

*Estudio de las propiedades físicas
de espacio-tiempos cuasiesféricos*

Br. Emilio Augusto Lazo Zaia

Tutor: Dr. Luis Herrera Cometta

Trabajo Especial de Grado



Caracas, 3 de septiembre del año 2009



Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES FÍSICAS DE ESPACIO-TIEMPOS CUASIESFÉRICOS

Br. Emilio Augusto Lazo Zaia

Dr. Luis Herrera Cometta, Tutor

Caracas, 3 de septiembre del año 2009

*A Vladimir Lazo, Caterina Zaia y Lorena Lazo,
quienes han sido un apoyo absoluto
durante todo mi estudio.*

Agradecimientos

Sin tratar de usar figuras literarias inapropiadas, eufemismos, ni excesiva retórica para agradecer de una forma pretenciosa como se acostumbra a hacer en esta página, tengo el agrado de expresar a varias personas, todas importantes, mis agradecimientos por los diversos tipos de ayuda, compañía y amistad durante el desarrollo del presente trabajo de grado, como también en general durante el transcurso de la Licenciatura. Ellas y ellos son: ..., Ritquey, Tula, Orlenys, Alvaros, César, Eva, Nelson, Lovera, la clase de equivalencia de Noel y familia, Argenis, Sorelia, El Discípulo, Juanchis, El Maestro, Brígida, Luisa, Ben, Martín, Ritquey, Tula, Orlenys, Alvaros, César, Eva, Nelson, Lovera, la clase de equivalencia de Noel y familia, Argenis, Sorelia, El Discípulo, Juanchis, El Maestro, Brígida, Luisa, Ben, Martín, Ritquey, Tula, Orlenys, Alvaros, César, Eva, Nelson, Lovera, la clase de equivalencia de Noel y familia, Argenis, Sí, las personas están nombradas de manera cíclica.

Al grupo Physis, a mi Facultad y a profesores como Lorenzo Leal, Guillermo Miranda, Luis González, Arturo Fernández, Edgar Jaimes, Andrés Correa, Rafael Martín, José Domingo Mujica, Rafael Martinez, Ernesto Fuenmayor.

Al profesor Luis y a la profesora Alicia por permitirme trabajar con ellos; y por último, de manera muy importante a mi madre, mi padre y Lorena.

Resumen

Estudio de las propiedades físicas de espacio-tiempos cuasiesféricos

Emilio Augusto Lazo Zaia

Dr. Luis Herrera Cometta, Tutor

Universidad Central de Venezuela

Se presenta el estudio de algunos espaciotiempos de Weyl como la métrica M–Q donde se calculó la aceleración radial medida por un observador Lorentziano cerca del horizonte de eventos. Como lo predice el teorema de Isræel, se produjeron bifurcaciones respecto al caso esféricamente simétrico de Schwarzschild, las cuales se estudiaron en términos del escalar de superenergía.

Índice General

| | |
|--|-----------|
| Índice General | v |
| Introducción | 1 |
| 1. Métricas de Weyl | 6 |
| 1.1. Familia de soluciones de Weyl | 6 |
| 1.2. La solución Monopolo-Cuadrupolo (M-Q) | 9 |
| 1.3. Geodésicas para la métrica M-Q | 15 |
| 1.3.1. Geodésicas radiales | 16 |
| 2. Superenergía | 21 |
| 2.1. Superenergía para la métrica M-Q | 23 |
| 3. Discusión | 25 |
| Bibliografía | 27 |

Introducción

Desde que Werner Israel en 1967 publicó su artículo titulado *Event horizons in static vacuum space-times*[1], es decir, “horizontes de eventos en espaciotiempos estáticos vacíos”, se sabe que la única solución de vacío, estática y asintóticamente plana para las ecuaciones de campo de Einstein que tiene un horizonte de eventos regular es el espaciotiempo esféricamente simétrico de Schwarzschild. Todas las demás soluciones exteriores de Weyl [2, 3, 4, 5, 6] exhiben singularidades en los componentes físicos del tensor de Riemann en el horizonte de eventos $r = 2M$, lo cual las hace a todas no regulares en esa región.

