidad  $\epsilon$ . Particularmente, los ejemplos mostrados fallan en precisión para valores altos de  $\epsilon$ . Por esta razón, la solución planteada por Lagrange a partir de su Fórmula de Inversión representa el primer resultado destacable de (EK).

## 2. Lagrange y su Teorema de Inversión.

A pesar de ser considerado uno de los más grandes matemáticos de la historia, Lagrange alcanzó la fama con sus tratados en mecánica celeste y es bien sabido que sus investigaciones

matemáticas siempre tenían un trasfondo físico. A corta edad se sintió tentado a seguir la carrera de matemática después de haber leído un artículo de Edmund Halley sobre el uso del álgebra en óptica. Con tan solo 19 años, recibió ovaciones de Euler por los resultados obtenidos en su investigación de curvas tautócronas. Ayudó a fundar la Real Academia de Ciencias de Turín, cuyo objetivo principal era crear la revista *Mélanges de Turin*, donde fueron publicados en los tres primeros volúmenes las investigaciones de Lagrange, que incluía temas relacionados con cálculo de variaciones, probabilidades, energía cinética y propagación de sonido. Probablemente las más grandes contribuciones de Lagrange son las relacionadas con mecánica del universo, siendo *Mécanique Analytique* de 1788 su trabajo más famoso y controversial por contener ecuaciones generales que solucionaban todos los problemas de mecánica y además por no contar con ningún tipo de diagrama geométrico, que eran de su completo desagrado. Como ya hemos dicho, fue en 1770 cuando Lagrange dio finalmente la solución exacta de (EK), el cual había llamado su atención por ser éste un problema clásico de mecánica celeste. Como matemático, Lagrange estudió en un principio la ecuación (P1), que generaliza en todos los aspectos a (EK). A continuación, plantearemos lo que será la “primera versión” del Teorema de Inversión de Lagrange de este trabajo y mostraremos el cálculo realizado por Lagrange, cuya deducción se encuentra desplegada entre las secciones 8 y 10 de [11].

TEOREMA 1.4 (Inversión de Lagrange). *Consideremos la ecuación*

$$\alpha - x + \varphi(x) = 0, \quad (\text{P1})$$

donde  $\varphi$  es una función cualquiera de  $x$ . Si  $p$  es una raíz de esta ecuación, entonces

$$p = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \varphi(x)^n \right], \quad (\text{FIL})$$

cambiando  $x$  por  $\alpha$  después de diferenciar.

En adelante, nos referiremos a la Fórmula de Inversión de Lagrange simplemente como (FIL). Ahora mostraremos el desarrollo realizado por Lagrange que a pesar de no ser una prueba propiamente dicha y de resultar poco rigurosa en muchos de sus planteamientos y en su conclusión, igualmente la delimitaremos en un esquema de demostración. En el siguiente desarrollo, veremos que en la deducción de Lagrange no se trabaja con una función  $\varphi$  cualquiera, sino con polinomios de la forma  $p(x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - \dots + (-1)^n x^n$ . La

idea es demostrar que una raíz  $p_1$  del polinomio  $p(x)$  es de la forma (FIL). En los capítulos siguientes, sustituiremos la palabra “cualquiera” del Teorema 1.4 por hipótesis más fuertes.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la ecuación,

$$a_0 - a_1x + a_2x^2 - \dots + (-1)^n x^n = 0,$$

donde  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  son coeficientes cualesquiera. Si  $p_1, p_2, \dots, p_n$  son las raíces, entonces

$$a_0 - a_1x + a_2x^2 - \dots + (-1)^n x^n = a_0 \left(1 - \frac{x}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{p_n}\right).$$

Dividiendo entre  $-a_1x$  a ambos lados de la expresión obtendremos

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a_0}{a_1x} - \xi &= -\frac{a_0}{a_1x} \left(1 - \frac{x}{p_1}\right) \left(1 - \frac{x}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{p_n}\right) \\ &= \frac{a_0}{a_1p_1} \left(1 - \frac{p_1}{x}\right) \left(1 - \frac{x}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{p_n}\right), \end{aligned}$$

siendo  $\xi = \frac{a_2x - \dots + (-1)^n x^{n-1}}{a_1}$ . Aplicando logaritmo natural,

$$\log \left(1 - \frac{a_0}{a_1x} - \xi\right) = \log \left(\frac{a_0}{a_1p_1}\right) + \log \left(1 - \frac{p_1}{x}\right) + \sum_{k=2}^n \log \left(1 - \frac{x}{p_k}\right).$$

Teniendo en cuenta que

$$1 - \frac{a_0}{a_1x} - \xi = \left(1 - \frac{a_0}{a_1x}\right) \left(1 - \frac{\xi}{1 - \frac{a_0}{a_1x}}\right),$$

en términos de serie de Taylor, la expresión anterior nos queda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{a_0}{a_1x}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\xi}{1 - \frac{a_0}{a_1x}}\right)^k = \log \left(\frac{a_1p_1}{a_0}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{p_1}{x}\right)^k + \sum_{k=2}^n \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{x}{p_k}\right)^r\right).$$

Note que el coeficiente de  $x^{-1}$  de la parte derecha es  $p_1$ . Por lo que nos limitaremos a calcular el coeficiente de  $x^{-1}$  de la parte izquierda. Cada potencia  $\xi^k$  vamos a identificarla de manera general por los polinomios

$$\xi^k = \sum_{i=0}^{\infty} \varpi_{k,i} x^i$$

y recordemos que

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{a_0}{a_1x}}\right)^k = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+k-1}{j} \left(\frac{a_0}{a_1x}\right)^j.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} \left( \frac{\xi}{1 - \frac{a_0}{a_1 x}} \right)^k &= \frac{1}{k} \xi^k \left( \frac{1}{1 - \frac{a_0}{a_1 x}} \right)^k \\
&= \frac{1}{k} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \varpi_{k,i} x^i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+k-1}{j} \left( \frac{a_0}{a_1 x} \right)^j \right) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+k-1}{j} \varpi_{k,i} \left( \frac{a_0}{a_1} \right)^j x^{i-j}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Así, cuando  $j = i + 1$  obtendremos todos los términos correspondientes de  $x^{-1}$ . Es decir, de la ecuación que obtuvimos al expandir por series de Taylor se tiene:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{a_0}{a_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+k}{i+1} \varpi_{k,i} \left( \frac{a_0}{a_1} \right)^{i+1} \\
&= \frac{a_0}{a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \varpi_{1,i} \left( \frac{a_0}{a_1} \right)^{i+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+k}{i+1} \varpi_{k,i} \left( \frac{a_0}{a_1} \right)^{i+1} \\
&= \frac{a_0}{a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \varpi_{1,i} \left( \frac{a_0}{a_1} \right)^{i+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+k)!}{(i+1)!} \varpi_{k,i} \left( \frac{a_0}{a_1} \right)^{i+1}.
\end{aligned}$$

Notemos que para  $k \geq 2$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (x\xi)^k &= \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} x^k \xi^k \\
&= \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \sum_{i=0}^{\infty} \varpi_{k,i} x^{i+k} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+k)!}{(i+1)!} \varpi_{k,i} x^{i+1}.
\end{aligned}$$

Llamando  $\varphi(x) = x\xi$  obtendremos que

$$p_1 = x + \varphi(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (\varphi(x))^k,$$

cuando sustituimos  $\frac{a_0}{a_1}$  por  $x$ .

■

Luego de este análisis, Lagrange compara la ecuación (P1) con

$$\frac{a_0}{a_1} - x + x\xi = 0,$$

llamando  $\alpha = \frac{a_0}{a_1}$  y  $\varphi(x) = x\xi$ . Si realizamos el cambio  $\varphi(x) = t\phi(x)$  obtendremos que la raíz  $p$  de (P1) es una serie de potencias de  $t$ , cuando  $x = \alpha$ :

$$p = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \phi(x)^n \right].$$

Notemos además que en el Teorema 1.4 no se establecen criterios de convergencia, sin embargo, la expansión de  $p$  sugiere que el teorema funciona bajo ciertas condiciones que Lagrange anexó en trabajos posteriores. En el Capítulo 2 hablaremos de los aspectos analíticos de (FIL).

Lagrange dio además una expresión para las potencias de la raíz  $p$ . Para ello sólo debió considerar en la ecuación (1.8) los valores  $j = i + n$ , con  $n \geq 1$ , y así obtuvo que

$$p^n = x^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k!} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (x^{n-1} \varphi(x))^k, \quad (1.9)$$

al sustituir  $x = \alpha$  después de diferenciar. A partir de esto, Lagrange propuso un teorema más general:

**TEOREMA 1.5** (Inversión de Lagrange Generalizado). *Si  $p$  es una raíz de*

$$\alpha - x + t\phi(x) = 0 \quad (P1)$$

*y  $\psi$  es una función definida en  $p$  entonces*

$$\psi(p) = \psi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (\psi'(x)\phi(x)^n), \quad (FIG)$$

*cambiando  $x$  por  $\alpha$  después de diferenciar.*

Lagrange consideró la prueba de este teorema bastante sencilla debido a la ecuación (1.9). En el Capítulo 2 haremos una demostración formal del Teorema 1.5.

### 3. Sobre el problema de Kepler.

Lagrange publicó la solución de (EK) en [12], trabajo dedicado exclusivamente al problema de Kepler. Comparando (EK) con (P1), obtenemos el caso particular en el que  $\alpha = M$  y  $\varphi(x) = \epsilon \sin(x)$ . Aplicando (FIL),

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(M) \epsilon^n, \quad (1.10)$$

donde,

$$a_n(M) = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \operatorname{sen}^n(x) \right]_{x=M}.$$

En lo que sigue, la notación de la derecha de esta última igualdad se usará para resumir que sustituimos  $x = M$  después de diferenciar. La solución (1.10) pronto lograría establecer una modalidad estándar para hallar la solución de (EK) como serie. Muchos se interesaron en hallar fórmulas explícitas para los coeficientes  $a_n(M)$ , el mismo Lagrange trabajaría posteriormente para intentar escribir su solución como una serie de Fourier de senos. Por otro lado, Laplace en su *Mécanique céleste* de 1799 hizo cálculos para hallar el radio de convergencia de la serie (1.10). Los estudios realizados por Laplace dieron pie al apareamiento de la teoría de cálculo infinitesimal como lo planteó Cauchy, de la cual extraeremos ciertas definiciones y resultados para formalizar la demostración del Teorema 1.5.

## CAPÍTULO 2

### Enfoque analítico.

Teniendo en cuenta que en el capítulo anterior nada se dijo sobre la convergencia de (FIL), cualquiera podría preguntarse si la solución del problema de Kepler converge para valores  $M$  y  $\epsilon$  determinados. Fue Laplace quien en un principio se interesó en esta cuestión, y estableció ciertas relaciones para garantizar que la solución (1.10) en efecto converge. Sus argumentos fueron publicados en *Mécanique céleste*, y dedujo que la solución (1.10) converge, siempre que

$$\epsilon < k = \frac{2\sqrt{w(1-w)}}{1-2w},$$

donde  $w$  es la solución de la ecuación:

$$\frac{1-w}{w} = \exp\left(\frac{2}{1-2w}\right).$$

Laplace determinó que  $w \approx 0.08307$  y  $k \approx 0.66195$ . Poco conforme con estos resultados, Cauchy determinó que el valor de  $k$  debía ser aproximadamente  $0.6627434\dots$ . Podrá leer un análisis completo de este hecho en [5]. Otra observación que el lector puede haber notado, es que Lagrange afirma que la solución de la ecuación (P1) viene dada por (FIL) si esta existe, ¿pero será posible dar condiciones para que esta solución exista? Más aún, ¿será posible que esa solución sea única? Cauchy escribiría en [3]:

“Atraído por un resultado tan digno de mención, me pregunté si no sería posible describir en términos generales las condiciones de convergencia de la expansión de Lagrange... Mis estudios me llevaron a reconocer que las condiciones siempre pueden ser deducidas para la solución de una ecuación trascendental”.

Siguiendo el estudio realizado por Cauchy, en adelante trabajaremos con funciones sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$ , lo cual para (EK) esto no significará ningún problema, puesto que en ciertos casos será posible pasar los resultados obtenidos a  $\mathbb{R}$ . Nos limitaremos simplemente a demostrar el Teorema 1.5, puesto que nada nuevo surge de examinar cada teorema por separado.

También será necesario recordar definiciones y resultados de Variable Compleja antes de poder establecer las hipótesis deseadas.

La definición fundamental de análisis complejo corresponde a la analiticidad de una función de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$ . Asumiendo que el lector ya está familiarizado con todos los aspectos topológicos con los que se puede dotar a un espacio con producto interno como  $\mathbb{C}$ , tenemos que una función compleja es *analítica* (u *holomorfa*) en un punto  $z_0$  si es diferenciable en todo punto de un entorno de  $z_0$ . Decimos que una función  $f$  es analítica sobre un conjunto abierto  $U \subseteq \mathbb{C}$  si es analítica en cada punto de  $U$ . En análisis complejo, es suficiente pedir la analiticidad de una función para poder obtener su serie de Taylor, lo cual constituye una ventaja por encima del análisis real donde se requiere una mayor cantidad de condiciones. De esta manera, observando cómo se presenta el Teorema 1.5, parece natural exigir simplemente la analiticidad de las funciones  $\phi$  y  $\psi$ , viendo a ambas como funciones complejas.

Una propiedad importante de funciones holomorfas, y que se presentará de manera implícita en la demostración del Teorema 1.5, es:

**TEOREMA 2.1 (Cauchy-Goursat).** *Si  $f$  es una función holomorfa dentro y sobre un contorno cerrado simple  $C$ , entonces*

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

La demostración planteada por Cauchy depende fuertemente de uno de sus resultados más importantes de análisis complejo:

**TEOREMA 2.2 (Formula Integral de Cauchy).** *Supongamos que una función  $f$  es holomorfa sobre un conjunto abierto  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Sean  $\alpha \in U$  y  $r > 0$  tales que  $\bar{D}(\alpha, r) \subseteq U$ . Entonces,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(\alpha, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (2.1)$$

para cada  $z \in D(\alpha, r)$ .

La demostración de este teorema no nos resulta indispensable, sino más bien lo que el teorema en sí implica, aunque si desea leer una demostración puede hallarla en [6]. A partir de la fórmula integral se puede demostrar que una función holomorfa posee derivada de cualquier orden y además, si tenemos una función  $f$  bajo las hipótesis del Teorema 2.2, para

$n \geq 1$

$$f^{[n-1]}(z) = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} f(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_{\partial D(\alpha, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi.$$

Para solucionar las inquietudes que surgieron al comienzo de este capítulo sobre la existencia y unicidad de la solución de (P1), recordaremos uno de los resultados más importantes dados en un curso básico de Variable Compleja:

**TEOREMA 2.3 (Rouché).** *Sean  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  funciones holomorfas sobre un conjunto abierto  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Si  $\overline{D}(\alpha, r) \subseteq U$  y para cada  $z \in \partial D(\alpha, r)$  se satisface,*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, \quad (2.2)$$

*entonces el número de ceros de  $f$  en  $D(\alpha, r)$  es igual al número de ceros de  $g$  en  $D(\alpha, r)$ , contando multiplicidad.*

Ahora sí estamos en condiciones de enunciar y demostrar formalmente el Teorema 1.5. Seguiremos el desarrollo planteado por Whittaker en [18]:

**TEOREMA 2.4 (Versión analítica de FIG).** *Sean  $\phi$  y  $\psi$  funciones holomorfas sobre el disco  $D(\alpha, r) \subset \mathbb{C}$  y continuas sobre  $\overline{D}(\alpha, r)$ . Si la magnitud de  $t$  es tal que*

$$|t\phi(z)| < |z - \alpha| \quad (2.3)$$

*para todo  $z \in \partial D(\alpha, r)$ , entonces*

$$z - \alpha - t\phi(z) = 0 \quad (P1)$$

*tiene exactamente una raíz  $p \in D(\alpha, r)$  y si consideramos a esa raíz  $p$  como dependiente de  $t$  entonces*

$$\psi(p) = \psi(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (\psi'(z)\phi(z)^n) \right]_{z=\alpha}. \quad (\text{FIG})$$

**DEMOSTRACIÓN.** Llamemos  $f(z) = z - \alpha$  y  $g(z) = z - \alpha - t\phi(z)$ , entonces la condición (2.3) y el resultado de Rouché nos dicen que el Teorema 2.4 está bien planteado, es decir, la ecuación (P1) tiene solución y además es única, puesto que  $f(z)$  sólo posee una raíz en  $D(\alpha, r)$ . Ahora, si  $\phi(p) = 0$  para algún  $p \in \overline{D}(\alpha, r)$  obtenemos la solución trivial  $p = \alpha$ . Por lo que trabajaremos con el caso  $\phi(z) \neq 0$  en  $\overline{D}(\alpha, r)$ .

Fijemos  $t$  para el cual el problema (P1) tenga solución, es decir, que satisfaga la condición (2.3), y asumamos la solución  $p = p(t)$ . Definamos

$$\theta(z) = \frac{z - \alpha}{\phi(z)}. \quad (2.4)$$

Tenemos que  $\theta(p) = t$ .

Notemos que  $\theta(z)$  es holomorfa en  $D(\alpha, r)$  y que  $\theta(z) - \theta(p)$  tiene exactamente un cero en  $z = p$ . Podemos escribir

$$\theta(z) = \theta(p) + (z - p)R(z), \quad (2.5)$$

donde  $R(z)$  es una función que no se anula en  $\bar{D}(\alpha, r)$ . Usando el Teorema 2.2 y el hecho de que  $R(p) = \theta'(p)$ , calculamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(\alpha, r)} \frac{\psi(z)\theta'(z)}{\theta(z) - \theta(p)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(\alpha, r)} \frac{\psi(z)\theta'(z)}{(z - p)R(z)} dz \\ &= \frac{\psi(p)\theta'(p)}{R(p)} \\ &= \psi(p). \end{aligned}$$

La condición (2.3) es equivalente a  $|\theta(p)| < |\theta(z)|$ , y así

$$\frac{\theta'(z)}{\theta(z) - \theta(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta'(z)\theta^n(p)}{\theta^{n+1}(z)}. \quad (2.6)$$

De esta manera obtenemos,

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(\alpha, r)} \frac{\psi(z)\theta'(z)}{\theta(z) - \theta(p)} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(\alpha, r)} \frac{\psi(z)\theta'(z)\theta^n(p)}{\theta^{n+1}(z)} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n(p) \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(\alpha, r)} \frac{\psi(z)\theta'(z)}{\theta^{n+1}(z)} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(\alpha, r)} \frac{\psi(z)\theta'(z)}{\theta^{n+1}(z)} dz \\ &= \psi(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(\alpha, r)} \frac{\psi(z)\theta'(z)}{\theta^{n+1}(z)} dz. \end{aligned}$$

La integración por partes nos da para  $n \geq 1$

$$\oint_{\partial D(\alpha, r)} \frac{\psi(z)\theta'(z)}{\theta^{n+1}(z)} dz = \frac{1}{n} \oint_{\partial D(\alpha, r)} \frac{\psi'(z)}{\theta^n(z)} dz$$

y así,

$$\psi(p) = \psi(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{1}{2n\pi i} \oint_{\partial D(\alpha, r)} \frac{\psi'(z)}{\theta^n(z)} dz.$$

Sustituyendo (2.4) en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \psi(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{1}{2n\pi i} \oint_{\partial D(\alpha, r)} \frac{\psi'(z)\phi^n(z)}{(z-\alpha)^n} dz \\ &= \psi(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (\psi'(z)\phi^n(z)) \right]_{z=\alpha}. \end{aligned}$$

■

Al comienzo de este capítulo dijimos que el Teorema 2.4 sirve para resolver problemas de variable real de la forma (P1). Supongamos que tenemos una función real  $f(x)$  que admite serie de Taylor centrada en un valor  $\alpha \in \mathbb{R}$  y con radio de convergencia  $0 < r < \infty$ , es decir,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \alpha)^n,$$

donde  $a_n$  son los coeficientes que obtenemos por el Teorema de Taylor y  $x \in (\alpha - r, \alpha + r)$ . Recordando las propiedades de las series de Taylor, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x - \alpha|^n < \infty,$$

para todo  $x \in (\alpha - r, \alpha + r)$ , puesto que las series de Taylor satisfacen la convergencia absoluta en sus intervalos de convergencia.

Supongamos además que para los valores fronteras  $x = \alpha - r$  y  $x = \alpha + r$  se cumple

$$t \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x - \alpha|^n = t \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < |x - \alpha| = r, \quad (2.7)$$

para alguna magnitud  $t \in \mathbb{R}^+$ . Esta última desigualdad implica que la serie de Taylor de  $f(x)$  converge para los valores frontera, por lo que el entorno de convergencia en realidad es el intervalo cerrado  $[\alpha - r, \alpha + r]$ . Estamos en condiciones de resolver el problema (P1) para la función  $f(x)$ .

Definamos sobre el entorno complejo  $D(\alpha, r)$  la siguiente función:

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n.$$

Esta función está bien definida, ya que para todo  $z \in \overline{D}(\alpha, r)$  existe  $x \in [\alpha - r, \alpha + r]$  tal que  $|z - \alpha| = |x - \alpha|$  y aprovechando el hecho de que  $f(x)$  converge absolutamente, entonces  $\phi(z)$  converge para todo valor de  $z$  en su dominio. Por la manera como está definida  $\phi(z)$  tenemos que es analítica en  $D(\alpha, r)$ , continua en  $\overline{D}(\alpha, r)$  y la desigualdad (2.7) garantizará que se satisface la condición (2.3) del Teorema 2.4. De esta manera, obtenemos que el problema

$$z - \alpha - t\phi(z) = 0,$$

tiene exactamente una solución  $p \in D(\alpha, r)$  de la forma

$$p = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (\phi(z)^n) \right]_{z=\alpha}.$$

Dado que todos los términos de esta serie son números reales, entonces esta solución  $p$  debe estar contenida en el intervalo abierto  $(\alpha - r, \alpha + r)$ , quedando resuelto así el problema en variable real.

## CAPÍTULO 3

### Enfoque algebraico.

En este capítulo, debido al interés de querer establecer una estructura de grupo sobre el conjunto de series de potencias invertibles con coeficientes en  $\mathbb{C}$  (aunque podríamos trabajar con cualquier cuerpo de característica 0), estudiaremos exclusivamente el problema (P2) a través de distintos operadores.

Daremos dos demostraciones de (FIG), una corta que surge como consecuencia directa de varios resultados, y otra larga, pero no menos atractiva. Comenzaremos con ciertas definiciones necesarias para ambas pruebas.

Trabajaremos sobre dos espacios; el de series de potencias formales y el de series de Laurent formales. Este último contendrá al de series formales, y será indispensable para poder hallar los coeficientes de la serie (FIG) en ambas demostraciones. Respectivamente, denotaremos cada espacio por  $\mathbb{C}[z]$  y  $\mathbb{C}(z)$  (independientemente de la notación usual usada para anillos de polinomios), siendo  $z$  el término “indefinido”. Los elementos de  $\mathbb{C}[z]$  son de la forma

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i,$$

donde  $a_i \in \mathbb{C} \forall i \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Evidentemente, este conjunto es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial con la suma término a término y la multiplicación por un escalar usual. Denotaremos la operación suma de dos series  $f(z)$  y  $g(z)$  como  $(f + g)(z)$ , y la multiplicación por un escalar  $\alpha \in \mathbb{C}$  por  $\alpha f(z)$ . Más aún, podemos definir  $\mathbb{C}[z]$  como un *álgebra*, siendo el producto de vectores el llamado *producto de Cauchy*: si

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$$

son elementos de  $\mathbb{C}[z]$ , entonces su producto es

$$(f \cdot g)(z) = f(z)g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j=k} a_i b_j \right) z^k. \quad (3.1)$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , denotaremos como  $f^n(z)$  al producto de una serie  $f(z)$  consigo mismo  $n$  veces. Otra característica de  $\mathbb{C}[z]$  es que posee unidad, siendo ésta  $h(z) = 1$ . Cuando existe unidad multiplicativa es normal preguntarse qué elementos poseen inversa multiplicativa (ó recíproco). Sea  $f(z)$  como antes, queremos hallar  $g(z)$  tal que  $(f \cdot g)(z) = 1$ . Del producto (3.1) obtenemos que  $a_0 b_0 = 1$ , es decir, tanto  $f(z)$  como  $g(z)$  deben poseer término independiente distinto de 0. Además, para  $k > 0$  obtenemos la siguiente fórmula de recurrencia para los términos  $b_k$ :

$$b_k = -\frac{1}{a_0} \sum_{0 < i \leq k} a_i b_{k-i},$$

por lo que podemos concluir que  $g(z)$  es único, ya que sus coeficientes vienen determinados de manera única por la ecuación anterior. Denotaremos al recíproco de una serie  $f(z)$  por  $f^{-1}(z)$ .

Debido a lo molesto que es trabajar con la notación de serie, será usual a partir de este punto verificar la fórmula (FIG) coeficiente a coeficiente. Esta manera de trabajar se formaliza a partir de la siguiente familia de funcionales definidos en  $\mathbb{C}[z]$ :

DEFINICIÓN 3.1. Para cualquier  $f \in \mathbb{C}[z]$  y  $n \in \mathbb{N}$ , definimos

$$[z^n]f(z) = a_n \text{ (coeficiente } n\text{-ésimo de } f)$$

y llamamos a  $[z^n]$  *funcional de coeficiente*.

Es fácil verificar la linealidad de estos funcionales, más nos interesa lo simple que resulta trabajar con esta notación. Note que el coeficiente  $n$ -ésimo de la serie (FIG) en términos de los funcionales de coeficiente viene dado por

$$\frac{1}{n} [z^{n-1}] \psi'(z) \phi^n(z),$$

cuando  $\alpha = 0$ , lo que hace mucho más atractiva la solución de Lagrange. Para las series de  $\mathbb{C}[z]$ , será sumamente relevante la siguiente definición:

DEFINICIÓN 3.2. Para una serie de potencia  $f \in \mathbb{C}[z]$  definimos

$$\text{ord } f = \min\{m \in \mathbb{N} : [z^m]f(z) \neq 0\}$$

como el *orden* de  $f$ . Por convención,  $\text{ord } 0 = \infty$ .

El orden satisface la propiedad  $\text{ord } f \cdot g = \text{ord } f + \text{ord } g$ . Además, es el orden de una serie de potencia  $f$  lo que determina si tiene o no recíproco.

**PROPOSICIÓN 3.3** (Condición de recíproco). *Una serie de potencia  $f \in \mathbb{C}[z]$  tiene recíproco si y sólo si  $\text{ord } f = 0$ ; en este caso el recíproco es único.*

La demostración de esta proposición ya se realizó.

Ya sabemos qué elementos de  $\mathbb{C}[z]$  tienen recíproco, pero para futuros propósitos nos gustaría extender esto a cada elemento de ese espacio. Sea  $f(z) \in \mathbb{C}[z]$  con  $\text{ord } f = m$ . Note que podemos escribir  $f(z) = z^m e(z)$ , con  $e(z) \in \mathbb{C}[z]$  y  $\text{ord } e = 0$ . Para estos elementos definamos  $f^{-1}(z) = z^{-m} e^{-1}(z)$ . Si  $m > 0$ ,  $f^{-1}(z)$  no se encuentra en  $\mathbb{C}[z]$  por poseer potencias negativas, pero esta serie es completamente compatible con el producto de Cauchy (3.1) considerando a  $k \in \mathbb{Z}$ , por lo que procederemos a expandir el espacio a este tipo de series. Note también que las nuevas series son compatibles con la definición de orden, de la cual podemos obtener que  $\text{ord } f^{-1} = -\text{ord } f$ . Este nuevo  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial lo llamaremos *espacio de Laurent*, y lo denotamos por  $\mathbb{C}(z)$ . Además, la multiplicación de una serie de Laurent  $f(z)$  con el recíproco de otra serie  $g(z)$  lo llamaremos *cociente*, y lo denotaremos por  $(f/g)(z)$ .

**DEFINICIÓN 3.4.** En  $\mathbb{C}(z)$  definimos el *residuo* como el funcional de coeficiente

$$\text{Res} = [z^{-1}].$$

**DEFINICIÓN 3.5.** Sea  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \in \mathbb{C}(z)$ , definimos el operador  $D : \mathbb{C}(z) \rightarrow \mathbb{C}(z)$  como

$$Df(z) = \frac{d}{dz} f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n a_n z^{n-1},$$

y lo llamamos *operador diferencial*.

También usaremos la notación  $f'(z)$  para referirnos a  $Df(z)$ . De ambas definiciones podemos extraer la siguiente proposición:

**PROPOSICIÓN 3.6.** *Para cualquier  $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ ,  $\text{Res } Df(z) = \text{Res } f'(z) = 0$ .*

La demostración es inmediata de la definición del operador  $D$ .

Ahora presentaremos la composición de series y, al igual que en la definición de recíproco, daremos una condición de orden para los elementos de  $\mathbb{C}[z]$  invertibles. Sean  $f(z), g(z) \in$

$\mathbb{C}[z]$ , para definir  $(f \circ g)(z) = f(g(z))$ , daremos la condición adicional de  $\text{ord } g \geq 1$ , para no caer en ambigüedades topológicas. De esta manera, si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m z^m,$$

entonces,

$$f(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \sum_{m=1}^{\infty} b_m z^m \right)^n = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{p=1}^k a_p \sum_{n_1+\dots+n_p=k} b_{n_1} \dots b_{n_p} \right) z^k.$$

En términos de funcionales, la composición de las series  $f(z)$  y  $g(z)$  es aquella con los siguientes coeficientes:

$$[z^0](f \circ g)(z) = a_0 \tag{3.2}$$

$$[z^n](f \circ g)(z) = \sum_{p=1}^n a_p \sum_{n_1+\dots+n_p=n} b_{n_1} \dots b_{n_p}, \quad \forall n > 0. \tag{3.3}$$

La propiedad de orden respecto a la composición es  $\text{ord}(f \circ g) = \text{ord } f \cdot \text{ord } g$ . Tenemos además que  $\mathbb{C}[z]$  con esta operación posee elemento neutro, el cual es  $h(z) = z$ . Introducida ya la composición como una operación entre series daremos las propiedades interesantes del operador diferencial:

**PROPOSICIÓN 3.7** (Propiedades de la derivada). *Para  $f(z), g(z) \in \mathbb{C}(z)$ , se satisface:*

1.  $(\alpha f + \beta g)'(z) = (\alpha f' + \beta g')(z), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .
2.  $(f \cdot g)'(z) = (f' \cdot g + f \cdot g')(z)$ .
3.  $(f^{-1})'(z) = -(f'/f^2)(z)$ .
4.  $(f/g)'(z) = ((f' \cdot g - f \cdot g')/g^2)(z)$ .
5.  $(g^k)'(z) = k(g^{k-1} \cdot g')(z), \forall k \in \mathbb{N}$ .
6.  $(f \circ g)'(z) = ((f' \circ g) \cdot g')(z), \forall \text{ord } g \geq 1$ .

Todas estas propiedades son conocidas de cálculo, sin embargo, la demostración de esta proposición es un poco más interesante porque cada ítem resulta ser consecuencia de las definiciones dadas, independiente en todo sentido de la noción de convergencia usada en las materias de cálculo. Haremos solamente la demostración de las ecuaciones 1 y 2 para ilustrar este hecho, las propiedades restantes puede hallarlas en [13].

DEMOSTRACIÓN.

1. Verifiquemos la linealidad del operador  $D$ . Sean  $f(z)$  y  $g(z)$  series de Laurent, y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Si  $\text{ord } f = n_0$  y  $\text{ord } g = k_0$ , entonces  $[z^n]f(z) = 0$  y  $[z^k]g(z) = 0$ , para todo  $n < n_0$  y  $k < k_0$ . Llamando  $a_m$  y  $b_m$  a los coeficientes de  $f(z)$  y  $g(z)$  respectivamente, para todo  $m \geq \min\{n_0, k_0\}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} [z^{m-1}](\alpha f + \beta g)'(z) &= m(\alpha a_m + \beta b_m) \\ &= \alpha(ma_m) + \beta(mb_m) \\ &= [z^{m-1}]\alpha f'(z) + [z^{m-1}]\beta g'(z), \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.

2. Sean  $f(z)$  y  $g(z)$  series de Laurent tales que  $\text{ord } f = n_0$  y  $\text{ord } g = k_0$ . Entonces, para todo  $m \geq n_0 + k_0$ , obtenemos a partir de las definiciones del producto de Cauchy y la derivada que:

$$\begin{aligned} [z^{m-1}](f \cdot g)'(z) &= \sum_{n+k=m} ma_n b_k \\ &= \sum_{n+k=m} (n+k)a_n b_k \\ &= \sum_{n+k=m} (na_n)b_k + \sum_{n+k=m} a_n(kb_k) \\ &= [z^{m-1}](f' \cdot g)(z) + [z^{m-1}](f \cdot g')(z). \end{aligned}$$

■

DEFINICIÓN 3.8. Sean  $f(z)$  y  $g(z)$  series de potencia, con  $\text{ord } f, \text{ord } g \geq 1$ . Entonces  $g(z)$  es llamada la *inversa* de  $f(z)$  si y sólo si  $f(g(z)) = g(f(z)) = z$ . En tal caso, decimos que  $f(z)$  y  $g(z)$  son *invertibles*, y denotamos  $g(z) = \bar{f}(z)$ .

PROPOSICIÓN 3.9 (Condición de Inversa). *Sea  $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ .  $f(z)$  tiene inversa única  $\bar{f}(z)$  si, y sólo si,  $\text{ord } f = 1$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $f(z)$  una serie de potencias invertible, con inversa  $\bar{f}(z)$ . Usando la propiedad de orden sobre la composición de  $f$  y  $\bar{f}$  tenemos:

$$1 = \text{ord}(f \circ \bar{f}) = \text{ord } f \cdot \text{ord } \bar{f}.$$

Como el orden de una serie es un número natural entonces  $\text{ord } f = \text{ord } \bar{f} = 1$ . Ahora, suponiendo que  $\text{ord } f = 1$ , veamos que  $\bar{f}(z)$  existe y es única. De la ecuación  $(\bar{f} \circ f)(z) = z$  obtenemos que

$$[z^n](\bar{f} \circ f)(z) = \delta_{1n} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

De la ecuación (3.3) y de la hipótesis  $\text{ord } f = 1$ , obtenemos la siguiente recurrencia:

$$b_1 = \frac{1}{a_1}$$

$$b_n = -\frac{1}{a_1^n} \sum_{p=1}^{n-1} b_p \sum_{n_1+\dots+n_p=n-1} a_{n_1} \dots a_{n_p},$$

donde los  $a_i$  y  $b_i$  son los coeficientes de  $f(z)$  y  $\bar{f}(z)$ , respectivamente. Por lo tanto,  $\bar{f}(z)$  existe pues todos los términos  $b_n$  se pueden hallar a partir de la fórmula de recurrencia obtenida y además,  $\bar{f}(z)$  es única pues sus coeficientes vienen dados de manera única por la recurrencia. Obtenemos exactamente lo mismo si trabajamos con  $(f \circ \bar{f})(z) = z$ .

■

Ahora, sean  $f(z)$  y  $g(z)$  series de potencia invertibles, por la proposición anterior,  $\text{ord } f = \text{ord } g = 1$ . Usando la propiedad del orden de la composición,  $\text{ord}(f \circ g) = \text{ord } f \cdot \text{ord } g = 1$ , es decir, la composición de series invertibles es invertible. Este resultado da pie a la siguiente proposición:

**PROPOSICIÓN 3.10.** *El conjunto  $\{f(z) \in \mathbb{C}[z] : \text{ord } f = 1\}$  es un grupo con respecto a la composición de series.*

Lo único que resta demostrar es que la composición de series es asociativa, lo cual se deja al lector. En la demostración de la Proposición 3.9 vimos cómo obtener los coeficientes de la inversa de una serie dada, a partir de una fórmula de recurrencia. La pregunta es: ¿hay un método más eficiente? Analicemos lo siguiente: sea  $f(z)$  una serie invertible, entonces podemos reescribirla como  $f(z) = ze(z)$ , donde  $\text{ord } e = 0$ . Sustituyendo  $\bar{f}(z)$  por  $z$  nos queda,  $z = \bar{f}(z)e(\bar{f}(z))$ . Llamando  $M(z) = e^{-1}(z)$ , obtenemos finalmente la ecuación implícita:

$$\bar{f}(z) = zM(\bar{f}(z)). \tag{3.4}$$

Note que esta ecuación es completamente análoga a

$$x - t\phi(x) = 0, \quad (\text{P2})$$

cuando  $\phi(x)$  posee serie de Taylor alrededor de 0, lo que sugiere que la solución de (3.4) viene dada por (FIL). Ya estamos en condiciones de presentar el Teorema de Inversión de Lagrange de este capítulo:

**TEOREMA 3.11** (Versión algebraica de FIG). *Sea  $G(z) \in \mathbb{C}[z]$  de orden 1, tal que satisface la ecuación  $G(z) = zM(G(z))$ , donde  $M(z)$  es una serie de potencia de orden 0. Entonces, los coeficientes  $c_n = [z^n]F(G(z))$  vienen dados por*

$$\begin{aligned} c_0 &= [z^0]F(z) \\ c_n &= \frac{1}{n}[z^{n-1}]F'(z)M^n(z), \end{aligned} \quad (\text{FIG})$$

para cualquier  $F(z) \in \mathbb{C}[z]$ .

### 1. Demostración de FIG usando residuos.

Esta primera demostración depende fundamentalmente de la siguiente propiedad de residuo:

**PROPOSICIÓN 3.12.** *Sea  $g(z) \in \mathbb{C}[z]$  con  $\text{ord } g = 1$ . Entonces el residuo de la serie de Laurent  $g'(z)g^{-n}(z)$  es*

$$\text{Res}(g' \cdot g^{-n})(z) = \delta_{1n},$$

para cualquier  $n \in \mathbb{Z}$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Para  $n \neq 1$ , tenemos  $g'(z)g^{-n}(z) = \frac{1}{1-n}(g^{1-n}(z))'$ , cuyo residuo es igual a 0 por la Proposición 3.6.

Para  $n = 1$ , escribimos  $g(z) = ze(z)$ , donde  $\text{ord } e = 0$ . Entonces

$$\text{Res} \left[ \frac{g'(z)}{g(z)} \right] = \text{Res} \left[ \frac{1}{z} + \frac{e'(z)}{e(z)} \right] = 1 + \text{Res} \left[ \frac{e'(z)}{e(z)} \right].$$

El término que depende de la serie  $e(z)$  tiene residuo 0, por ser multiplicación de series de potencia, por lo que queda demostrada la proposición. ■

Como resultado directo de esta proposición tenemos,

COROLARIO 3.13. Sea  $h(z) \in \mathbb{C}(z)$  y  $g(z) \in \mathbb{C}[z]$ , tal que  $\text{ord } g = 1$ . Entonces,

$$\text{Res}[(h \circ g) \cdot g'](z) = \text{Res } h(z).$$

DEMOSTRACIÓN CON RESIDUOS DEL TEOREMA 3.11. Sean,  $F(z)$  y  $G(z)$  series de potencia, con  $\text{ord } G = 1$ . Denotemos a los coeficientes de  $(F \circ G)(z)$  por  $c_n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Sabemos que por definición de composición de series

$$c_0 = [z^0](F \circ G)(z) = [z^0]F(z),$$

por lo que sólo nos interesaremos en los funcionales  $[z^n]$  con  $n \geq 1$ . Denotemos por

$$(F \circ G)'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} = H(z).$$

Sea  $g(z) = \overline{G}(z)$ , hallaremos dos expresiones para el valor residuo

$$\text{Res} \left[ \frac{(F \circ G)'(z)}{(g \circ G)^n(z)} \right].$$

Para el primer cálculo, consideraremos la serie  $H(z)$ ,

$$\text{Res} \left[ \frac{(F \circ G)'(z)}{(g \circ G)^n(z)} \right] = \text{Res} \left[ \frac{H(z)}{z^n} \right] = n c_n$$

Para el otro cálculo, usaremos el Corolario 3.13 sobre  $G(z)$  y la propiedad de los funcionales lineales  $[z^l]h(z) = [z^{k+l}]z^k h(z)$  para cualesquiera  $h(z) \in \mathbb{C}[z]$  y  $k, l \in \mathbb{N}$ . Recordemos que  $G(z) = zM(G(z))$ , por lo que

$$M^n(G(z)) = \frac{G^n(z)}{z^n} = \frac{G^n(z)}{(g \circ G)^n(z)},$$

y así,

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[ \frac{(F \circ G)'(z)}{(g \circ G)^n(z)} \right] &= \text{Res} \left[ \frac{(F \circ G)'(z)M^n(G(z))}{G^n(z)} \right] \\ &= \text{Res} \left[ \frac{F'(G(z))M^n(G(z))G'(z)}{G^n(z)} \right] \\ &= \text{Res} \left[ \frac{F'(z)M^n(z)}{z^n} \right] \\ &= [z^{n-1}]F'(z)M^n(z). \end{aligned}$$

De donde,

$$c_n = \frac{1}{n} [z^{n-1}]F'(z)M^n(z),$$

quedando demostradas las ecuaciones (FIG) del Teorema 3.11. ■

## 2. Demostración de FIG usando operadores adjuntos.

La demostración presentada en esta sección resultará bastante interesante por la riqueza de resultados algebraicos que obtendremos. Daremos una caracterización de los coeficientes de la serie  $(F \circ G)(z)$  mediante los autovectores de cierto operador, más específicamente, será a través de un operador adjunto. Para esto, primero debemos definir una aplicación bilineal sobre  $\mathbb{C}(z)$ .