Pequeñas fluctuaciones de la simetría esférica pueden ser descritas, si los campos gravitacionales no son muy intensos, como perturbaciones de la solución exacta esféricamente simétrica[7], sin embargo, ese esquema perturbativo puede eventualmente fallar en regiones cercanas al horizonte de eventos (a pesar de que el término “horizonte” se refiere estrictamente al caso esféricamente simétrico, seguiremos usándolo cuando consideremos la superficie $r = 2M$ en el caso de pequeñas desviaciones de la esfericidad).

En efecto, cuando nos acercamos al horizonte, cualquier perturbación finita del espaciotiempo de Schwarzschild hace radicalmente diferente el horizonte al que corresponde a la solución exacta que representa el espaciotiempo cuasi-esférico, inclusive si este último viene siendo caracterizado por parámetros cuyos valores son arbitrariamente cercanos a aquellos que corresponden a la métrica de Schwarzschild[8, 9, 10, 11], es decir, así sea muy pequeña la desviación de la esfericidad. Ésta es una consecuencia del teorema de Israel.

Por tanto, para campos gravitacionales intensos (es decir, cerca de la fuente cuya frontera es cercana a su horizonte de eventos), no importa cuán pequeños sean los momentos multipolares (mayores que el monopolar) que tiene la fuente, existirá siempre una bifurcación entre la métrica perturbada de Schwarzschild y todas las demás métricas de Weyl.

Ejemplos de tales bifurcaciones han surgido en el estudio de las trayectorias de partículas de prueba en la métrica¹ γ y en la métrica M-Q [20, 21] para órbitas cercanas a $r = 2M$ [22, 23].

Por otra parte, la influencia de los momentos cuadrupolares en el movimiento de partículas de prueba en el contexto de la métrica de Erez-Rosen [24] ha sido investigada por varios autores².

Además, para configuraciones de fuentes muy compactas, en la escala de tiempo en la que los multipolos irradiables son irradiados, pueden ocurrir distintos fenómenos físicos importantes.

En este trabajo se da una explicación de la bifurcación mencionada previamente en virtud del comportamiento de la superenergía [29, 30] en un vecindario del horizonte de eventos. Esta cantidad, que puede ser definida mediante el tensor de Bel [31] o

¹Referencias: [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]

²Referencias: [25, 26, 27, 28]

mediante el tensor de Bel-Robinson [32] (ambos coinciden en el vacío, que es nuestro caso) se ha mostrado como una cantidad muy útil para explicar cierto número de fenómenos en el contexto de la Relatividad General.

Esto ayuda a explicar la vorticidad en espaciotiempos estacionarios [33] y radiantes [34]. También vuelve inteligible el comportamiento de partículas de prueba moviéndose en circunferencias en torno al eje de simetría en el espaciotiempo de Einstein-Rosen [35].

Además, un comportamiento extraño de la aceleración radial instantánea de una partícula de prueba (medida por un observador Lorentziano local) en un espaciotiempo específico de la familia de Weyl y en regiones cercanas al horizonte se hace inteligible cuando es contrastado con el comportamiento de la superenergía correspondiente, y eso lo veremos en este trabajo.

La métrica de Weyl a ser considerada es la métrica M–Q [23] y se descarta la métrica MQJ [36] por no presentar cambios en el comportamiento de la partícula de prueba a pesar de la presencia del momento angular en la fuente. La razón fundamental para la escogencia de la métrica M–Q se debe a su estructura multipolar; la solución M–Q (más exactamente, una subclase de esta solución, la solución M–Q⁽¹⁾ que es a primer orden en el parámetro q , el cual caracteriza la no esfericidad de la fuente) puede ser interpretada como una corrección cuadrupolar al espaciotiempo de Schwarzschild y por tanto representa una buena candidata entre las soluciones de Weyl conocidas para describir pequeñas desviaciones de la simetría esférica[20], que es lo que nos interesa.

De hecho, para responder a la pregunta sobre cuál solución de Weyl es mejor para describir pequeñas desviaciones de la simetría esférica, recordemos [20] que las soluciones de Weyl conocidas presentan una desventaja grave para describir espaciotiempos cuasi-esféricos. Se trata del hecho de que la estructura multipolar es tal que los momentos multipolares superiores al cuadrupolo son del mismo orden que el momento cuadrupolar. La relevancia de tales momentos multipolares debe decrecer hacia los

multipolos mayores, siendo el momento cuadrupolar el más relevante para pequeñas desviaciones de la no esfericidad.