DEFINICIÓN 3.14. En  $\mathbb{C}(z)$  definimos la *forma bilineal*

$$\langle f|g \rangle = [z^0](f \cdot g)(z), \quad (3.5)$$

para cualesquiera  $f(z), g(z) \in \mathbb{C}(z)$ .

Al par  $(\mathbb{C}(z), \langle \cdot | \cdot \rangle)$  no podemos llamarlo espacio con producto interno porque, de hecho, la forma bilineal  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  no es un producto interno, por no ser sesquilineal. Sin embargo, teniendo una forma bilineal podemos introducir la definición de *adjunto* de la manera usual.

DEFINICIÓN 3.15. Sea  $S$  un operador sobre  $\mathbb{C}(z)$ . Entonces su *adjunto*  $S^*$  es otro operador sobre  $\mathbb{C}(z)$  que satisface

$$\langle Sf|g \rangle = \langle f|S^*g \rangle,$$

para cualesquiera  $f(z), g(z) \in \mathbb{C}(z)$ .

A continuación, daremos dos ejemplos para ilustrar esta definición, pero ambos serán de mucha utilidad en las próximas demostraciones:

EJEMPLO 3.16. Para cualquier  $m(z) \in \mathbb{C}[z]$ , podemos definir un operador  $M = M_m$  sobre  $\mathbb{C}(z)$  llamado *operador multiplicación* definido por

$$Ma(z) = m(z)a(z),$$

para toda serie de Laurent  $a(z)$ . Dado que el producto en  $\mathbb{C}(z)$  es conmutativo y asociativo, tenemos que

$$\langle Ma|b \rangle = [z^0]((m \cdot a) \cdot b)(z) = [z^0](a \cdot (m \cdot b))(z) = \langle a|Mb \rangle$$

para cualesquiera  $a(z)$  y  $b(z)$ , es decir,  $M^* = M$ . ■

EJEMPLO 3.17. Definimos al operador  $D^\bullet$  como la aplicación

$$D^\bullet a(z) = zDa(z) = za'(z),$$

al cual llamaremos *operador apuntamiento* (la razón de este nombre lo explicaremos en el capítulo siguiente por su interpretación combinatoria). En algunos casos, será conveniente la notación  $D^\bullet a(z) = a^\bullet(z)$ . El apuntamiento satisface la propiedad

$$(a \cdot b)^\bullet(z) = (a^\bullet \cdot b + a \cdot b^\bullet)(z)$$

Sabemos ya que el residuo de la derivada de cualquier serie de Laurent es cero, así que

$$0 = [z^0](a \cdot b)^\bullet(z) = [z^0](a^\bullet \cdot b)(z) + [z^0](a \cdot b^\bullet)(z) = \langle a^\bullet | b \rangle + \langle a | b^\bullet \rangle$$

de donde,

$$\langle a^\bullet | b \rangle = \langle a | -b^\bullet \rangle$$

y por lo tanto,  $(D^\bullet)^* = -D^\bullet$ . ■

Tenemos de igual manera la conocida propiedad

$$(ST)^* = T^*S^*,$$

para operadores  $S$  y  $T$  cualesquiera de  $\mathbb{C}(z)$ .

Antes de introducir el teorema en el cual se basará la demostración de las ecuaciones (FIG), daremos un resultado con respecto a la base del espacio  $\mathbb{C}[z]$ . Este espacio posee la base canónica  $\{1, z, z^2, \dots\}$ . Si tenemos  $g(z) \in \mathbb{C}[z]$  de orden 1, entonces  $\{g_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donde  $g_n(z) = g^n(z)$ , es también una base de  $\mathbb{C}[z]$ . La demostración de este hecho es sencilla considerando que

$$\text{ord } g^n(z) = n = \text{ord } z^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego, cualquier  $F(z) \in \mathbb{C}[z]$ , puede escribirse como combinación lineal de la base  $\{g_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Es decir, existen escalares  $c_n \in \mathbb{C}$ , tales que

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(z). \tag{3.6}$$

Por la Proposición 3.7, la derivada de  $F(z)$  satisface,

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n g_{n-1}(z) g'(z). \quad (3.7)$$

Daremos ahora el teorema indispensable de esta sección.

**TEOREMA 3.18.** *Sean  $F(z), g(z) \in \mathbb{C}[z]$ , con  $\text{ord } g = 1$ . Entonces existe una serie formal  $h(z)$ , tal que  $(h \circ g)(z) = F(z)$ , y sus coeficientes  $c_n$  pueden hallarse con*

$$\begin{aligned} c_0 &= [z^0]F(z) \\ c_n &= \frac{1}{n} \text{Res}(F' \cdot g^{-n})(z). \end{aligned} \quad (3.8)$$

**DEMOSTRACIÓN.** Como  $\text{ord } g = 1$ , entonces podemos obtener una expresión de  $F(z)$  de la forma (3.6). Si definimos

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

entonces,  $F(z) = (h \circ g)(z)$ . Quedando probada así la existencia de  $h(z)$ . Consideremos el operador  $U$  sobre  $\mathbb{C}(z)$ , definido por

$$Ua(z) = \frac{g(z)}{g'(z)} a'(z).$$

Para cada elemento base  $g_n(z)$  tenemos

$$Ug_n(z) = ng_n(z),$$

es decir,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n = n$  es autovalor de  $U$ , con el correspondiente autovector  $g_n(z)$ .

Consideremos el operador multiplicación  $M = M_m$  sobre  $\mathbb{C}(z)$ , donde

$$m(z) = \frac{g(z)}{zg'(z)},$$

tenemos que  $U = MD^\bullet$ . De esta manera, usando los ejemplos dados

$$U^* = (MD^\bullet)^* = (D^\bullet)^* M^* = -D^\bullet M.$$

Veamos que el problema  $-D^\bullet M g_n(z) = n g_n(z)$  tiene solución distinta de la trivial. Esto es,  $\lambda_n = n$ , es autovalor de  $U^*$ . Llamando  $\check{g}_n(z) = M g_n(z)$ , tenemos que

$$-D^\bullet M g_n(z) = -D^\bullet \check{g}_n(z) = -z(\check{g}_n)'(z).$$

Por otro lado,

$$ng_n(z) = n \frac{m(z)}{m(z)} g_n(z) = n \frac{1}{m(z)} M g_n(z) = n \frac{1}{m(z)} \ddot{g}_n(z),$$

de donde obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$(\ddot{g}_n)'(z) = -n \ddot{g}_n(z) \frac{g'(z)}{g(z)},$$

la cual tiene como solución  $\ddot{g}_n(z) = g^{-n}(z)$ , y así,  $\dot{g}_n(z) = z g^{-n-1}(z) g'(z)$ . Obtenido este resultado, debido a la Proposición 3.12,  $\langle g_m | \dot{g}_n \rangle = \delta_{mn}$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \langle g_m | \dot{g}_n \rangle &= [z^0](g_m \cdot g_n)(z) \\ &= [z^0] z g^m(z) g^{-n-1}(z) g'(z) \\ &= [z^0] z g^{m-n-1}(z) g'(z) \\ &= \text{Res}(g' \cdot g^{m-n-1})(z) \\ &= \delta_{mn}. \end{aligned}$$

De esta manera, considerando la ecuación (3.7), tenemos que para  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} nc_n &= \langle F'/g' | \dot{g}_{n-1} \rangle \\ &= [z^0] z (F' \cdot g^{-n})(z) \\ &= \text{Res}(F' \cdot g^{-n})(z), \end{aligned}$$

y para  $n = 0$ , es inmediato que  $c_0 = [z^0]F(z)$ , quedando demostradas las ecuaciones (3.8). ■

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.11.** Nos pondremos bajo las hipótesis del Teorema 3.18. Note que si  $G(z)$ , es tal que satisface  $G(z) = zM(G(z))$ , entonces su inversa  $g(z)$  se puede representar como

$$g(z) = zM^{-1}(z).$$

Ahora, como  $(G \circ g)(z) = z$ , componiendo con  $F(z)$  a ambos lados nos queda,

$$((F \circ G) \circ g)(z) = F(z).$$

Si llamamos  $h(z) = (F \circ G)(z)$ , entonces  $h(z)$ , es la serie de potencia para la cual se satisface el Teorema 3.18. Por lo tanto, los coeficientes  $c_n$  de  $h(z)$  vienen dados por las ecuaciones (3.8). Para  $n = 0$  es directo. Si  $n \geq 1$

$$c_n = \frac{1}{n} \operatorname{Res}(F' \cdot g^{-n})(z) = \frac{1}{n} \operatorname{Res}[z^{-n} F'(z) M^n(z)] = \frac{1}{n} [z^{n-1}] F'(z) M^n(z),$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Considerando la demostración por residuos, podemos demostrar que los Teoremas 3.11 y 3.18 son equivalentes, por lo que trabajar con las ecuaciones (FIG) será básicamente lo mismo que trabajar con las ecuaciones (3.8), cosa que sucederá en temas posteriores.

## CAPÍTULO 4

### **Enfoque combinatorio.**

En el capítulo anterior dimos una interpretación bastante elegante a la ecuación (P2) al verla como una expresión genérica para hallar la inversa compositiva de una serie de potencias con ciertas características. Seguiremos trabajando con series de potencias formales, pero esta vez analizándolas mediante teoría combinatoria. Las series resultan en este capítulo indispensables para solucionar de manera eficiente problemas combinatorios. Se caracterizarán por poseer coeficientes enteros no negativos, sin embargo, al final de este capítulo veremos que trabajar con estas series es suficiente para generalizar el resultado a series con coeficientes en  $\mathbb{C}$ .

Con respecto a la fórmula de inversión, a diferencia de los capítulos anteriores en los que sólo demostramos la fórmula (FIG) por generalizar el resultado planteado por Lagrange, aquí sí estudiaremos por separado la ecuación (FIL) y la ecuación (FIG) del Capítulo 1. Asimismo daremos una interpretación combinatoria de la ecuación (P2).

#### **1. Teoría de especies combinatorias.**

En 1981, André Joyal en [8] mostró su estudio de series formales a través de teoría combinatoria, o para ser más específico, mediante lo que él llamó especies combinatorias. Lo que resulta más interesante del trabajo de Joyal es que da una definición formal de “estructura” sobre conjuntos finitos, definiéndola simplemente como una aplicación funtorial. De esta manera, grafos, árboles, órdenes lineales, funciones, ciclos, y muchos otros conceptos estructurales que manejamos y que son de mucha ayuda en distintos campos de la matemática, vienen enmarcados en la categoría utilizada por Joyal. Más aún, dentro de este marco podemos establecer equivalencias y operaciones entre especies que nos permiten generar nuevas estructuras, o incluso obtener otras interpretaciones combinatorias de las estructuras que conocemos.

Antes de poder enfocarnos en la fórmula de inversión, hace falta dar los conceptos necesarios para poder obtener la ecuación (P2).

DEFINICIÓN 4.1. Una *categoría* es una clase  $\mathfrak{C}$  de objetos  $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \dots)$  junto con:

- (1) una clase de conjuntos disjuntos, denotado  $\text{hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ , para cada par de elementos  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  de  $\mathfrak{C}$ ; a cada elemento  $f \in \text{hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$  lo llamaremos *morfismo* de  $\mathfrak{a}$  a  $\mathfrak{b}$  y denotamos  $f : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ ;
- (2) para cada tripleta  $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$  de objetos de  $\mathfrak{C}$ , una función

$$\text{hom}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \times \text{hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \rightarrow \text{hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$$

(para morfismos  $f : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ ,  $g : \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{c}$ , esta función se escribe  $(g, f) \mapsto g \circ f$  y  $g \circ f : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{c}$  es llamado la *composición* de  $f$  y  $g$ ); sujeta a las siguientes condiciones:

- *Asociatividad.* Si  $f : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ ,  $g : \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{c}$ ,  $h : \mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{d}$  son morfismos de  $\mathfrak{C}$ , entonces  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .
- *Identidad.* Para cada objeto  $\mathfrak{b}$  de  $\mathfrak{C}$  existe un morfismo  $\mathbf{1}_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{b}$  tal que para cualesquiera  $f : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$  y  $g : \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{c}$ ,

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{b}} \circ f = f \quad \text{y} \quad g \circ \mathbf{1}_{\mathfrak{b}} = g.$$

Para ejemplos de categorías puede revisar [7]. En este trabajo sólo estamos interesados en la categoría  $\mathfrak{C}_{\text{biy}}$  de conjuntos finitos cuyo morfismos son funciones biyectivas, la cual evidentemente satisface la Definición 4.1.

DEFINICIÓN 4.2. Una *especie de estructuras* es una regla  $F : \mathfrak{C}_{\text{biy}} \rightarrow \mathfrak{C}_{\text{biy}}$  que genera para cada conjunto finito  $U$  un conjunto finito  $F[U]$  y para cada biyección (morfismo de  $\mathfrak{C}_{\text{biy}}$ )  $\sigma : U \rightarrow V$ , una biyección  $F[\sigma] : F[U] \rightarrow F[V]$ , tal que,

- (1) para todas las biyecciones  $\sigma : U \rightarrow V$  y  $\tau : V \rightarrow W$ ,

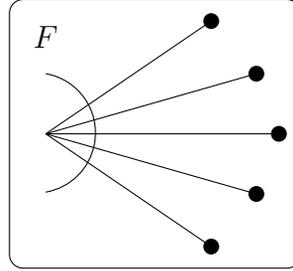
$$F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma], \tag{4.1}$$

- (2) para la función identidad  $Id_U : U \rightarrow U$ ,

$$F[Id_U] = Id_{F[U]}. \tag{4.2}$$

Un elemento  $s \in F[U]$  se denomina *F-estructura* sobre  $U$  (o *estructura de especie F* sobre  $U$ ), y la función  $F[\sigma]$  *transporte* de las *F-estructuras* a través de  $\sigma$ . En terminos de categorías  $F$  es una especie de estructura si es un *functor* (covariante) de  $\mathfrak{C}_{\text{biy}}$  en sí mismo.

Será usual en esta sección dar interpretaciones gráficas, como la Figura 4.1, de las distintas especies con las que trabajaremos.



**Figura 4.1.** *Representación de Especies.*

A lo largo de este tema estaremos interesados en el problema (combinatorio) de calcular el cardinal de los conjuntos  $F[U]$ , siendo  $F$  una especie y  $U$  un conjunto finito. Por comodidad, en algunos casos trabajaremos con los conjuntos  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  (y establecemos  $[0] = \emptyset$ ), debido a que si  $\text{card}(U) = n$  entonces  $\text{card}(F[U]) = \text{card}(F[[n]])$ , lo cual es consecuencia de que  $F[\sigma]$  es biyectiva. Para más comodidad, denotaremos  $F[n]$  en vez de  $F[[n]]$ , y a su cardinal por  $F_n$ . Ahora daremos algunos ejemplos de especies.

EJEMPLO 4.3. Para todo  $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , definimos la especie  $E_{(k)}$  como

$$E_{(k)}[U] = \begin{cases} \{U\}, & \text{si } \text{card } U = k \\ \emptyset, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

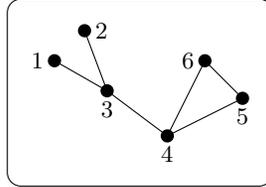
A la especie  $E_{(k)}$  se le llama *característica de conjuntos de cardinal  $k$* . Los casos particulares  $k = 0$  y  $k = 1$  los denotaremos  $E_{(0)} = \mathbf{1}$  y  $E_{(1)} = X$ .

EJEMPLO 4.4. La especie *uniforme*  $E$ , definida simplemente por  $E[U] = \{U\}$ . Entonces, para cada conjunto finito  $U$  existe una única  $E$ -estructura. Esta especie será bastante relevante en próximos desarrollos.

EJEMPLO 4.5. La especie  $\mathcal{G}$ , de *grafos simples*. En términos de conjuntos, un grafo simple sobre un conjunto finito  $U$  (o una  $\mathcal{G}$ -estructura) es un conjunto  $\gamma \subseteq \wp^{[2]}[U]$ , donde

$$\wp^{[2]}[U] = \{u \subseteq U : \text{card}(u) = 2\}.$$

Llamaremos *vértices* a los elementos de  $U$  y *aristas* a los elementos de  $\gamma$ . Usaremos la interpretación gráfica usual de grafos. Por ejemplo, para el conjunto  $[6]$  la Figura 4.2 representa una estructura de grafo simple.



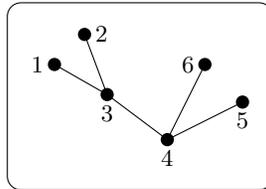
**Figura 4.2.** Ejemplo de un grafo sobre  $[6]$

En este caso, el conjunto  $\gamma$  posee como elementos a las aristas:

$$\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}.$$

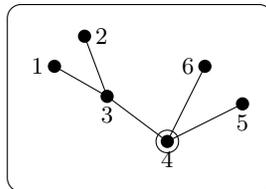
En adelante, sólo haremos uso de la interpretación gráfica por ser más clara y completa. De la definición de grafos podemos extraer ejemplos particulares, como los que siguen.

EJEMPLO 4.6. La especie  $\mathbf{a}$ , de *árboles* (grafos simples conexos sin ciclos).



**Figura 4.3.** Ejemplo de un árbol sobre  $[6]$

EJEMPLO 4.7. La especie  $\mathcal{A}$ , de *árboles con raíz* (árboles con un elemento distinguido).



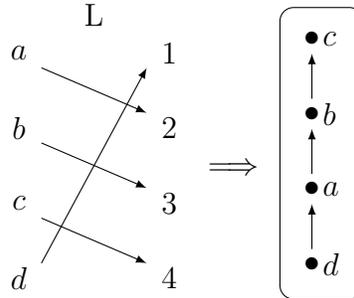
**Figura 4.4.** Ejemplo de un árbol con raíz sobre  $[6]$

En la Figura 4.4, el elemento distinguido es 4, según la manera estándar de representarlo.

EJEMPLO 4.8. La especie  $\mathcal{L}$  de *ordenes lineales*. Los ordenes lineales sobre un conjunto  $U$  de cardinal  $n$  los podemos identificar con funciones biyectivas  $L : U \rightarrow [n]$ , donde el orden a través de  $L$  viene dado por

$$u <_L v \Leftrightarrow L(u) < L(v), \forall u, v \in U.$$

Para este tipo de estructuras daremos la siguiente interpretación gráfica:

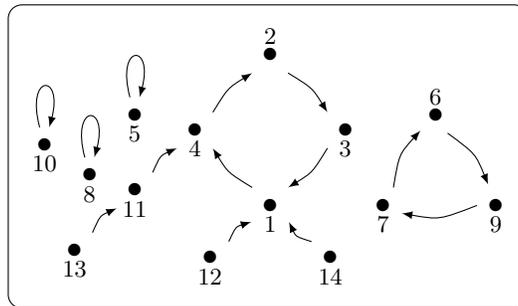


**Figura 4.5.** Orden lineal sobre  $[4]$ .

La Figura 4.5 nos dice que sobre el conjunto  $U = \{a, b, c, d\}$ , aquella función  $L$  define el siguiente orden lineal:

$$d <_L a <_L b <_L c.$$

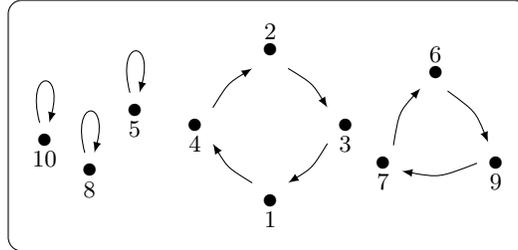
EJEMPLO 4.9. La especie End de *endofunciones*. El conjunto de End-estructuras sobre el conjunto  $U$  es  $\text{End}[U] = \{\phi \mid \phi : U \rightarrow U\}$ . Las endofunciones poseen interpretaciones gráficas como la siguiente:



**Figura 4.6.** Representación gráfica de una endofunción sobre  $[14]$ .

En este ejemplo, las flechas indican el modo como se comporta la función cuando los nodos están etiquetados.

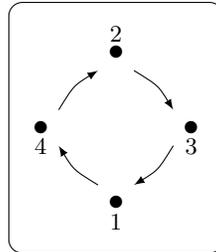
EJEMPLO 4.10. La especie  $\mathcal{S}$  de *permutaciones*. Las  $\mathcal{S}$ -estructuras sobre un conjunto finito  $U$  vienen dadas por  $\mathcal{S}[U] = \{\phi \in \text{End}[U] : \phi \text{ es biyectiva}\}$ . La Figura 4.6 no representa una permutación, pero la podemos modificar para dar el ejemplo apropiado de una  $\mathcal{S}$ -estructura.



**Figura 4.7.** Representación gráfica de una permutación sobre  $[10]$ .

La Figura 4.7 representa una permutación de cinco ciclos.

EJEMPLO 4.11. La especie  $\mathcal{C}$  de *permutaciones cíclicas*, la cual se compone de todas las permutaciones de un ciclo.



**Figura 4.8.** Permutación cíclica sobre  $[4]$ .

Todos estos ejemplos (en particular los gráficos) nos serán de mucha utilidad para demostrar la fórmula de inversión de Lagrange. Veremos que todas estas estructuras poseen relaciones muy interesantes entre sí.

Resolver el problema de los cardinales  $F_n$  para algunos de los ejemplos dados resulta bastante sencillo. Por ejemplo, para cualquier  $n \geq 2$ , el conjunto  $\wp^{[2]}[n]$  posee  $\binom{n}{2}$  elementos, por la definición del combinatorio. Ahora, como cualquier  $\mathcal{G}$ -estructura de  $[n]$  es un subconjunto de  $\wp^{[2]}[n]$ , entonces

$$\mathcal{G}_n = 2^{\binom{n}{2}}.$$

Por otro lado, para otras estructuras no es tan sencillo resolver este problema, como sucede con las especies  $\mathbf{a}$  y  $\mathcal{A}$ . Cayley demostró en 1889 que para todo  $n \geq 1$

$$\mathbf{a}_n = n^{n-2} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}_n = n^{n-1},$$

como sucesivo resultado de otros argumentos combinatorios. En nuestro caso, el problema de los cardinales  $\mathcal{A}_n$  aparecerá como consecuencia de un problema más general. Para llegar a esto, debemos empezar por la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.12. A cada especie de estructura  $F$  le asociamos la serie formal

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{z^n}{n!}, \quad (4.3)$$

la cual llamaremos *serie generatriz exponencial* de la especie  $F$ .

De esta definición obtenemos que,

$$\begin{aligned} (1) \ E_{(k)}(z) &= \frac{z^k}{k!} & (2) \ E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z & (3) \ \mathcal{G}(z) &= z + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\binom{n}{2}} \frac{z^n}{n!} \\ (4) \ \mathbf{a}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-2} \frac{z^n}{n!} & (5) \ \mathcal{L}(z) &= \frac{1}{1-z} & (6) \ \mathcal{S}(z) &= \frac{1}{1-z} & (7) \ \mathcal{C}(z) &= \log \left( \frac{1}{1-z} \right). \end{aligned}$$

La Definición 4.12 nos permite establecer una relación entre especies.

DEFINICIÓN 4.13. Sean  $F$  y  $G$  dos especies de estructura. Una *equipotencia* de  $F$  a  $G$  es una familia de biyecciones  $\alpha = \{\alpha_U\}$ , donde para cada conjunto finito  $U$ ,

$$\alpha_U : F[U] \xrightarrow{\sim} G[U].$$

Diremos que las especies  $F$  y  $G$  son *equipotentes*, y escribimos  $F \equiv G$ . En otras palabras,  $F \equiv G$  si y sólo si ambas especies poseen la misma serie generatriz.

El concepto de equipotencia es útil cuando sólo interesa contar la cantidad de estructuras a partir de una especie que, en esencia, es más sencilla. En otros casos que no es de nuestro total interés, resulta poco adecuado. Por ejemplo, las especies  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{S}$  son equipotentes, pero en los ejemplos podemos ver que en realidad no se trata de estructuras con características similares. Sin embargo, podemos establecer condiciones sobre la familia  $\alpha$  de biyecciones para obtener un tipo de igualdad más preciso.

DEFINICIÓN 4.14. Sean  $F$  y  $G$  dos especies de estructuras. Una familia de biyecciones  $\alpha$  es un *isomorfismo* de  $F$  a  $G$  si para todo conjunto finito  $U$  las biyecciones  $\alpha_U : F[U] \rightarrow G[U]$  satisfacen la *condición de naturalidad*: Para cualquier biyección  $\sigma : U \rightarrow V$  el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F[U] & \xrightarrow{\alpha_U} & G[U] \\ F[\sigma] \downarrow & & \downarrow G[\sigma] \\ F[V] & \xrightarrow{\alpha_V} & G[V] \end{array}$$

En tal caso, diremos que las especies  $F$  y  $G$  son *isomorfas* y denotamos  $F \simeq G$ .

La condición de isomorfismo sobre la familia  $\alpha$  garantiza la equipotencia de las especies  $F$  y  $G$ . Si bien esta definición es beneficiosa para resolver otro tipo de problemas combinatorios como podrá leer en [1], nosotros la usaremos solamente para generar nuevas estructuras a partir de las operaciones que definiremos a continuación.

Como motivación para la primera operación, comparemos las series generatrices de las especies  $E$  y  $E_{(k)}$ . Es evidente la siguiente igualdad

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{(k)}(z).$$

Quisiéramos que esta relación se mantuviera para una operación entre las especies  $E_{(k)}$ . El hecho de que para cada  $[n]$  la familia  $\{E_{(k)}[n]\}_{k \in \mathbb{N}}$  se componga casi en su totalidad por conjuntos vacíos ayuda para establecer la siguiente definición:

DEFINICIÓN 4.15. Una familia  $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de especies de estructuras se dice *sumable* si para cualquier conjunto finito  $U$ ,  $F_i[U] = \emptyset$ , excepto para una cantidad finita de índices  $i$ . La *suma* de una familia sumable  $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es la especie  $\sum_{i \in \mathbb{N}} F_i$  definida por la igualdad

$$\left( \sum_{i \in \mathbb{N}} F_i \right) [U] = \sum_{i \in \mathbb{N}} F_i[U] = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i[U] \times \{i\}, \quad (4.4)$$

y cuyos transportes vienen dados por

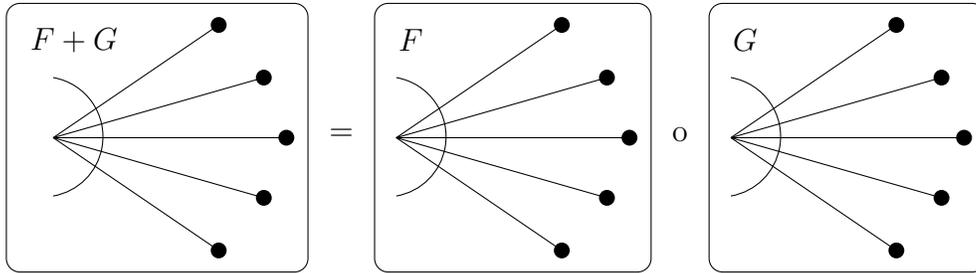
$$\left( \sum_{i \in \mathbb{N}} F_i \right) [\sigma](s, j) = (F_j[\sigma](s), j), \quad (4.5)$$

donde  $\sigma : U \rightarrow V$  es una biyección y  $s \in F_j[U]$ .

La suma de los  $E_{(k)}$  es compatible con esta definición, y usando la ecuación (4.5) podemos concluir que

$$E \simeq \sum_{k \in \mathbb{N}} E_{(k)}.$$

Para la suma de un par de especies  $F$  y  $G$ , será usual la interpretación gráfica

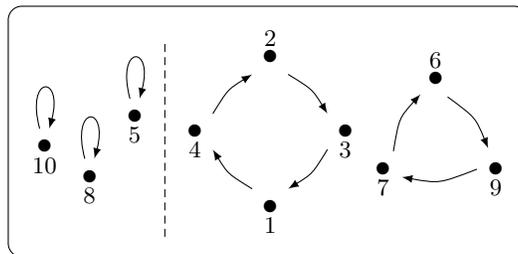


**Figura 4.9.** Suma de Especies.

La suma de especies satisface, vía isomorfismo, igualdades usuales tales como conmutatividad y asociatividad. Si declaramos la especie  $\mathbf{0}[U] = \emptyset$ , para cualquier conjunto finito  $U$ , tenemos entonces un elemento neutro con respecto a la suma. Además, la suma de una especie  $F$  consigo mismo  $n$  veces la denotamos por  $nF$ . Un resultado que nos será relevante en su debido momento es que si tenemos una especie  $F$  cualquiera, y  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  la familia de cardinales de la especie  $F$ , entonces

$$F \equiv \sum_{k \in \mathbb{N}} F_k E_{(k)}. \tag{4.6}$$

Para el producto, tomemos otro ejemplo como motivación. En la Figura 4.7 note que podemos separar los puntos fijos de los ciclos de la siguiente manera:



Dicho de otro modo, hemos realizado una partición que separa los puntos fijos de los puntos no fijos. Al tipo de permutaciones que no dejan puntos fijos llamémoslos *desarreglos*.

Podemos definir incluso la especie Des de desarreglos. El propósito ahora es definir una operación  $(\cdot)$  tal que

$$\mathcal{S} \simeq E \cdot \text{Des},$$

para cualquier partición que consideremos. De esta manera surge la siguiente definición:

DEFINICIÓN 4.16. Sean  $F$  y  $G$  dos especies de estructuras. La especie  $F \cdot G$ , llamada *producto* de  $F$  y  $G$ , se define como sigue: Una  $(F \cdot G)$ -estructura sobre un conjunto  $U$  es un par ordenado  $s = (f, g)$ , donde

- (1)  $f$  es una  $F$ -estructura sobre un subconjunto  $U_1 \subseteq U$ ;
- (2)  $g$  es una  $G$ -estructura sobre un subconjunto  $U_2 \subseteq U$ ;
- (3)  $(U_1, U_2)$  es una partición de  $U$ , es decir,  $U_1 \cup U_2 = U$  y  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

En otras palabras, para cualquier conjunto  $U$ , tenemos

$$(F \cdot G)[U] = \sum_{(U_1, U_2)} F[U_1] \times G[U_2], \tag{4.7}$$

con la suma disjunta definida sobre todas las particiones  $(U_1, U_2)$  de  $U$ . El transporte a través de una biyección  $\sigma : U \rightarrow V$  está definida por

$$(F \cdot G)[\sigma](s) = (F[\sigma_1](f), G[\sigma_2](g)), \tag{4.8}$$

donde  $s = (f, g)$ , y  $\sigma_i$  es la restricción de la biyección  $\sigma$  sobre el subconjunto  $U_i$ , con  $i = 1, 2$ .

Esta definición se puede generalizar para el producto de  $k$  especies, pero en este caso debemos considerar una  $k$ -partición de  $U$ ,  $(U_1, \dots, U_k)$ . El producto de especies tiene la interpretación gráfica:

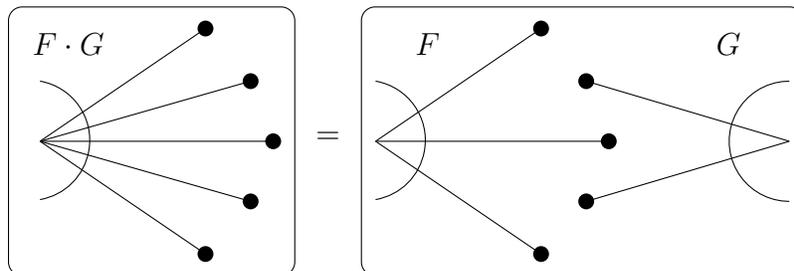


Figura 4.10. *Producto de Especies.*

Esta definición nos permite formalizar el hecho de que la igualdad (vía isomorfismo)  $\mathcal{S} \simeq E \cdot \text{Des}$ , en efecto se da. Teniendo esto en cuenta, podríamos preguntarnos qué sucede con la serie generatriz exponencial de un producto, por lo que plantearemos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.17. *Se tiene que*

$$(F \cdot G)(z) = F(z)G(z) \text{ (producto de Cauchy)}$$

con  $F$  y  $G$  especies de estructuras cualesquiera.

DEMOSTRACIÓN. Sea el conjunto  $U$  de cardinal  $n$ , y denotemos por  $(U_1, U_2)$  a las particiones de  $U$ . Por definición de producto

$$(F \cdot G)_n = \sum_{(U_1, U_2)} \text{card}(F[U_1]) \text{card}(G[U_2])$$

Llamando,  $i = \text{card}(U_1)$  y  $j = \text{card}(U_2)$ , y usando la propiedad de los cardinales que vimos al comienzo de esta sección, podemos reescribir la suma anterior como

$$(F \cdot G)_n = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} F_i G_j$$

siendo este justamente el término que obtenemos al realizar el producto de Cauchy (3.1) con las series  $F(z)$  y  $G(z)$ . ■

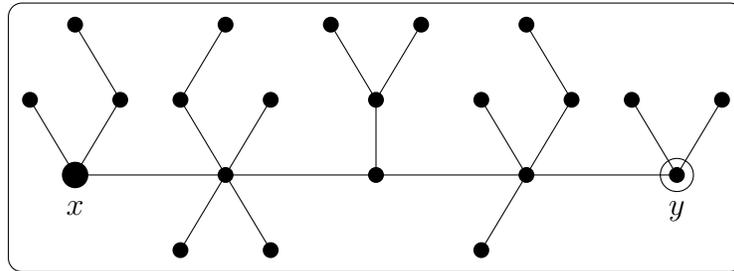
Como consecuencia de este resultado obtenemos que

$$\text{Des}(z) = \frac{e^{-z}}{1-z},$$

lo que nos muestra lo práctico que puede resultar trabajar problemas combinatorios a partir de teoría de series formales.

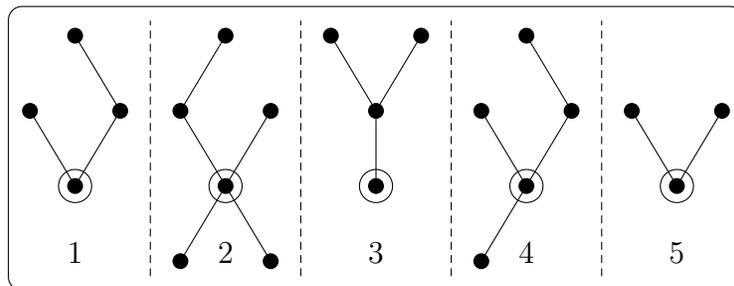
Siguiendo un orden similar al del capítulo anterior, corresponde ahora hablar de la sustitución de especies. Una vez más, a modo de motivación, definamos la especie  $\mathcal{V}$  de los vertebrados. Un *vertebrado* es un árbol  $\gamma$  donde se ha distinguido un par ordenado de vértices, digamos  $(x, y)$ . Llamaremos *columna vertebral* al único camino a través de  $\gamma$  que va de la “cabeza”  $x$  a la “cola”  $y$ , y a los vértices que están en la columna vertebral los llamaremos *vértebras*. Definamos sobre las vértebras la *función posición*  $\alpha$ , que nos dará la información de la posición con respecto a la cabeza, por ejemplo,  $\alpha(x) = 1$  y  $\alpha(y) = \#\{\text{vértebras}\}$ . Note

que la función posición establece un orden sobre las vértebras. Para visualizar este tipo de estructura observe la Figura 4.11.



**Figura 4.11.** Representación gráfica de un vertebrado.

Debido a que la función posición  $\alpha$  establece un orden sobre las vértebras, en la Figura 4.11 podemos prescindir de las aristas que van de  $x$  a  $y$  (la columna vertebral en otras palabras) y considerar como equivalente a



Esto es posible para cualquier vertebrado que consideremos. Nos gustaría ahora establecer una operación ( $\circ$ ) entre las especies  $\mathcal{L}_+$  (órdenes lineales no vacíos) y  $\mathcal{A}$  tal que

$$\mathcal{V} \simeq \mathcal{L}_+ \circ \mathcal{A}.$$

Por el ejemplo dado, esta operación parece depender de una partición del conjunto base que tomemos. Note que el hecho de que  $\mathcal{A}_0 = 0$  es de mucha ayuda pues para cualquier conjunto  $U$  que consideremos basta con tomar los subconjuntos distintos de vacío para definir la partición, y así no caer en posibles problemas en el conteo de los cardinales deseados, lo que sugiere que al momento de definir la operación  $F \circ G$ , para dos especies  $F$  y  $G$  cualesquiera, se debe pedir la condición extra de que  $G_0 = 0$ . Recordemos que al introducir la operación composición en el capítulo anterior se exigía una condición análoga a esta.

DEFINICIÓN 4.18. Sean  $F$  y  $G$  dos especies de estructuras, tal que  $G[0] = \emptyset$ . La especie  $F \circ G$  (también denotada  $F(G)$ ), llamada la *composición* de  $F$  y  $G$ , se define como sigue: Una  $F \circ G$ -estructura sobre  $U$  es una terna  $s = (\pi, \varphi, \gamma)$ , donde

- (1)  $\pi$  es una partición sin conjuntos vacíos de  $U$ , y denotamos  $\pi \vdash U$ ;
- (2)  $\varphi$  es una  $F$ -estructura sobre el conjunto de clases  $\pi$ ;
- (3)  $\gamma = (\gamma_p)_{p \in \pi}$ , donde para cada clase  $p$  de  $\pi$ ,  $\gamma_p$  es una  $G$ -estructura sobre  $p$ .

En otras palabras,

$$(F \circ G)[0] = F[0]$$

$$(F \circ G)[U] = \sum_{\pi \vdash U} F[\pi] \times \prod_{p \in \pi} G[p], \quad \forall n \geq 1. \quad (4.9)$$

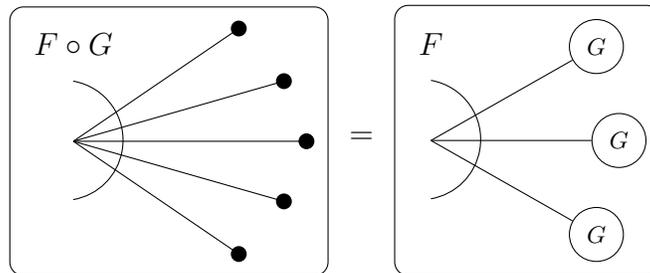
El transporte a través de una biyección  $\sigma : U \rightarrow V$  está definido, para cada  $(F \circ G)$ -estructura  $s = (\pi, \varphi, (\gamma_p)_{p \in \pi})$ , como

$$(F \circ G)[\sigma](s) = (\bar{\pi}, \bar{\varphi}, (\gamma_{\bar{p}})_{\bar{p} \in \bar{\pi}}), \quad (4.10)$$

donde

- (1)  $\bar{\pi}$  es la partición de  $V$  obtenida a través de la biyección  $\sigma$ ;
- (2) para cada  $\bar{p} = \sigma(p) \in \bar{\pi}$ , la estructura  $\gamma_{\bar{p}}$  se obtiene de la estructura  $\gamma_p$  al  $G$ -transportar a través de la biyección  $\sigma|_p$ ;
- (3) la estructura  $\bar{\varphi}$  se obtiene de la estructura  $\varphi$  al  $F$ -transportar a través de la biyección  $\bar{\sigma}$  inducida en  $\pi$  por  $\sigma$ .

La composición tiene la interpretación gráfica:



**Figura 4.12.** *Composición de Especies.*

La propiedad de la serie generatriz exponencial de la composición se comporta de la manera esperada.

PROPOSICIÓN 4.19. *Se tiene*

$$(F \circ G)(z) = F(G(z))$$

para especies  $F$  y  $G$  cualesquiera, con  $G_0 = 0$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea un conjunto  $U$  con cardinal  $n \geq 1$ , entonces

$$(F \circ G)_n = \sum_{\pi \vdash U} \text{card}(F[\pi]) \times \prod_{p \in \pi} \text{card}(G[p]).$$

Si  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son dos particiones de  $U$  tales que  $\text{card } \pi_1 = \text{card } \pi_2$ , sabemos que se satisface  $\text{card}(F[\pi_1]) = \text{card}(F[\pi_2])$ . Podemos reescribir la igualdad anterior dependiendo de los cardinales de las particiones  $\pi \vdash U$ , que varían de 1 hasta  $n$ . Además, para cada partición  $\pi$  con  $k$  clases, digamos  $p_1, \dots, p_k$ , se tiene que:

$$\sum_{i=1}^k \text{card } p_i = n.$$

Denotando  $n_i = \text{card } p_i$ , podemos reescribir la ecuación inicial como sigue

$$(F \circ G)_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} F_k \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1 \dots n_k} G_{n_1} \cdots G_{n_k},$$

que es justamente el término  $n$ -ésimo de la composición  $F(G(z))$  definida en (3.3). Para el conjunto  $[0]$  es directo. ■

De esta proposición obtenemos que

$$\mathcal{V}(z) = \mathcal{L}_+(\mathcal{A}(z)) = \frac{\mathcal{A}(z)}{1 - \mathcal{A}(z)}.$$

Ahora definiremos la derivada de una especie. A diferencia de las operaciones anteriores, lo haremos de manera constructiva. Es decir, estamos interesados en hallar una especie tal que su serie generatriz exponencial satisfaga  $G(z) = F'(z)$ . La pregunta es, ¿de qué manera debemos alterar a la especie  $F$  para obtener otra tal que su serie generatriz sea  $F'(z)$ ? La respuesta, de hecho, la obtenemos de la ecuación de  $G(z)$ , pues a partir de ahí podemos ver que los cardinales de la especie  $G$  satisfacen

$$G_n = F_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, el número de  $G$ -estructuras sobre un conjunto  $U$  es igual al número de  $F$ -estructuras sobre el conjunto  $U$  al cual le ha sido agregado un “nuevo” elemento.