Así, por ejemplo, en gravedad newtoniana, los momentos multipolares de un elipsoide en rotación con densidad homogénea y ejes (a,a,b) son:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{2n} = \frac{3(-2)^n M a^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \epsilon^n (1 - \epsilon/2)^n \\ B_{2n+1} = 0 \end{array} \right. \quad \text{con } \epsilon := 1 - b/a$$

Debido al factor ϵ^n , esta ecuación muestra cómo la importancia del multipolo disminuye al aumentar n .

Finalmente, a fin de describir pequeñas desviaciones de la esfericidad en términos de soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein en el vacío, requerimos de una solución exacta cuya estructura multipolar relativista comparta las propiedades mencionadas; esta es la solución M-Q, de la familia de soluciones de Weyl.

Más adelante, al presentar la estructura multipolar de varias de estas métricas de Weyl incluyendo la métrica M-Q, quedará claro que esta última es la más adecuada para el estudio de pequeñas desviaciones de la simetría esférica.

Como estamos interesados únicamente en pequeñas desviaciones de la simetría esférica, haremos uso de la métrica M-Q a primer orden en q , es decir, la métrica M-Q⁽¹⁾, la cual es, como ya mencionamos, una corrección a primer orden en el parámetro q , que caracteriza la no esfericidad de la fuente.

Se estudiará el comportamiento, es decir, la aceleración que experimenta una partícula de prueba que está situada cercana al horizonte de eventos sobre una geodésica radial en el caso en el que la partícula se encuentre a lo largo del eje de simetría, como también fuera del eje.

La aceleración calculada se graficará para esas situaciones con distintos valores del parámetro q y se contrastará con las gráficas de la superenergía para dar una explicación a los distintos comportamientos extraños encontrados en la aceleración radial.

CAPÍTULO 1

Métricas de Weyl

1.1. Familia de soluciones de Weyl

La métrica de Weyl¹, o más bien, la familia de soluciones de Weyl consiste en el conjunto de soluciones estáticas y axialmente simétricas para las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío. Al ser soluciones estáticas no hay evolución temporal y por tanto en la solución no hay dependencia explícita de la coordenada temporal; además las soluciones de Weyl son soluciones exteriores a la fuente, lo cual significa que tiene lugar desde la frontera de la fuente gravitacional hasta el infinito, sin haber más fuentes gravitacionales o cuerpos masivos.

Esta familia de soluciones tiene el siguiente elemento de línea escrito en coordenadas cilíndricas:

$$ds^2 = e^{2\Psi} dt^2 - e^{-2\Psi} [e^{2\Gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] \quad (1.1)$$

¹Referencias: [2, 3, 4, 5, 6]

donde las funciones métricas Ψ y Γ son soluciones de las ecuaciones de Einstein y por tanto satisfacen:

$$\Psi_{,\rho\rho} + \rho^{-1}\Psi_{,\rho} + \Psi_{,zz} = 0 \quad (1.2)$$

y

$$\Gamma_{,\rho} = \rho (\Psi_{,\rho}^2 - \Psi_{,z}^2) \quad ; \quad \Gamma_{,z} = 2\rho\Psi_{,\rho}\Psi_{,z} \quad (1.3)$$

Obsérvese que (1.2) es la ecuación de Laplace para Ψ (en espacio Euclideo) y además representa la condición de integrabilidad para (1.3). Teniendo en cuenta que Ψ es una función armónica, sus derivadas respecto a ρ y z conmutan y es integrable Γ , entonces esto significa que para cualquier potencial “newtoniano” tenemos una métrica de Weyl específica, lo cual es un resultado ya conocido, y por lo cual se trata no de una solución de Weyl sino de una familia de soluciones.

Dada la simetría axial y temporal, las funciones métricas Ψ y Γ son funciones únicamente de ρ y de z .

La solución general a la ecuación de Laplace (1.2) para la función Ψ presenta un comportamiento asintóticamente plano, y está dado por:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (1.4)$$

donde $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ y $\cos \theta = z/r$ son las coordenadas de Weyl esféricas, con $P_n(\cos \theta)$ como los polinomios de Legendre, y los coeficientes a_n como un conjunto de constantes reales arbitrarias que son llamadas “momentos de Weyl”, aunque no pueden ser identificados como momentos multipolares relativistas a pesar de la similaridad entre la ecuación (1.4) y el potencial Newtoniano.