DEFINICIÓN 4.20. Sea  $F$  una especie de estructuras. La especie  $F'$ , llamada la *derivada* de  $F$ , se define como sigue: una  $F'$ -estructura sobre  $U$  es una  $F$ -estructura sobre  $U \uplus \{*\}$ . El transporte a través de una biyección  $\sigma : U \rightarrow V$  es simplemente asignar para cada  $F'$ -estructura  $s$  sobre  $U$ ,  $F'[\sigma](s) = F[\sigma^+](s)$ , donde  $\sigma^+ : U \uplus \{*\} \rightarrow V \uplus \{*\}$  es la extensión canónica de  $\sigma$ :

$$\sigma^+(x) = \begin{cases} \sigma(x), & \text{si } x \in U \\ *, & \text{si } x = *. \end{cases}$$

La interpretación gráfica de la derivada es:

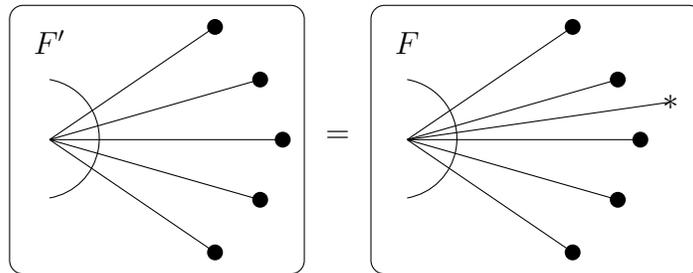


Figura 4.13. Derivada de Especies.

Para ilustrar aún más esta definición considere la Figura 4.14.

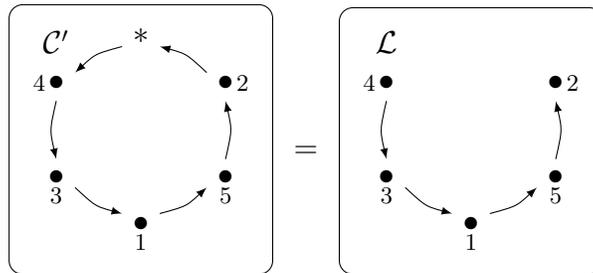


Figura 4.14. Derivada de las permutaciones cíclicas sobre  $[5]$ .

Entonces,

$$\mathcal{C}'(z) = \mathcal{L}(z) = \frac{1}{1-z},$$

como era de esperar.

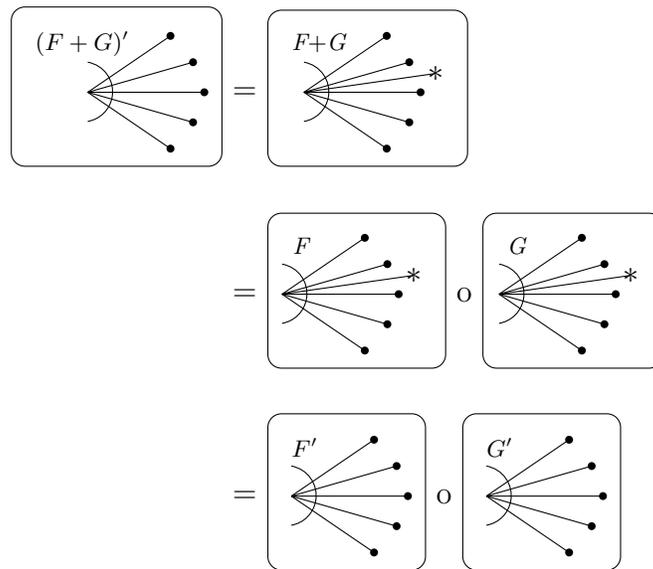
Veremos ahora que las propiedades comunes de la derivada se satisfacen a partir de las interpretaciones gráficas.

PROPOSICIÓN 4.21. *Para especies  $F$  y  $G$  cualesquiera se tiene*

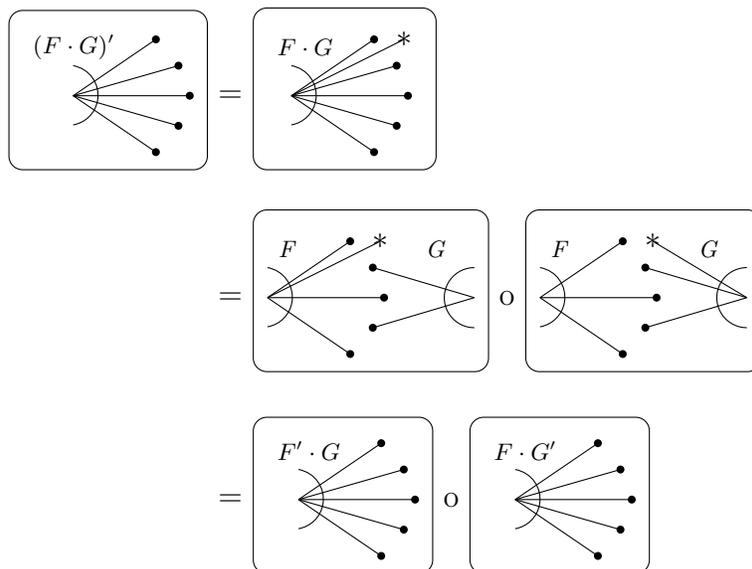
1.  $(F + G)' = F' + G'$
2.  $(F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G'$
3.  $(F \circ G)' = (F' \circ G) \cdot G'$ , si  $G_0 = 0$ .

DEMOSTRACIÓN.

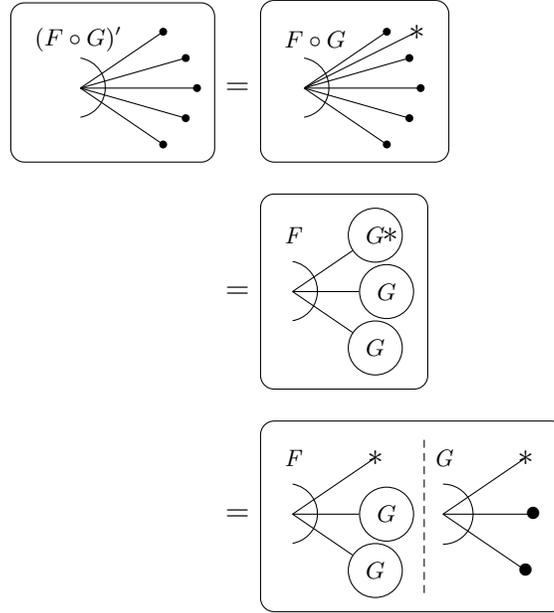
1.



2.



3.



■

Para finalizar esta parte de conceptos, hablaremos de otro tipo de operación (o aplicación) que nos será indispensable, la cual ya apareció en el capítulo anterior y que hemos llamado *apuntamiento*. Recordemos que el apuntamiento es una aplicación que asigna a cada serie de potencia  $F(z)$  la serie  $F^\bullet(z) = zF'(z)$ , entonces si  $F(z)$  es una serie generatriz exponencial, la especie  $F^\bullet$  es aquella con coeficientes  $F_n^\bullet = nF_n$ .

DEFINICIÓN 4.22. Sea  $F$  una especie de estructuras. La especie  $F^\bullet$ , llamada *apuntamiento* de  $F$ , se define como sigue: Una  $F^\bullet$ -estructura sobre  $U$  es un par  $s = (u, r)$ , donde

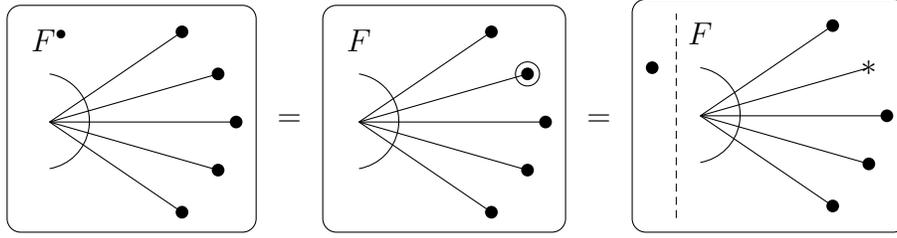
- (1)  $u \in U$  (elemento distinguido),
- (2)  $r$  es una  $F$ -estructura sobre  $U$ .

El par  $(u, r)$  es llamado  $F$ -estructura *apuntada* de  $U$ . En otras palabras, para cualquier conjunto  $U$ ,  $F^\bullet[U] = U \times F[U]$ . El transporte a través de una biyección  $\sigma : U \rightarrow V$  es simplemente asignar  $F^\bullet[\sigma](s) = (\sigma(k), F[\sigma](r))$ , para cualquier  $F^\bullet$ -estructura  $s = (k, r)$  sobre  $U$ .

La identidad

$$F^\bullet \simeq X \cdot F'$$

viene justificada por la Figura 4.15.



**Figura 4.15.** Representación gráfica del apuntamiento.

El ejemplo más claro del apuntamiento lo puede observar comparando las Figuras 4.3 y 4.4, donde obtenemos que  $\mathfrak{a}^\bullet \simeq \mathcal{A}$ . De manera similar, tenemos que  $\mathcal{A}^\bullet \simeq \mathcal{V}$ .

PROPOSICIÓN 4.23. Para especies  $F$  y  $G$  cualesquiera se tiene

1.  $(F \cdot G)^\bullet = F^\bullet \cdot G + F \cdot G^\bullet$ .
2.  $(F \circ G)^\bullet = (F' \circ G) \cdot G^\bullet$ .

DEMOSTRACIÓN. Similar al de la Proposición 4.21. ■

## 2. Árboles R-enriquecidos.

El propósito de esta sección es la deducción (combinatoria) de la ecuación (P2) y la demostración de (FIL) y (FIG) para series generatrices exponenciales. Serán de sumo interés las siguientes especies:

DEFINICIÓN 4.24. Para un conjunto finito  $V \neq \emptyset$ , y una especie de estructuras  $R$ , definimos  $R^V$  como la especie cuyas estructuras son funciones con codominio  $V$ , donde cada fibra está dotada de una  $R$ -estructura. En otras palabras, una  $R^V$ -estructura sobre un conjunto  $U$ , es un par de la forma  $(f, \{\gamma_m\}_{m \in V})$ , donde

- (1)  $f : U \rightarrow V$ ;
- (2)  $\gamma_m \in R[f^{-1}(m)]$ , para cada  $m \in V$ .

Si  $\text{card } V = k$ , entonces una función  $f : U \rightarrow V$  define una  $k$ -partición sobre  $U$  de la forma  $(U_1, \dots, U_k)$ , por lo que la siguiente igualdad (vía isomorfismo), en efecto es válida:

$$R^V \simeq R^k. \quad (4.11)$$

DEFINICIÓN 4.25. Una estructura de especie  $\text{End}_R$  (es decir, una endofunción  $R$ -enriquecida) sobre un conjunto  $U$  está compuesto de los siguientes datos:

- (1) una endofunción cualquiera  $f : U \rightarrow U$ ;
- (2) una  $R$ -estructura sobre cada fibra de la endofunción  $f$ .

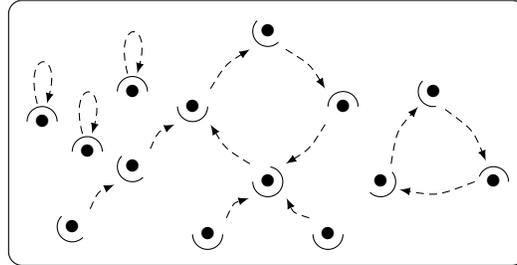


Figura 4.16. Endofunción  $R$ -enriquecida.

DEFINICIÓN 4.26. Un árbol con raíz  $R$ -enriquecido sobre un conjunto  $U$  está compuesto de los siguientes datos:

- (1) una estructura de árbol con raíz arbitrario sobre  $U$ , denotado por  $\alpha$ ;
- (2) una  $R$ -estructura sobre la fibra de cada vértice  $u \in U$  en  $\alpha$ .

Aquí la fibra de un vértice  $u$  se refiere al conjunto (posiblemente vacío)  $\alpha^{-1}(u)$  de predecesores inmediatos de  $u$ , cuando todas las aristas están orientadas hacia la raíz.

En la Figura 4.17 tenemos que

$$\alpha^{-1}(4) = \{3, 5, 6\},$$

$$\alpha^{-1}(3) = \{1, 2\},$$

$$\alpha^{-1}(1) = \emptyset.$$

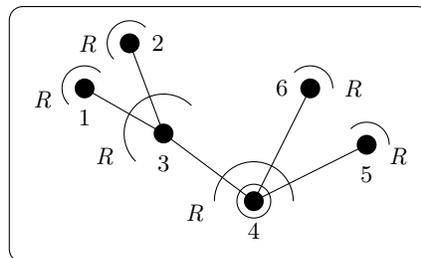
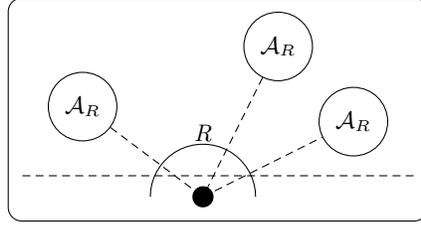


Figura 4.17. Árbol con raíz  $R$ -enriquecido.

Denotamos a la especie de árboles con raíz  $R$ -enriquecidos como  $\mathcal{A}_R$ . A los vértices con fibra vacío los llamaremos *hojas*. En la Figura 4.17 las hojas son los vértices 1, 2, 5 y 6. Note que en las fibras de estos vértices también establecemos una  $R$ -estructura. Por lo que haremos la suposición  $R_0 \neq 0$ , ya que de lo contrario obtendremos la solución trivial  $\mathcal{A}_R = \mathbf{0}$ . Teniendo en cuenta todas las operaciones vistas en la sección anterior, note que la estructura de la Figura 4.17 es igual a



De donde obtenemos la ecuación implícita

$$\mathcal{A}_R \simeq X \cdot R(\mathcal{A}_R). \quad (4.12)$$

Para el caso particular,  $R = E$ , se tiene,  $\mathcal{A}_E \simeq \mathcal{A}$  y

$$\mathcal{A} \simeq X \cdot E(\mathcal{A}), \quad (4.13)$$

siendo esta última ecuación la que estudiaremos para resolver el famoso problema de Cayley. Aplicando las propiedades de series generatrices exponenciales a la ecuación (4.12) obtenemos una ecuación con características similares a (3.4).

$$\mathcal{A}_R(z) = z \cdot R(\mathcal{A}_R(z)). \quad (4.14)$$

Ya hemos visto que resolver el problema de los cardinales  $F_n$ , para una especie  $F$  cualquiera, se reduce a hallar su serie generatriz. Lo propio haremos con la especie  $\mathcal{A}_R$ , y el método a utilizar para resolver la ecuación (4.14) será, como puede imaginar, mediante la fórmula de inversión de Lagrange.

**TEOREMA 4.27** (FIL para series generatrices exponenciales). *Sea  $R$  una especie tal que  $R_0 \neq 0$ , y  $\mathcal{A}_R$  la especie de árboles con raíz  $R$ -enriquecidos. Llamando  $\mathcal{A}(z) = \mathcal{A}_R(z)$ , tenemos que*

$$\mathcal{A}_n = R_{n-1}^n, \quad (4.15)$$

para todo  $n \geq 1$ .

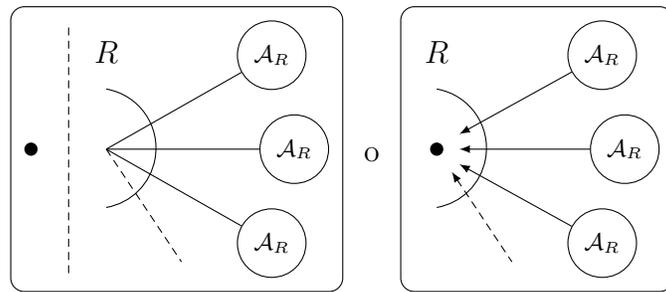
La demostración de este teorema depende de ciertos isomorfismos y equipotencias que mostraremos a continuación.

LEMA 4.28. *Para una especie  $R$  tal que  $R_0 \neq 0$ , se tiene la identidad*

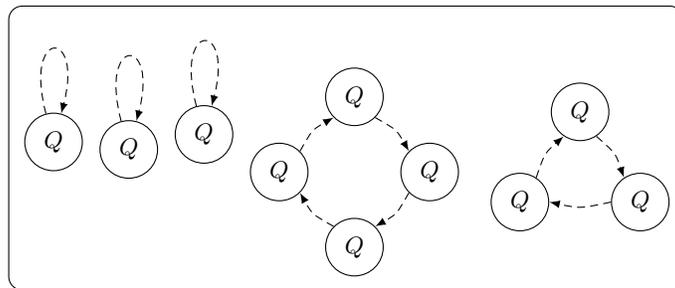
$$\text{End}_R \simeq \mathcal{S} \circ Q, \tag{4.16}$$

donde  $Q = X \cdot (R' \circ \mathcal{A}_R)$ .

DEMOSTRACIÓN. La especie  $Q$  tiene la interpretación gráfica



Teniendo esto en cuenta, note que la Figura 4.16 es equivalente a



lo que demuestra la ecuación (4.16). ■

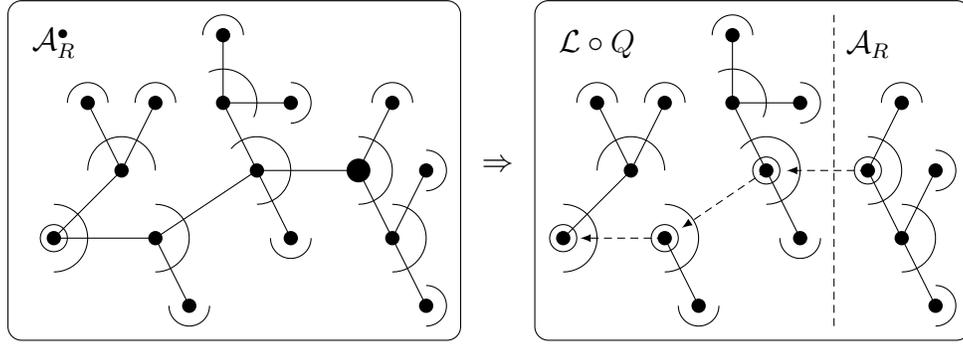
Recordando que  $\mathcal{S} \equiv \mathcal{L}$  se tiene que  $\text{End}_R \equiv \mathcal{L} \circ Q$ . En la sección anterior vimos una relación entre la especie  $\mathcal{V}$  de vertebrados y la especie  $\mathcal{A}$  de árboles con raíz. El siguiente lema da un resultado más general.

LEMA 4.29. *Para una especie  $R$  tal que  $R_0 \neq 0$ , se tiene la identidad*

$$\mathcal{A}^\bullet_R \simeq (\mathcal{L} \circ Q) \cdot \mathcal{A}_R, \tag{4.17}$$

donde  $Q$  es como en el Lema 4.28.

DEMOSTRACIÓN. Se tiene a partir del siguiente gráfico y de la Definición 4.26 que



■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.27. Por los Lemas 4.28 y 4.29 se tiene:

$$\mathcal{A}_R^\bullet \simeq (\mathcal{L} \circ Q) \cdot \mathcal{A}_R \equiv \text{End}_R \cdot \mathcal{A}_R.$$

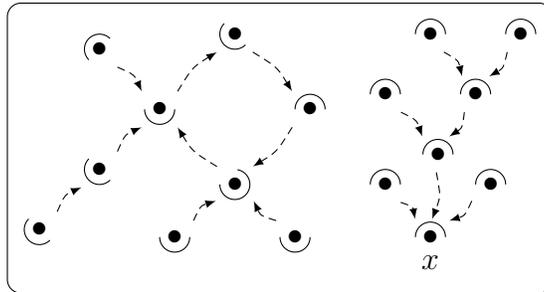
Definamos la especie auxiliar  $\Psi = \Psi_R$  de la siguiente manera: una  $\Psi$ -estructura sobre un conjunto  $U$  de cardinal  $n$  se compone de

- (1) un elemento  $u \in U$ ;
- (2) una función  $R$ -enriquecida cualquiera  $\psi : U \setminus \{u\} \rightarrow U$ .

Como hay  $n$  maneras de escoger el elemento  $u$ , y la función  $\psi$  es cualquier estructura de  $R^U[U \setminus \{u\}]$ , entonces

$$\psi_n = nR_{n-1}^n \tag{4.18}$$

por la identidad (4.11). La interpretación gráfica de una  $\Psi$ -estructura es



de donde  $\Psi \simeq \text{End}_R \cdot \mathcal{A}_R$ . De esta manera obtenemos la equipotencia

$$\mathcal{A}_R^\bullet \equiv \Psi. \tag{4.19}$$

Llamemos  $\mathcal{A}_n$  a los cardinales de  $\mathcal{A}_R$ ; de la sección anterior tenemos que  $\mathcal{A}_n^\bullet = n\mathcal{A}_n$ , y así, por la igualdad (4.18):

$$n\mathcal{A}_n = nR_{n-1}^n,$$

de donde obtenemos el resultado, ya que  $n \geq 1$  por la definición de árbol  $R$ -enriquecido. ■

Hemos considerado al Teorema 4.27 como la versión combinatoria de (FIL) ya que a partir de este resultado es fácil ver que

$$[z^n]\mathcal{A}(z) = \frac{1}{n}[z^{n-1}]R^n(z).$$

Este teorema funciona para resolver cualquier problema de la forma

$$f(z) = zR(f(z)), \tag{3.4}$$

siendo  $R$  una serie generatriz exponencial con coeficiente independiente no nulo. La deducción realizada para obtener la identidad (4.6) garantiza este hecho, pues siempre podremos encontrar una especie  $R$  cuya serie generatriz sea  $R(z)$ . Es decir, podemos variar los coeficientes de  $R(z)$  sobre el conjunto  $\mathbb{N}$  y siempre hallar una solución de (3.4).

Note además que la ecuación (4.15) nos dice que los cardinales  $\mathcal{A}_n$  se escriben como producto y suma de los  $n$  primeros cardinales de la especie  $R$ . En otras palabras, podemos observar a los coeficientes  $\mathcal{A}_n$  como polinomios que dependen de las variables  $R_0, R_1, \dots, R_n$ .

**TEOREMA 4.30** (Principio de extensión de identidades algebraicas). *Sea  $\mathbb{D}$  un dominio integral. Dado un polinomio  $P(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{D}[x_1, \dots, x_m]$ , denotamos por  $\text{grad}_i P$  el grado de  $P$  con respecto a la variable  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Sean  $P(x_1, \dots, x_m)$  y  $Q(x_1, \dots, x_m)$  dos polinomios tales que toman los mismos valores en cada punto  $(s_1, \dots, s_m)$  de un conjunto  $S \subseteq \mathbb{D}^m$  que satisface la siguientes propiedades: Para cada  $i = 1, \dots, m$ , existe  $S_i \subseteq \mathbb{D}$  tal que:*

1.  $\prod_{i=1}^m S_i \subseteq S$ .
2.  $\text{card } S_i > \max(\text{grad}_i P, \text{grad}_i Q)$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ .

*Entonces, los polinomios  $P$  y  $Q$  son idénticos.*

Debido a este teorema, tomando  $\mathbb{D} = \mathbb{C}$  y  $S = \mathbb{N}$ , y considerando los “polinomios”  $\mathcal{A}_n(R_0, \dots, R_n)$ , obtenemos que las ecuaciones (FIL) demostradas en este capítulo, en efecto

se satisfacen para cualquier serie con coeficientes en  $\mathbb{C}$ . Para la deducción de la ecuación general (FIG) usaremos las especies del Ejemplo 4.3 y luego extenderemos por linealidad. El propósito ahora es determinar que para cualquier especie  $F = E_{(k)}$  y una arborescencia  $R$ -enriquecida como antes, se tiene que

$$(E_{(k)} \circ \mathcal{A})_n = (E'_{(k)} \cdot R^n)_{n-1}. \quad (4.20)$$

Primero analicemos la especie  $E_{(k)} \circ \mathcal{A}$ . Recordemos que la especie  $E_{(k)}$  sólo genera estructuras sobre conjuntos de cardinal  $k$ , por lo que en la composición anterior sólo tomaremos en cuenta a las  $k$ -particiones sobre cada conjunto  $U$ . En otras palabras, la ecuación (4.20) se reduce a demostrar el siguiente teorema

**TEOREMA 4.31** (FIG para series generatrices exponenciales). *Sea  $R$  una especie tal que  $R_0 \neq 0$ , y  $\mathcal{A}_R$  la especie de árboles con raíz  $R$ -enriquecidos. Llamando  $\mathcal{A}(z) = \mathcal{A}_R(z)$  tenemos que si  $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{A}_n^k = (E'_{(k)} \cdot R^n)_{n-1}, \quad (4.21)$$

para todo  $n \geq 1$ .

**DEMOSTRACIÓN.** La demostración de este teorema se basa, de hecho, en un razonamiento similar al de la demostración del Teorema 4.27. Trabajaremos solamente con el caso  $k \geq 1$ , ya que para  $k = 0$  es directo. Definamos la especie auxiliar  $\Psi^k = \Psi_R^k$  de la siguiente manera: una  $\Psi^k$ -estructura sobre un conjunto  $U$  se compone de

- (1) un subconjunto cualquiera  $\Lambda \subseteq U$  de cardinal  $k$ ;
- (2) un elemento  $x \in \Lambda$ ;
- (3) una función  $R$ -enriquecida cualquiera  $\psi : U \setminus \Lambda \rightarrow U$ .

Note que esta especie generaliza a la especie  $\Psi$  de la demostración del Teorema 4.27 en el sentido que  $\Psi^1 \simeq \Psi$ . De manera análoga, podemos demostrar que  $(\mathcal{A}_R^k)^\bullet \equiv \Psi^k$ , de donde, si  $\text{card } U = n \geq k$ , entonces

$$(\mathcal{A}_n^k)^\bullet = n\mathcal{A}_n^k = \Psi_n^k.$$

Por otro lado, por la definición de  $\Psi^k$ , se tiene que para dicho conjunto  $U$  hay la siguiente cantidad de estructuras,

$$\Psi_n^k = k \binom{n}{k} R_{n-k}^n.$$

Entonces, de esta igualdad y de la equipotencia obtenemos que

$$\mathcal{A}_n^k = \binom{n-1}{k-1} R_{n-k}^n = (E_{(k-1)} \cdot R^n)_{n-1} = (E'_{(k)} \cdot R^n)_{n-1},$$

quedando demostrado el teorema. ■

Aprovechando la equipotencia (4.6) y el hecho de que los operadores  $[z^n]$  y el operador diferencial  $D$  son lineales, obtenemos que el Teorema 4.31 se satisface para cualquier especie  $F$ , es decir, en efecto es válida la ecuación

$$(F \circ \mathcal{A})_n = (F' \cdot R^n)_{n-1}.$$

Para finalizar, por el teorema de extensión de identidades algebraicas, podemos asegurar que la ecuación (FIG) se satisface para cualquier serie de potencia  $F(z)$  en el espacio  $\mathbb{C}[z]$ .

## CAPÍTULO 5

### Otras demostraciones y resultados.

Ya hemos dado las demostraciones de la fórmula de inversión de Lagrange que requerían de un desarrollo teórico más amplio. El propósito de este capítulo es mostrar otras particularidades de FIL, así como otros ámbitos y problemas interesantes donde aparece la fórmula (P2). Debido a lo práctico y sencillo que resultó trabajar con los funcionales de coeficientes, usaremos exclusivamente la notación propuesta en el Capítulo 3 en cada una de las próximas secciones.

#### 1. Otra demostración analítica.

En el Capítulo 2 dimos una demostración analítica de la fórmula (FIG), la cual dependía totalmente de la fórmula integral de Cauchy (Teorema 2.2). Asimismo, en el Capítulo 3, dimos otra demostración que resultó ser consecuencia de la definición de residuo y sus implicaciones, pero establecimos una condición de orden para poder resolver el problema (P2). En esta sección daremos una demostración completamente similar a la del residuo pero cambiaremos la condición de inversión, que tendrá que ver más con características geométricas que posee una función holomorfa.

Para seguir con el mismo orden de los Capítulos 2 y 3, trabajaremos con funciones de variable compleja que admiten series de Laurent centradas en el polo  $z = 0$ . Las condiciones bajo las cuales una función posee una representación de esta forma se ven en cualquier curso básico de Variable Compleja, y viene establecido por el siguiente teorema:

**TEOREMA 5.1** (Teorema de Laurent). *Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos círculos centrados en  $z = 0$ , con respectivos radios  $r_1$  y  $r_2$ , donde  $r_2 < r_1$  (Figura 5.1). Si  $f$  es una función holomorfa sobre  $C_1$ ,  $C_2$  y el dominio encerrado entre ambas curvas, entonces para cada punto  $z$  en dicho dominio,  $f(z)$  está representada por la expansión:*

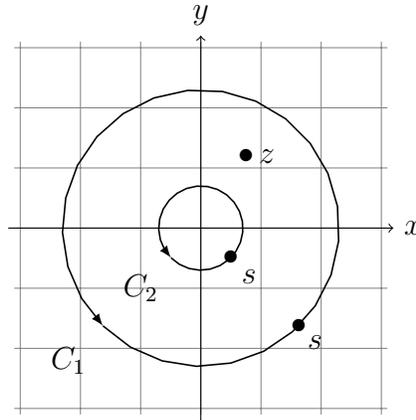
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}, \quad (5.1)$$

donde,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)}{s^{-n+1}} ds \quad (n = 1, 2, \dots),$$

y cada integral de línea se considera contrareloj.

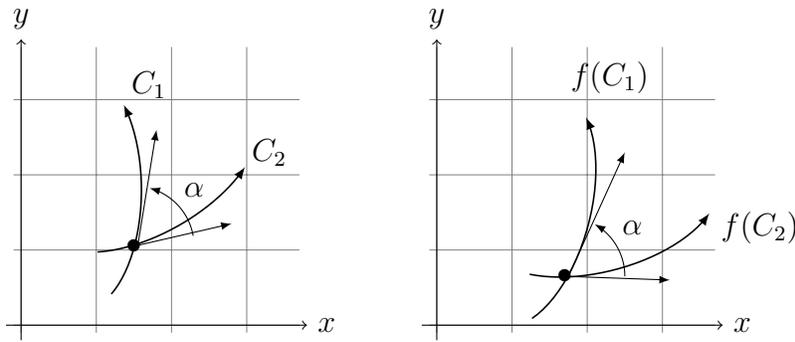


**Figura 5.1.** Dibujo para el Teorema de Laurent.

La demostración se ve por igual en Variable Compleja, pero para mayor referencia puede revisar [4]. Como consecuencia directa de este teorema, es fácil ver que si  $f(z)$  es una función holomorfa dentro y sobre el contorno  $C_1$  entonces  $b_n = 0$  para todo  $n \geq 1$ , y así obtenemos la serie de Taylor (o de Maclaurin en nuestro caso particular) de  $f(z)$ . Más allá de esto, las ecuaciones de los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  no nos son completamente indispensables, sin embargo, ambas expresiones nos dicen que la demostración de Cauchy del Capítulo 2 y la de residuos del Capítulo 3 son esencialmente las mismas, salvo los argumentos usados para garantizar la existencia de la solución del problema (P2). De igual manera, en esta sección estableceremos la condición con la cual el problema (P2) tendrá solución, y ésta depende fuertemente de la siguiente caracterización geométrica:

**DEFINICIÓN 5.2.** Una función compleja que preserve la magnitud y sentido del ángulo entre los vectores tangentes de dos curvas suaves cualesquiera en un punto común se dice *conforme* en ese punto.

Para visualizar mejor esta definición vea la Figura 5.2.



**Figura 5.2.** Ejemplo de una función conforme.

Las funciones conformes poseen una gran cantidad de propiedades útiles e interesantes, entre las que destacaremos (por ser las más concernientes para nuestros propósitos) las siguientes:

**TEOREMA 5.3.** *En cada punto  $z$  donde una función  $f$  es analítica y  $f'(z) \neq 0$  la función  $y = f(z)$  es conforme.*

**TEOREMA 5.4.** *Si una función  $y = f(z)$  es conforme en un punto  $z_0$ , la función  $f$  posee una inversa local analítica en  $y_0 = f(z_0)$ .*

Recordando el operador residuo, de manera similar al Capítulo 3, tenemos la siguiente propiedad:

**LEMA 5.5.** *Sea  $H(z)$  una función de variable compleja que admite serie de Laurent. Para cualquier función analítica  $h(z)$  tal que  $h(0) = 0$  y  $h'(0) \neq 0$ , se tiene*

$$\text{Res}[H(h(z))h'(z)] = \text{Res}[H(z)].$$

La demostración es análoga a la del Teorema 3.12.

**TEOREMA 5.6** (2ª versión analítica de FIG). *Sea  $y = g(z)$  una función de variable compleja, tal que es analítica en un entorno de  $z = 0$ ,  $g(0) = 0$  y  $g'(0) \neq 0$ . Entonces  $g(z)$  posee una inversa  $G(y)$  analítica en un entorno de  $y = 0$ . Además, para cualquier función  $F(z)$  analítica en  $z = 0$  se tiene que la función  $F(G(y))$  posee serie de Taylor:*

$$F(G(y)) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n y^n,$$

donde los coeficientes  $c_n$  se obtienen a partir de la ecuación:

$$c_n = \frac{1}{n} [z^{n-1}] F'(z) M^n(z). \quad (\text{FIG})$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que la función  $y = g(z)$  es analítica alrededor de  $z = 0$ , y  $g'(0) \neq 0$ , por el Teorema 5.3, tenemos que la función  $g(z)$  es conforme, y por el Teorema 5.4,  $g(z)$  posee inversa  $G(y) = \bar{g}(y)$ , en un entorno de  $y = 0$ . Escribiendo,  $g(z) = ze(z)$ , donde  $e(z)$  es una serie de Taylor de orden 0, sabemos ya que hallar  $G(y)$  es lo mismo que resolver

$$G(y) = yM(G(y)),$$

donde  $M(z) = e^{-1}(z)$ . Tenemos que  $G(0) = 0$  ya que  $g(0) = 0$ . De esta manera, para cualquier  $F(z)$  analítica en  $z = 0$  tenemos que  $(F \circ G)(y)$ , también es analítica en  $y = 0$  y por lo tanto,  $F(z)$  admite una serie de Taylor en la variable  $y$  cuando  $z = G(y)$ .

Supongamos que  $F(z)$  posee la siguiente representación en potencias de  $y$ :

$$F(z) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n y^n,$$

entonces

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n y^{n-1} \frac{dy}{dz}.$$

Sea  $N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n y^{n-1}$ . Por el Lema 5.5, para  $r = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{Res} \left[ \frac{F'(z) M^r(z)}{z^r} \right] = \text{Res} \left[ \frac{F'(z)}{y^r} \right] = \text{Res} \left[ \frac{N(y) dy}{y^r dz} \right] = \text{Res} \left[ \frac{N(z)}{z^r} \right] = r c_r.$$

Pero por las propiedades de los funcionales de coeficientes:

$$\text{Res} \left[ \frac{F'(z) M^r(z)}{z^r} \right] = [z^{r-1}] (F' \cdot M^r)(z)$$

y así

$$r c_r = [z^{r-1}] (F' \cdot M^r)(z).$$

Finalmente,

$$c_r = \frac{1}{r} [z^{r-1}] (F' \cdot M^r)(z),$$

que es lo que deseábamos obtener. ■

En esta demostración, todas las igualdades que involucran a la serie  $G(y)$  se cumplen sobre el entorno de  $y = 0$  que el Teorema 5.4 garantiza que existe. La pregunta natural sería cómo conocer dicho entorno. Una vez obtenida la serie  $G(y)$  podemos hacer uso de los criterios aprendidos en las materias básicas de cálculo para hallar su radio de convergencia. En el Capítulo 6 daremos algunos ejemplos relacionados con este aspecto.

## 2. Algoritmo para FIL.

En esta sección daremos un método iterativo para hallar los coeficientes de la serie (FIL), usando como herramienta fundamental el teorema del punto fijo de Banach. Para ello necesitamos recordar una definición de Análisis Funcional.

DEFINICIÓN 5.7. Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Una aplicación  $T : X \rightarrow X$  (no necesariamente lineal) es llamada *contracción* si existe un escalar  $\lambda > 0$  tal que

$$d(T(y_1), T(y_2)) \leq \lambda d(y_1, y_2), \quad \forall y_1, y_2 \in X.$$

Será usual llamar a  $T$ ,  $\lambda$ -*contracción*, para especificar que  $\lambda$  es la *constante de contracción*.

TEOREMA 5.8 (Punto fijo de Banach). *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $T : X \rightarrow X$  una  $\lambda$ -contracción, con  $0 \leq \lambda < 1$ . Entonces,  $T$  tiene un único punto fijo. Más aún, para cualquier  $x_0 \in X$ , la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , definida recursivamente por  $x_{n+1} = T(x_n)$ , converge al punto fijo de  $T$ .*

Puede hallar una demostración de este teorema en [9]. El espacio vectorial sobre el que trabajaremos será  $X = \mathbb{C}[z]$ , definido en el Capítulo 3. Debemos establecer ahora una métrica apropiada sobre este espacio para aplicar el Teorema 5.8.

TEOREMA 5.9. *La aplicación  $d : \mathbb{C}[z] \times \mathbb{C}[z] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por*

$$d(f(z), g(z)) = \frac{1}{2^{\text{ord}(f-g)}},$$

*es una métrica sobre el espacio  $\mathbb{C}[z]$ , entendiéndose que  $\frac{1}{2^\infty} = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sólo probaremos la desigualdad triangular, ya que las demás propiedades se satisfacen directamente de la definición de la aplicación  $d$  y de la definición de orden. Sean  $f(z)$ ,  $g(z)$  y  $h(z)$  series de potencias cualesquiera. Veamos que

$$d(f(z), h(z)) \leq d(f(z), g(z)) + d(g(z), h(z)).$$

Tenemos que  $\text{ord}(F + G) \geq \min\{\text{ord } F, \text{ord } G\}$ , para cualesquiera series de potencia  $F(z)$  y  $G(z)$ , entonces

$$\text{ord}(f - h) \geq \min\{\text{ord } f - g, \text{ord } g - h\} = m.$$

Llamando  $M = \max\{\text{ord } f - g, \text{ord } g - h\}$ , obtenemos que

$$\frac{1}{2^{\text{ord}(f-h)}} \leq \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^M},$$

lo que demuestra lo deseado. ■

Con esta métrica,  $(\mathbb{C}[z], d)$  es un espacio completo. Este resultado es básicamente consecuencia de la siguiente proposición:

**PROPOSICIÓN 5.10.** *Denotemos  $T_k(F)$  como el polinomio de Taylor de orden  $k$  de una serie  $F(z)$ . Tenemos que,*

$$d(f(z), g(z)) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \quad \Leftrightarrow \quad T_k(f) = T_k(g)$$

para dos series de potencia  $f(z)$  y  $g(z)$  cualesquiera.

Consideremos el espacio  $z\mathbb{C}[z]$  de todas las series con término independiente nulo, y la aplicación  $T : z\mathbb{C}[z] \rightarrow z\mathbb{C}[z]$  definida por:

$$T(y) = zM(y),$$

siendo  $M(z)$  una serie de potencias tal que  $\text{ord } M = 0$ .