Otra forma interesante de escribir la solución (1.4) fue obtenida por G. Erez junto con Nathan Rosen [24] y de manera independiente a ellos, por Hernando Quevedo [37] integrando las ecuaciones (1.2 y 1.3) en coordenadas esferoidales prolatas, las cuales

se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x &= (1/2\sigma)(r_+ + r_-) \\ y &= (1/2\sigma)(r_+ - r_-) \quad \text{con } x \geq 1 \quad \text{y} \quad -1 \geq y \geq 1 \\ r_{\pm} &= [\rho^2 + (z \pm \sigma)^2]^{1/2} \end{aligned}$$

donde σ es una constante arbitraria que será identificada luego con la masa de Schwarzschild. La coordenada prolata x representa la coordenada radial, y la coordenada y representa el coseno del ángulo polar.

En esas coordenadas esferoidales prolatas, Ψ toma la siguiente forma:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} q_n Q_n(x) P_n(y) \quad (1.5)$$

donde $Q_n(y)$ son las funciones de Legendre de segundo orden y q_n un conjunto de constantes arbitrarias que tampoco es identificable con los momentos multipolares relativistas. La expresión correspondiente para la función Γ fue obtenida por Quevedo [37].

Una sub-familia de soluciones de Weyl la obtuvieron Gutsunayev y Manko [38, 39] a partir de la solución de Schwarzschild como “semilla”.

Evidentemente, ambos conjuntos de coeficientes a_n y q_n caracterizan cualquier métrica de Weyl [37], sin embargo, como se mencionó previamente, esas constantes de manera directa no nos dan información física acerca de la métrica puesto que no representan los momentos relativistas “reales” de la fuente. Este no es el caso de los momentos multipolares relativistas definidos por Geroch [40, 41, 42] y subsecuente-mente por Hansen [43] y Thorne [44], los cuales al menos en un vecindario del infinito caracterizan completa y únicamente cada solución de vacío asintóticamente plana y estacionaria [45, 46, 47, 48], dando al mismo tiempo una descripción física de la solución correspondiente.

Un algoritmo para calcular los momentos multipolares de Geroch fue desarrollado por G. Fodor, C. Hoenselaers y Z. Perjés [49]. Al aplicar este método, los momentos

multipolares de la solución son expresados en términos de los momentos de Weyl, los cuales, como decíamos, no representan los momentos relativistas pero en ellos está esa información de forma “oculta”, y se revela al escribir los momentos relativistas “reales” de Geroch.

Resultados similares fueron obtenidos por la definición de Thorne usando armónicos esféricos. La estructura de la relación obtenida entre los coeficientes a_n y esos momentos relativistas permite expresar los momentos de Weyl como una combinación de momentos de Geroch relativistas.

1.2. La solución Monopolo-Cuadrupolo (M-Q)

En esta parte vamos a recordar las propiedades de una solución que es la apropiada para el estudio de las perturbaciones de la simetría esférica (tal solución la llamaremos solución monopolo-cuadrupolo [20], o solución M-Q). El argumento que sustenta esta afirmación se basa en el hecho de que las métricas de Weyl previamente conocidas² tienen una estructura multipolar (en el sentido de Geroch) tal que todos los multipolos mayores que el cuadrupolo son del mismo orden que el cuadrupolo.

Así, para las métricas de Gutsunayev-Manko y Erez-Rosen tenemos los siguientes momentos multipolares (los momentos impares se anulan todos):

$$\begin{aligned}
 M_0^{GM} &= M_0^{ER} = M \\
 M_2^{GM} &= M_2^{ER} = \frac{2}{15}q_2M^3 \\
 M_4^{GM} &= -3M_4^{ER} = \frac{4}{35}q_2M^5 \\
 M_6^{GM} &= M_6^{ER} - \frac{2}{7}\frac{817}{33}M^2M_4^{ER} \\
 &= \frac{2}{15}\frac{4}{231}q_2M^7 \left(\frac{194}{7} + \frac{14}{15}q_2 \right)
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

²Referencias: [39, 38, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]

donde q_2 es el parámetro cuadrupolar en ambas métricas, y como puede verse, la potencia de q_2 que predomina en todos los multipolos es siempre la misma (es lineal en q_2), o sea que no disminuye su relevancia al aumentar el multipolo.