Esta aplicación es  $\frac{1}{2}$ -contractiva ya que

$$d(T(y_1), T(y_2)) = \frac{1}{2^{\text{ord } z(M(y_1) - M(y_2))}} = \frac{1}{2^{\text{ord}(M(y_1) - M(y_2)) + 1}} \leq \frac{1}{2} d(y_1, y_2).$$

El dominio  $z\mathbb{C}[z]$  es la bola cerrada en  $(\mathbb{C}[z], d)$ , cuyo centro es  $f = 0$  y el radio es  $\frac{1}{2}$ . Consecuentemente, nuestro dominio es también un espacio métrico completo con respecto a la métrica relativa. Además, si definimos la serie  $g(z) = ze(z)$ , donde  $e(z) = M^{-1}(z)$ , entonces el único punto fijo de la aplicación  $T$  es la serie  $G(z) = \bar{g}(z)$ . Note que estamos bajo las condiciones del Teorema 5.8. Supongamos que los coeficientes de la serie  $M(z)$  son  $M_n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Comencemos el proceso de iteración en  $f_0(z) = 0$ . Entonces,  $f_1(z) = M_0 z$ . Como  $T$  tiene coeficiente de contracción  $\frac{1}{2}$ , entonces

$$d(G(z), f_1(z)) = d(T(G(z)), T(0)) \leq \frac{1}{2} d(G(z), 0) = \frac{1}{2^2}.$$

Por la Proposición 5.10, obtenemos que

$$T_1(G) = M_0z.$$

Repetimos el proceso;  $f_2(z) = T(f_1(z)) = zM(M_0z) = M_0z + M_0M_1z^2 + \dots$ . Como

$$d(G(z), f_2(z)) \leq \frac{1}{2}d(G(z), f_1(z)) \leq \frac{1}{2^3},$$

obtenemos que

$$T_2(G) = M_0z + M_0M_1z^2.$$

De manera similar, para  $n = 3$ :

$$T_3(G) = T_3(f_3) = M_0z + M_0M_1z^2 + (M_0M_1^2 + M_0^2M_2)z^3.$$

En general, si queremos obtener los coeficientes de  $G(z)$  hasta el grado  $m$ , basta conocer su polinomio de Taylor de orden  $m$  que obtenemos a partir del algoritmo:

$$T_m(G) = T_m(\underbrace{T(T(\dots(T(0))\dots))}_{m \text{ veces}}).$$

Ya que conocemos un algoritmo para hallar estos polinomios, si  $1 \leq n \leq m$ , entonces

$$[z^n]G(z) = \frac{1}{n}[z^{n-1}]M^n(z) = [z^n]T_m(G(z)). \quad (5.2)$$

Por último, daremos un ejemplo sencillo para ilustrar el proceso iterativo: sea  $M(z) = z + 1$  y la aplicación  $T(y) = zM(y)$ . Entonces el polinomio de Taylor de orden 5 del punto fijo de  $T$  lo obtenemos de la siguiente manera:

$$T(0) = z,$$

$$T(T(0)) = z(z + 1) = z^2 + z,$$

$$T(T(T(0))) = z(z^2 + z + 1) = z^3 + z^2 + z,$$

$$T(T(T(T(0)))) = z(z^3 + z^2 + z + 1) = z^4 + z^3 + z^2 + z,$$

$$T(T(T(T(T(0)))))) = z(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z.$$

El polinomio de Taylor de orden 5 del punto fijo  $G(z)$  es:

$$T_5(G) = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z.$$

De hecho,  $G(z)$  es la serie geométrica sin término independiente:

$$G(z) = \frac{z}{1-z},$$

lo cual podemos verificar por inducción.

### 3. Arreglos de Riordan.

Shapiro introdujo el concepto de *arreglos de Riordan* en 1991, con el propósito de definir una clase de arreglos (o matrices) triangulares inferiores de orden infinito que tuviesen propiedades similares a las del triángulo de Pascal. Por los momentos, sólo nos centraremos en definir estos objetos y no tardaremos en encontrar la estrecha relación que existe con la Fórmula de Inversión de Lagrange. A lo largo del trabajo hemos usado la variable  $z$  como el argumento de las funciones holomorfas, o como el indefinido de las series formales, sin embargo, para adecuarnos con el formato usual de la literatura de los arreglos de Riordan usaremos en esta sección el término  $t$  (y en algunos casos  $y$  ó  $w$ ), y trabajaremos con series formales sobre  $\mathbb{C}[t]$ .

DEFINICIÓN 5.11. Sean  $d(t)$  y  $h(t)$  dos series formales en  $\mathbb{C}[t]$ . Un *arreglo de Riordan* es una matriz  $(d_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ , cuyas entradas están definidas por:

$$d_{n,k} = [t^n]d(t)(th(t))^k. \quad (5.3)$$

Denotaremos este arreglo por  $(d(t), h(t))$ . Si  $\text{ord } d \neq 0$  y  $\text{ord } h \neq 0$ , llamaremos a  $(d(t), h(t))$  un arreglo de Riordan *propio*.

Frecuentemente usaremos la notación  $(d(t), h(t))$ , pero cada arreglo matricial  $(d_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$  también podemos identificarlos con la función generatriz bivariada

$$d(t, w) = \frac{d(t)}{1 - wth(t)}, \quad (5.4)$$

puesto que para cada  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $d_{n,k} = [t^n][w^k]d(t, w)$ .

Es fácil verificar que los arreglos de Riordan cumplen con las características que nombramos al comienzo de esta sección; en efecto se trata de matrices triangulares inferiores. La propiedad algebraica más importante de los arreglos de Riordan yace en el hecho de que es cerrado con respecto al producto usual de matrices:

PROPOSICIÓN 5.12. *El producto usual fila por columna de dos arreglos de Riordan es un arreglo de Riordan.*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $(d(t), h(t)) = (d_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$  y  $(f(t), b(t)) = (f_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$  dos arreglos de Riordan. La entrada  $n, k$  del producto de ambos arreglos es:

$$\sum_{j=0}^{\infty} d_{n,j} f_{j,k}.$$

Note que estas entradas están bien definidas pues se tratan de sumas finitas. De la Definición 5.11 obtenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} d_{n,j} f_{j,k} &= \sum_{j=0}^{\infty} [t^n] d(t) (th(t))^j [y^j] f(y) (yb(y))^k \\ &= [t^n] d(t) \sum_{j=0}^{\infty} ([y^j] f(y) (yb(y))^k) (th(t))^j \\ &= [t^n] d(t) f(th(t)) (th(t)b(th(t)))^k. \end{aligned}$$

Es decir, la matriz producto tiene representación  $(d(t)f(th(t)), h(t)b(th(t)))$ , lo que concluye la demostración. ■

Con respecto a este producto, el arreglo  $I = (1, 1)$  representa la matriz identidad. En álgebra lineal es bien conocida la propiedad de la inversa de matrices triangulares; sólo poseen inversa aquellas cuyas entradas de la diagonal sean todas distintas de 0. En nuestro caso sucederá algo similar, por lo que sólo consideraremos los arreglos de Riordan propios, por ser quienes satisfacen la condición de la diagonal. Si definimos formalmente el producto de arreglos de Riordan como:

$$(d(t), h(t)) * (f(t), b(t)) = (d(t)f(th(t)), h(t)b(th(t))) \quad (5.5)$$

entonces, para hallar la inversa de un arreglo de Riordan propio  $(d(t), h(t))$  debemos resolver:

$$(d(t), h(t)) * (f(t), b(t)) = (d(t)f(th(t)), h(t)b(th(t))) = (1, 1). \quad (5.6)$$

De donde obtenemos que

$$f(y) = d^{-1}(t) \quad y \quad b(y) = h^{-1}(t),$$

cuando  $t = yh^{-1}(t)$ . Note que hallar a  $t$  en función de  $y$  es lo mismo que resolver el problema (P2), por lo que hemos obtenido la primera relación fundamental entre los arreglos de Riordan y la Fórmula de Inversión de Lagrange. Además, recordando la teoría del Capítulo 3, aseguramos la unicidad de esta inversa. Usaremos la notación estándar:

$$f(y) = [d^{-1}(t)|t = yh^{-1}(t)] \quad y \quad b(y) = [h^{-1}(t)|t = yh^{-1}(t)].$$

Denotaremos a la inversa de un arreglo de Riordan propio  $(d(t), h(t)) = (d_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$  por  $(\bar{d}(t), \bar{h}(t)) = (\bar{d}_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ . Para ser más precisos en cuanto al uso de la fórmula de inversión en este tema, demostraremos el siguiente teorema:

**TEOREMA 5.13.** *Sea  $(d(t), h(t))$  cualquier arreglo de Riordan propio. Entonces las entradas  $\bar{d}_{n,k}$  de la inversa  $(\bar{d}(t), \bar{h}(t))$  vienen dadas por la fórmula:*

$$\bar{d}_{n,k} = \frac{1}{n} [y^{n-k}] \left( k - \frac{yd'(y)}{d(y)} \right) \frac{1}{d(y)h^n(y)}. \quad (5.7)$$

**DEMOSTRACIÓN.** Por la identidad (5.4) tenemos que:

$$\bar{d}_{n,k} = [t^n][w^k] \frac{\bar{d}(t)}{1 - wt\bar{h}(t)} = [t^n][w^k] \left[ \frac{\bar{d}(t)}{1 - wy} \mid y = t\bar{h}(t) \right].$$

Como  $h(y)\bar{h}(yh(y)) = 1$  y  $\bar{h}(t)h(t\bar{h}(t)) = 1$ , obtenemos que  $y = t\bar{h}(t)$  si y sólo si  $t = yh(y)$ . Luego,

$$\bar{d}_{n,k} = [w^k][t^n] \left[ \frac{\bar{d}(t)}{1 - wy} \mid t = yh(y) \right] = [w^k][t^n] \left[ \frac{1}{d(y)(1 - wy)} \mid y = th^{-1}(y) \right].$$

Estamos en condiciones de aplicar (FIG) a ésta última expresión, y así obtenemos que:

$$\begin{aligned} \bar{d}_{n,k} &= [w^k] \frac{1}{n} [y^{n-1}] \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{d(y)(1 - wy)} \right) h^{-n}(y) \\ &= [w^k] \frac{1}{n} [y^{n-1}] \left( \sum_{r=0}^{\infty} w^{r+1} y^r (r+1) - \frac{d'(y)}{d(y)} \sum_{r=0}^{\infty} w^r y^r \right) \frac{1}{h^n(y)} \\ &= \frac{1}{n} [y^{n-k}] \left( k - \frac{yd'(y)}{d(y)} \right) \frac{1}{d(y)h^n(y)}. \end{aligned}$$

■

Ahora veremos que los arreglos de Riordan poseen toda la información del problema (3.4), incluida aquella que obtenemos a partir de la ecuación (1.9) del Capítulo 1. Sea  $g(t)$  una serie formal invertible; como  $\text{ord } g = 1$  entonces  $(1, g(t)/t)$  es un arreglo de Riordan propio. Por definición, las entradas de este arreglo son de la forma

$$d_{n,k} = [t^n]g^k(t).$$

Es decir, la columna  $k$ -ésima de este arreglo viene dada por los coeficientes de la potencia  $g^k(t)$ . Si  $G(t)$  es la inversa de  $g(t)$ , considerando el producto (5.5), es fácil verificar que la inversa del arreglo  $(1, g(t)/t)$  es  $(1, G(t)/t)$ . Por el Teorema 5.13, se tiene que las entradas de este último arreglo son:

$$\bar{d}_{n,k} = [y^n]G^k(y) = \frac{k}{n}[y^{n-k}] \left( \frac{y}{g(y)} \right)^n.$$

Por las propiedades de los funcionales de coeficientes usadas a lo largo del Capítulo 3, podemos verificar que la ecuación anterior es equivalente a (FIG) cuando  $F(y) = y^k$  y  $M(y) = y/g(y)$ .

En particular, los arreglos de Riordan con series generatrices  $d(t)$  y  $h(t)$  de coeficientes enteros, se usan para resolver una gran cantidad de problemas combinatorios. Como se dijo al comienzo de esta sección, los arreglos de Riordan generalizan en cierto modo al triángulo de Pascal. De hecho, por las propiedades del combinatorio generalizado:

$$\binom{n}{k} = [t^n] \frac{1}{1-t} \left( \frac{t}{1-t} \right)^k,$$

y por lo tanto, el triángulo de Pascal tiene representación

$$\left( \frac{1}{1-t}, \frac{1}{1-t} \right).$$

Una propiedad sumamente relevante de los arreglos de Riordan que suele usarse para trabajar en el ámbito combinatorio es el siguiente:

**PROPOSICIÓN 5.14.** *Si  $(d(t), h(t))$  es un arreglo de Riordan y  $f(t)$  es una serie formal con coeficientes  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , entonces*

$$\sum_{k=0}^n d_{n,k} f_k = [t^n] d(t) f(th(t)). \quad (5.8)$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba consiste en un cálculo sencillo mediante los funcionales de coeficientes:

$$\sum_{k=0}^n d_{n,k} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} [t^n] d(t) (th(t))^k f_k = [t^n] d(t) \sum_{k=0}^{\infty} f_k (th(t))^k = [t^n] d(t) f(th(t)).$$

■

En términos de matrices, los coeficientes  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la serie generatriz  $d(t)f(th(t))$  vienen dados por el producto:

$$\begin{pmatrix} d_{0,0} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ d_{1,0} & d_{1,1} & 0 & 0 & \cdots \\ d_{2,0} & d_{2,1} & d_{2,2} & 0 & \cdots \\ d_{3,0} & d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Cuando el arreglo de Riordan  $(d(t), h(t))$  es propio, podemos invertir la relación anterior, es decir, podemos encontrar una expresión similar para los coeficientes  $f_n$  dependiendo de los coeficientes  $g_n$ :

$$f_n = \sum_{k=0}^n \bar{d}_{n,k} g_k.$$

Lo interesante de estas relaciones es que aparecen prácticamente en cualquier aplicación dentro del campo de la combinatoria, y es por ello que un extenso estudio se ha dedicado a estas ecuaciones. Puede revisar [14] y [16] para varios ejemplos. En materia de cálculo, los arreglos de Riordan propios son relativamente prácticos, pero en general, el cálculo de la inversa puede resultar sumamente complicado. Para finalizar esta parte, veremos que (FIG) puede generar de manera eficiente arreglos de Riordan propios así como de sus inversas. Usaremos específicamente el Teorema 3.18, el cual ya sabemos es equivalente al Teorema 3.11. Usando las Proposiciones 3.6 y 3.7 podemos reescribir la ecuación (3.8) como:

$$\frac{1}{n} \operatorname{Res} F'(t) g^{-n}(t) = \operatorname{Res} F(t) g'(t) g^{-n-1}(t). \quad (5.9)$$

De esta manera podemos demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA 5.15 (Construcción de pares de inversas). *Sea  $f(t)$  una serie de potencia de orden 0, y  $a(t), b(t)$  dos series de orden 1. Entonces,*

$$\alpha_{n,k} = \text{Res } f(t)b'(t)b^{-n-1}(t)a^k(t)$$

$$\beta_{n,k} = \text{Res } f^{-1}(t)a'(t)a^{-n-1}(t)b^k(t)$$

*forman un par de arreglos mutuamente invertibles.*

DEMOSTRACIÓN. Usando las propiedades de orden podemos verificar que en efecto los arreglos  $(\alpha_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$  y  $(\beta_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$  son invertibles. Verifiquemos que  $(\bar{\alpha}_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}} = (\beta_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ . Dado que  $\text{ord } g = 1$  y  $\text{ord } h = 1$  podemos aplicar el Teorema 3.18 y por lo tanto, la fórmula (5.9) nos dice que:

$$f(t)a^k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,k} b^n(t),$$

cuando tomamos  $F(t) = f(t)a^k(t)$  y  $g(t) = b(t)$ , y

$$f^{-1}(t)b^k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n,k} a^n(t),$$

cuando tomamos  $F(t) = f^{-1}(t)b^k(t)$  y  $g(t) = a(t)$ . En la primera de estas ecuaciones multipliquemos por  $\beta_{k,m}$  y sumando sobre  $k \in \mathbb{N}$  obtenemos:

$$f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k,m} a^k(t) = f(t)f^{-1}(t)b^m(t) = b^m(t).$$

Por otro lado,

$$f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k,m} a^k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k,m} f(t)a^k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k} \beta_{k,m} \right) b^n(t).$$

Como podemos escribir:

$$b^m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{nm} b^n(t),$$

obtenemos que en efecto el arreglo  $(\beta_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$  es la inversa (a derecha) de  $(\alpha_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ . Para obtener el cálculo a izquierda sólo debemos realizar el mismo análisis para la expresión en serie de  $f^{-1}(t)b^k(t)$ . ■

En el Capítulo 6 mostraremos una aplicación de este teorema.

## CAPÍTULO 6

### Aplicaciones

Ha llegado el momento de dar varios ejemplos para mostrar la efectividad de la Fórmula de Inversión de Lagrange. En su mayoría serán ejemplos combinatorios donde obtendremos distintas interpretaciones para la ecuación (P2), pero veremos que varios de estos problemas tendrán por igual una interpretación analítica o algebraica.

Ya en el Capítulo 1 mostramos cómo Lagrange utilizó (FIL) para dar la solución del problema de Kepler (ecuación (1.10)). Podrá recordar que en el contexto histórico con el que nos referimos a dicha solución resultó para la época sumamente interesante por establecer un método distinto para trabajar con la teoría de Kepler, pero en realidad, la ecuación (1.10) resultó poco eficiente debido a la dificultad de calcular los coeficientes requeridos. De por sí, las funciones trigonométricas parecen ser bastante resistentes cuando se trata de aplicar (FIG) en una ecuación donde estén involucradas. Sin embargo, en las aplicaciones que mostraremos a continuación veremos que la función exponencial y las funciones binomiales se ajustan bastante bien para resolver una gran cantidad de problemas involucrados con la ecuación (P2) y son especialmente llevaderas con la Fórmula de Inversión de Lagrange.

**APLICACIÓN 6.1** (Una inversa simple). Consideremos la función compleja  $g(z) = ze^{-az}$ , con  $a \in \mathbb{C}$ . Es fácil verificar que esta función satisface las hipótesis del desarrollo analítico del Capítulo 5, por lo que podemos hallar su inversa  $G(y)$  en un entorno de 0. Además,  $G(y) = yM(G(y))$ , donde  $M(z) = e^{az}$ . Por la ecuación (FIG), tomando  $F(z) = z$ , obtenemos que para  $n > 0$ ,

$$[z^n]G(z) = \frac{1}{n}[z^{n-1}]M^n(z) = \frac{1}{n}[z^{n-1}]e^{anz} = \frac{(an)^{n-1}}{n!}.$$

Es decir,

$$G(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^{n-1}}{n!} y^n,$$

y usando las herramientas vistas en las materias de cálculo, tenemos que el entorno de 0 para el cual esto se satisface es el abierto  $|y| < 1/|a|e$ , si  $a \neq 0$ .

APLICACIÓN 6.2 (Raíz de un polinomio). Una de las tareas más difíciles y usuales a las que se enfrenta un estudiante de matemática es hallar las raíces de un polinomio, y a veces, hallar tan sólo una raíz resulta imposible con los pocos métodos que se conocen. En reducidos casos podemos utilizar procedimientos o algoritmos sencillos para resolver este problema, como el método de Ruffini o las soluciones algebraicas que se conocen para polinomios de grado 2,3 y 4. Pero casi siempre estos métodos se tornan engorrosos e ineficientes. Sólo para polinomios de grado 2 conocemos una fórmula que en todo momento es accesible, y esta es conocida como la *resolvente*: si tenemos una ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  con coeficientes reales, sus raíces vienen dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Para polinomios de grado 3 se utiliza la *Fórmula de Cardano*: si tenemos una ecuación cúbica  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  con coeficientes reales, realicemos el cambio  $x = y - \frac{p}{3}$ , para obtener la forma normal

$$y^3 + ay + b = 0,$$

donde

$$a = \frac{1}{3}(3q - p^2),$$

$$b = \frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r).$$

Gerolamo Cardano publicó una de las tres soluciones de la forma normal en 1545:

$$y_0 = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Dado que en aquella época, la teoría de números complejos aún no se desarrollaba, Cardano solamente consideró el caso

$$\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} \geq 0.$$

Sin embargo, no importa qué peculiaridad se considere sobre los coeficientes de alguna ecuación cúbica, la fórmula de Cardano no deja de ser complicada. Las ecuaciones de grado 4 se pueden resolver con un método similar al propuesto por Cardano pero la solución no será más atractiva como podrá ver en [15]. Para polinomios de mayor grado, Niels Abel publicó en 1824 una demostración donde se asegura que no se puede hallar una solución de las raíces

de ningún polinomio de grado mayor o igual que 5 mediante una expresión cerrada. Para este tipo de problemas se utilizan otros recursos, en su mayoría procesos iterativos, como el Método de Newton. Nosotros usaremos la ecuación (FIG) para hallar una solución de ciertos polinomios: consideremos la ecuación

$$x^{m+1} + ax - c = 0,$$

o lo que es igual

$$c = x(x^m + a),$$

con  $m$  un entero par positivo,  $a$  y  $c$  reales y  $a \neq 0$ . Llamemos  $y = g(x) = x(x^m + a)$  y consideremos su inversa  $G(y)$ , entonces

$$G(y) = yM(G(y)),$$

donde  $M(x) = (x^m + a)^{-1}$ . Como  $g(x)$  satisface las hipótesis de la demostración analítica del Capítulo 5, tenemos que  $[y^0]G(y) = 0$  y para  $n \geq 0$ :

$$[y^n]G(y) = \frac{1}{n}[y^{n-1}]M^n(y) = \frac{1}{n}[y^{n-1}]\frac{1}{(y^m + a)^n}.$$

Para poder escribir  $M^n(y)$  como una expansión binomial debemos dar la condición extra  $|y|^m < |a|$ . De esta manera obtenemos que

$$[y^n]G(y) = \frac{1}{a^n n} [y^{n-1}] \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{r} \left(\frac{-y^m}{a}\right)^r.$$

Si  $n \neq mk + 1$ , con  $k \geq 0$ , entonces  $[y^n]G(y) = 0$ . Si  $n = mk + 1$ , con  $k \geq 0$ , entonces

$$[y^{mk+1}]G(y) = \binom{k+mk}{k} \frac{(-1)^k}{(mk+1)} \frac{1}{a^{k+mk+1}}.$$

Ahora, cualquier ecuación  $x^{m+1} + ax - c = 0$ , con  $|c|^m \leq |a|$ , tiene raíz:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+mk}{k} \frac{(-1)^k}{(mk+1)} \frac{c^{mk+1}}{a^{k+mk+1}}.$$

Si tomamos  $m = 2$ , obtenemos la forma normal estudiada por Cardano. Nuestra solución en este caso viene dada por:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3k}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{c^{2k+1}}{a^{3k+1}}. \quad (6.1)$$

No es nuestro propósito establecer criterios de convergencia más allá del que se propuso para el término  $c$ , pero para valores  $c < 1$  y  $a > 1$  se deben obtener muy buenos resultados.

Por ejemplo, para el caso  $(a, c, m) = (2, \frac{1}{2}, 2)$ , y considerando solamente los primeros 10 términos de la serie (6.1) nos queda  $x \approx 0.2428397323$ , la cual podrá ver que resulta ser una muy buena aproximación si gusta verificarlo. El hecho de tomar  $m$  como un número par en nada afecta los cálculos realizados, podemos obtener lo mismo si lo consideramos impar. La razón de tomarlo de esa manera es simplemente para garantizar que el valor  $c$  que escojamos siempre será imagen de la función  $g(x)$ .

**APLICACIÓN 6.3** (Identidad de Abel). Siguiendo el desarrollo algebraico del Capítulo 3, consideremos en el Teorema 3.11 los casos particulares  $F(z) = e^{xz}$  y  $M(z) = e^{az}$ . Si  $G(z)$  es la serie tal que  $G(z) = zM(G(z))$ , entonces los coeficientes de  $(F \circ G)(z)$  son: para  $m > 0$

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{m} [z^{m-1}] F'(z) M^m(z) \\ &= \frac{1}{m} [z^{m-1}] x e^{xz} e^{amz} \\ &= \frac{x}{m} [z^{m-1}] e^{(x+am)z} \\ &= \frac{x}{m} [z^{m-1}] \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x+am)^r}{r!} z^r \\ &= \frac{x(x+am)^{m-1}}{m!}. \end{aligned}$$

Para el caso  $m = 0$  note que:

$$c_0 = [z^0] F(z) = 1 = \frac{x(x+a0)^{0-1}}{0!}.$$

Si llamamos  $g(z) = ze^{-az}$ , por el Teorema 3.18 tenemos que

$$e^{xz} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x(x+am)^{m-1}}{m!} e^{-amz} z^m.$$

Multipliquemos a ambos lados de la ecuación anterior por  $e^{yz}$ , y así, por el producto de Cauchy definido en el Capítulo 3 obtenemos que:

$$e^{(x+y)z} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x(x+am)^{m-1}}{m!} e^{y-amz} z^m = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{x(x+ak)^{k-1}}{k!} \frac{(y-ak)^{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n.$$

Expandiendo  $f(z) = e^{(x+y)z}$  como serie de Taylor obtenemos finalmente que:

$$\frac{(x+y)^n}{x} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x+ak)^{k-1} (y-ak)^{n-k},$$

la cual es la bien conocida *identidad de Abel*, y que fue demostrada originalmente en 1826 por Niels Hendrik Abel. En [17] podrá encontrar una gran variedad de problemas combinatorios relacionados con esta ecuación.

APLICACIÓN 6.4 (Serie formal del Logaritmo). En el Capítulo 4 dimos la serie generatriz exponencial de la especie de permutaciones cíclicas  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{C}(z) = \log \left( \frac{1}{1-z} \right).$$

Esta relación la obtenemos al recordar la serie de Taylor de la función logaritmo que usamos en las materias de cálculo. Sin embargo, al hablar de la serie formal del logaritmo debemos tener en cuenta ciertas consideraciones. Niven en [13] define el logaritmo formal sobre el conjunto  $P_1 \subset \mathbb{C}[z]$ , que se compone de series  $f(z)$  tales que  $[z^0]f(z) = 1$ . De esta manera, definimos el logaritmo de la serie  $f(z)$  como:

$$\log f(z) = \log(1 + h(z)) = h(z) - \frac{1}{2}h^2(z) + \frac{1}{3}h^3(z) - \frac{1}{4}h^4(z) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} h^n(z),$$

donde  $h(z)$  es una serie formal tal que  $[z^0]h(z) = 0$  y  $f(z) = 1 + h(z)$ . Las propiedades básicas del logaritmo se satisfacen, incluyendo la conocida relación con la derivada:

$$D \log f(z) = f^{-1}(z) Df(z).$$

El logaritmo se comporta muy bien cuando componemos de cierta manera con la solución del problema (P2). Supongamos que  $g(z)$  es una serie invertible tal que  $[z^1]g(z) = 1$ . Entonces, por la definición de logaritmo podemos definir la serie

$$F(z) = \log \left( \frac{z}{g(z)} \right).$$

Sea  $G(z) = \bar{g}(z)$ , veremos que los coeficientes de la serie  $F(G(z))$  los podemos hallar fácilmente mediante la fórmula de inversión. Note que esta composición está bien definida ya que por la Proposición 3.9 tenemos que  $[z^1]G(z) = 1$ . Sea la serie  $M(z)$  de orden 0 tal que  $G(z) = zM(G(z))$ , por las ecuaciones (FIG) los coeficientes de la serie  $F(G(z))$  son:

$$c_0 = [z^0]F(z) = 0,$$

y para  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} nc_n &= n[z^n] \log \left( \frac{G(z)}{z} \right) \\ &= [z^{n-1}] M^n(z) D \log \left( \frac{z}{g(z)} \right) \\ &= [z^{n-1}] M^n(z) \left( \frac{1}{z} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right). \end{aligned}$$

Como se satisface la igualdad  $M(z) = zg^{-1}(z)$ , entonces

$$\begin{aligned} nc_n &= [z^{n-1}] \left( \frac{z}{g(z)} \right)^n \left( \frac{1}{z} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right) \\ &= [z^n] \left( \frac{z}{g(z)} \right)^n + \frac{1}{n} \text{Res } Dg^{-n}(z) \\ &= [z^n] \left( \frac{z}{g(z)} \right)^n \\ &= [z^n] M^n(z). \end{aligned}$$

Haremos una rápida verificación de este resultado. En la sección 2 del Capítulo 5, obtuvimos a partir de un método iterativo que la solución del problema  $G(z) = zM(G(z))$  cuando  $M(z) = 1 + z$  es la serie  $G(z) = z(1 - z)^{-1}$ . Entonces, para  $n \geq 1$ , tenemos que

$$[z^n] \log \left( \frac{1}{1 - z} \right) = \frac{1}{n} [z^n] (1 + z)^n = \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!},$$

siendo justamente  $(n-1)!$  los cardinales de la especie  $\mathcal{C}$ , por lo que su serie generatriz exponencial en efecto es la mostrada.

Veremos nuevamente a la serie formal del logaritmo en las próximas aplicaciones. No serán completamente necesarias las ecuaciones obtenidas de los términos  $c_n$  por lo simple que resultará trabajar con las series escogidas, pero los ejemplos siguientes podrían verificarse nuevamente con esta aplicación.

**APLICACIÓN 6.5 (Expansión Binomial).** Aprovecharemos la fórmula de inversión para hallar una expresión más sencilla de los números  $s_n$ , definidos como la suma de los  $n$  primeros términos de la expansión binomial

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \binom{r+n-1}{r}.$$

Para ello consideremos las series de

$$M(z) = \left(1 - \frac{1}{2}z\right)^{-1} \quad \text{y} \quad F'(z) = (1 - z)^{-1}.$$

Por el producto de Cauchy obtenemos que

$$(F' \cdot M^n)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{r=0}^m \frac{1}{2^r} \binom{r+n-1}{r} \right) z^m,$$

de donde  $s_n = [z^{n-1}](F' \cdot M^n)(z)$ . Como  $\text{ord } M = 0$ , entonces podemos definir una serie  $G(z)$  tal que  $G(z) = zM(G(z))$ . Podemos verificar fácilmente que en este caso  $G(z)$  satisface

$$z = -\frac{1}{2} \left( (G(z) - 1)^2 - 1 \right),$$

la cual tiene como solución  $G(z) = 1 - \sqrt{1 - 2z}$ . Además,  $F(z) = -\log(1 - z)$ . Por las ecuaciones (FIG) del Teorema 3.11 tenemos que:

$$\begin{aligned} s_n &= n[z^n](F \circ G)(z) \\ &= n[z^n](-\log(\sqrt{1 - 2z})) \\ &= -\frac{n}{2}[z^n]\log(1 - 2z) \\ &= 2^{n-1}, \end{aligned}$$

la cual es una expresión mucho más atractiva.

**APLICACIÓN 6.6** (Otra expresión sencilla). Para este ejemplo consideremos las series formales de  $F(z) = \log(1 + z)$  y  $M(z) = (1 + z)^2(2 + z)^{-1}$ . Dado que  $\text{ord } M = 0$  podemos hallar una serie  $G(z)$  tal que  $G(z) = zM(G(z))$ , y podemos verificar fácilmente que

$$G(z) = (1 - z)^{-1/2} - 1.$$

Tenemos que para  $n \geq 1$ :

$$n[z^n]F(G(z)) = -\frac{n}{2}[z^n]\log(1 - z) = \frac{1}{2},$$

ya que el coeficiente  $n$ -ésimo de  $\log(1 - z)$  es  $-n^{-1}$ . Además, por el Teorema 3.11,

$$n[z^n]F(G(z)) = [z^{n-1}]F'(z)M^n(z) = [z^{n-1}](1 + z)^{2n-1}(2 + z)^{-n}.$$

Considerando las expansiones binomiales de ambas series y el producto de Cauchy, llegamos a que

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-i}}{2^{n-1-i}} \binom{2n-1}{i} \binom{2(n-1)-i}{n-1}.$$

Reescribiendo la ecuación anterior y realizando la sustitución  $n+1$  por  $n$  obtenemos que:

$$4^n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} 2^i \binom{2n+1}{i} \binom{2n-i}{n}, \quad (6.2)$$

cuando  $n \geq 0$ . Podemos dotar a la ecuación (6.2) de una interpretación combinatoria usando los Principios de Adición, Multiplicación, y de Inclusión-Exclusión, por lo que lo dirigimos al libro [2].

**APLICACIÓN 6.7** (Conteo de árboles - Resultado de Cayley). En el Capítulo 4 ya hablamos del problema del conteo de árboles que Cayley resolvió. Daremos una demostración de dicho problema mediante especies combinatorias. Recordemos que para una especie  $R$ , con  $R_0 \neq 0$ , la especie  $\mathcal{A}_R$  de árboles con raíz  $R$ -enriquecidos, satisface el isomorfismo

$$\mathcal{A}_R \simeq X \cdot R(\mathcal{A}_R).$$

Para la especie uniforme  $R = U$ , obtenemos una relación para los árboles con raíz, correspondiente al Ejemplo 4.7. Para  $n \geq 1$ , los cardinales  $\mathcal{A}_n$  se calculan de la siguiente manera:

$$\mathcal{A}_n = U_{n-1}^n = (n-1)! [z^{n-1}] U^n(z).$$

Sabemos además que  $U(z) = e^z$ , de donde la solución es exactamente la misma que en la Aplicación 6.1:

$$\mathcal{A}_n = n^{n-1}.$$

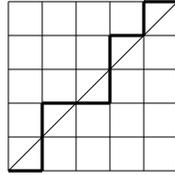
Este resultado nos permite obtener los cardinales  $\mathbf{a}_n$ . La aplicación apuntamiento nos dice que  $\mathbf{a}^\bullet \simeq \mathcal{A}$ . De esta relación, para  $n \geq 1$  se cumple

$$\mathbf{a}_n^\bullet = n\mathbf{a}_n = \mathcal{A}_n = n^{n-1},$$

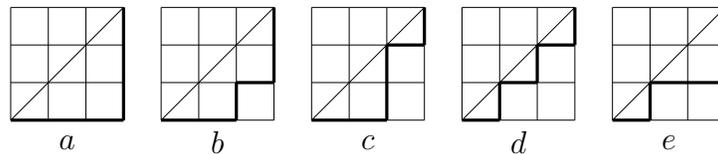
de donde obtenemos el famoso resultado  $\mathbf{a}_n = n^{n-2}$ , debido a Cayley.

**APLICACIÓN 6.8** (Números de Catalán). Para hallar los números de Catalán podemos escoger de entre una gran variedad de problemas combinatorios, aparentemente distintos, donde esta sucesión de números aparece. Nosotros escogemos el problema de contar caminos

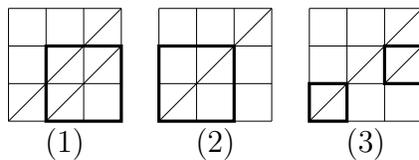
crecientes por debajo de la diagonal principal. Aquí, dado  $n \in \mathbb{N}$ , un camino de  $(0, 0)$  (punto de partida) a  $(n, n)$  (punto de llegada) se compone de “pasos” de tamaño 1 hacia la derecha y hacia arriba. Por ejemplo, sobre [5], el siguiente gráfico representa un camino creciente:



Llamaremos diagonal principal al segmento que una a  $(0, 0)$  y  $(n, n)$ , y denotamos por  $c_n$  la cantidad de caminos crecientes que no pasan la diagonal. Por convención,  $c_0 = 1$ . Es fácil ver que  $c_1 = 1$  y  $c_2 = 2$ . Para  $n = 3$ , tenemos que todos los caminos crecientes de  $(0, 0)$  a  $(3, 3)$  que no pasan la diagonal principal son:



Es decir,  $c_3 = 5$ . Es bien sabido que los pocos términos que siguen son: 14, 42, 132, 429,... Hallaremos una relación de recurrencia para estos números. Consideremos los caminos obtenidos para  $n = 3$ . Note que podemos hallar todos los caminos necesarios mediante alguno de los siguientes casos:



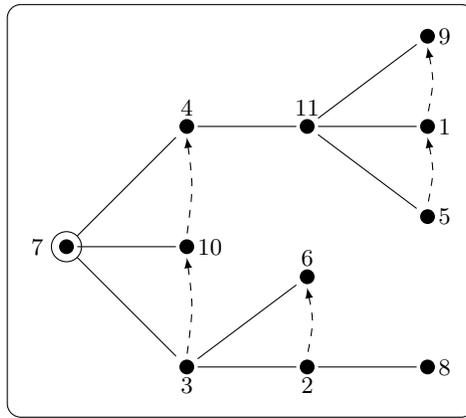
Es decir, hallar un camino para  $n = 3$  es lo mismo que hallar un camino que no pase la diagonal para los cuadrados más pequeños de la figura anterior y completar con lo de afuera de la única manera posible, o en otras palabras, podemos obtener los caminos  $a$  y  $b$  con la figura (1), los caminos  $c$  y  $d$  con la figura (2) y, por último, obtener el camino  $e$  con la figura (3). Note además que estos tres casos son disjuntos y generan todos los caminos deseados para  $n = 3$  y por el Principio de Multiplicación (vea [2]) tenemos que cada uno de estos casos vienen identificados por los términos  $c_0c_2$ ,  $c_2c_0$  y  $c_1c_1$ , respectivamente. Ahora, por el Principio de Adición:

$$c_3 = c_2c_0 + c_1c_1 + c_0c_2.$$



Estos cardinales  $c_n$ , son mejor conocidos como los *números de Catalán*. Esta aplicación resulta interesante porque el resultado obtenido a partir de la fórmula de inversión genera una mayor cantidad de información que la solución mediante la ecuación cuadrática.

APLICACIÓN 6.9 (Árboles con orden). Los números de Catalán aparecen nuevamente en el conteo de árboles con orden. Recordando la Definición 4.26 introducimos estas estructuras como los árboles con raíz donde cada fibra posee una estructura de orden lineal, y usamos la notación establecida para estas especies:  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ . La Figura 6.1 ilustra este tipo de estructuras.



**Figura 6.1.** Estructura de árbol con orden sobre [11].

Estamos interesados en el conteo de estas estructuras para cada conjunto  $[n]$ , con  $n \geq 1$ . Llamando  $\mathcal{A}(z)$  la serie generatriz de la especie  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ , tenemos nuevamente que para resolver este problema combinatorio basta examinar la ecuación implícita:

$$\mathcal{A}(z) = z\mathcal{L}(\mathcal{A}(z)) = \frac{z}{1 - \mathcal{A}(z)}.$$

Luego, por el Teorema 4.27, para todo  $n \geq 1$ :

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{L}_{n-1}^n = (n-1)! [z^{n-1}] \mathcal{L}^n(z).$$

Aparece nuevamente la expansión binomial de  $(1-z)^{-n}$ . De esta manera obtenemos que:

$$\mathcal{A}_n = \frac{(2(n-1))!}{(n-1)!} = n!c_{n-1},$$

siendo  $c_n$  los números de Catalán definidos en la aplicación anterior.

APLICACIÓN 6.10 (Inversión binomial). A continuación, mostraremos una aplicación clásica del Teorema 5.15 y obtendremos una propiedad conocida del combinatorio. Nos gustaría encontrar la inversa de un arreglo con entradas  $\alpha_{n,k} = \binom{n+p}{k+p}$ , donde  $p \in \mathbb{N}$  es un parametro adicional. Por un simple cálculo podemos ver que las siguientes igualdades en efecto son válidas:

$$\alpha_{n,k} = \binom{n+p}{k+p} = \binom{n+p}{n-k} = \text{Res}(1+z)^{n+p} z^{-n+k-1}.$$

Tomando las funciones,  $a(z) = z$ ,  $b(z) = (1+z)^{-1}z$  y  $f(z) = (1+z)^{p+1}$ , por la igualdad anterior tenemos que los coeficientes  $\alpha_{n,k}$  tienen la forma:

$$\alpha_{n,k} = \text{Res } f(t)b'(t)b^{-n-1}(t)a^k(t),$$

y por lo tanto, el Teorema 5.15 nos dice que podemos construir la inversa de este arreglo y sus entradas  $\beta_{n,k}$  son de la forma:

$$\beta_{n,k} = \text{Res } f^{-1}(t)a'(t)a^{-n-1}(t)b^k(t).$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \beta_{n,k} &= \text{Res} \frac{z^{-n+k-1}}{(1+z)^{p+k+1}} \\ &= \text{Res} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{r+p+k}{r} z^{r-n+k-1} \\ &= (-1)^{n-k} \binom{n+p}{n-k} \\ &= (-1)^{n-k} \binom{n+p}{k+p}. \end{aligned}$$

Cuando tomamos el caso particular  $p = 0$  obtenemos la conocida propiedad:

$$\sum_{m=0}^n (-1)^{m-k} \binom{n}{m} \binom{m}{k} = \delta_{nm},$$

que es probablemente una de las relaciones de inversa más famosas.

## Bibliografía

- [1] F. BERGERON, G. LABELLE, P. LEROUX, Théorie de espèces et combinatoire des structures arborescentes: *LACIM*, **19** (1994). 39
- [2] R. BRUALDI, Introductory Combinatorics: *Pearson Education, Inc.* (1999). 77, 78
- [3] A. CAUCHY, Mémoire sur divers points d'analyse: *Académie Royale des Sciences*, **8** (1829), 97-129. 13
- [4] R. CHURCHILL, J. BROWN, R. VERHEY, Complex variables and applications: *McGraw-Hill Book Company* (1976). 58
- [5] P. COLWELL, Solving Kepler's problem over three centuries: *Willman-Bell* (1993). 7, 13
- [6] R.E. GREENE, Function theory of one complex variable: *American Mathematical Society*, **40** (2000). 14
- [7] T.W. HUNGERFORD, Algebra: *Editorial Board* (1974). 33
- [8] A. JOYAL, Une théorie combinatoire des séries formelles: *Advances in Mathematics*, **42** (1981), 1-82. 32
- [9] R. KRESS, Numerical Analysis: *Springer*, First Edition (1998). 61
- [10] G. LABELLE, Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange: *Advances in Mathematics*, **42** (1981), 217-247. 2
- [11] J.L. LAGRANGE, Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries: *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin* (1770). 3, 8
- [12] J.L. LAGRANGE, Sur le problème de Kepler: *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin* (1771). 11
- [13] I. NIVEN, Formal power series: *American Mathematical Monthly*, **76** (1969), 871-889. 22, 74
- [14] J. RIORDAN, Combinatorial identities: *Krieger Publishing Company* (1979). 68
- [15] M.R. SPIEGEL, S. LIPSCHUTZ, J. LIU, Mathematical handbook of formulas and tables: *McGraw-Hill, Schaum's Outline Series*, Third Edition (2008). 71
- [16] R. SPRUGNOLI, Riordan arrays and combinatorial sums: *Discrete Math.*, **132** (1994), 267-290. 68
- [17] V. STREHL, Identities of Rothe-Abel- Schläfli-Hurwitz-type: *Discrete Math.*, **99** (1992), 321-340. 74
- [18] E.T. WHITTAKER, G.N. WATSON, A course of modern analysis: *Cambridge University Press*, Fourth Edition (1927). 15