Para la métrica Gamma, los resultados son:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= \gamma M \\
 M_2 &= \gamma \frac{M^3}{3} (1 - \gamma^2) \\
 M_4 &= \gamma \frac{M^5}{5} (1 - \gamma^2) \left(1 - \frac{19}{21} \gamma^2 \right) \\
 M_6 &= \gamma \frac{M^7}{7} (1 - \gamma^2) \left(1 + \frac{389}{495} \gamma^4 - \frac{292}{165} \gamma^2 \right)
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde el factor $(1 - \gamma^2)$ en esta métrica representa el parámetro cuadrupolar, y similarmente a los dos casos anteriores, aparece también en todos los multipolos.

Para la métrica de Curzon [50], la situación es inclusive peor puesto que tiene un parámetro único que representa a la masa, y todos los momentos superiores al monopolar son proporcionales a potencias cada vez mayores del parámetro:

$$M_0 = -a_0, \quad M_2 = \frac{1}{3} a_0^3, \quad M_4 = -\frac{19}{105} a_0^5, \quad M_6 = \frac{389}{3465} a_0^7 \tag{1.8}$$

De esto queda claro que ninguna de las métricas mencionadas satisface el criterio necesario descrito previamente.

En [20] se puede ver que es posible encontrar una solución de la familia de Weyl con una buena escogencia de los coeficientes a_n tal que la solución resultante tenga sólo momentos multipolares correspondientes al monopolo y al cuadrupolo (en el sentido de Geroch). La solución que se obtiene (solución M-Q) puede escribirse como una serie de soluciones de Gutsunayev-Manko [39] y Erez-Rosen [24], de la siguiente forma:

$$\Psi_{M-Q} = \Psi_{q^0} + q\Psi_{q^1} + q^2\Psi_{q^2} + \cdots = \sum_{\alpha=0}^{\infty} q^\alpha \Psi_{q^\alpha} \quad (1.9)$$

$$\Gamma_{M-Q} = \Gamma_{q^0} + q\Gamma_{q^1} + q^2\Gamma_{q^2} + \cdots = \sum_{\alpha=0}^{\infty} q^\alpha \Gamma_{q^\alpha}$$

donde el orden cero evidentemente corresponde a la solución de Schwarzschild:

$$\Psi_{q^0} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n+1}}{2n+1} P_{2n}(\cos \theta) \quad \text{con } \lambda = M/r \quad (1.10)$$

Cada potencia en q aporta una corrección cuadrupolar a la solución esféricamente simétrica. Puede verse que dada la linealidad de la ecuación de Laplace, esas correcciones dan lugar a series de soluciones exactas. En otras palabras, la serie de potencias de q puede ser truncada en cualquier orden y la suma parcial hasta ese orden da una solución exacta que representa una corrección cuadrupolar para la solución de Schwarzschild.

La manera más simple de interpretar físicamente la solución exacta obtenida de la corrección cuadrupolar descrita anteriormente consiste en analizar su estructura multipolar. Entonces, puede verse que truncando la solución para Ψ en (1.9) en cualquier orden α se obtiene una solución exacta con las siguientes propiedades:

- El momento monopolar y el cuadrupolar no se hacen cero ($M_0 \equiv M$ y $M_2 \equiv qM^3$).
- Todos los momentos multipolares después de M_2 hasta el orden $2(\alpha + 1)$ son cero, incluyendo éste.
- Todos los momentos mayores que $M_{2(\alpha+1)}$ son de orden $q^{\alpha+1}$.

Entonces, la solución representa la corrección cuadrupolar a primer orden para la solución de Schwarzschild (escogiendo $\alpha = 1$), la cual es también una solución exacta para el orden dado.

Puesto que estamos interesados en pequeñas desviaciones de la simetría esférica, consideraremos la solución M-Q sólo hasta el primer orden en q , en adelante solución M-Q⁽¹⁾, la cual describe una corrección cuadrupolar al monopolo y en coordenadas esferoidales prolatas se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Psi_{M-Q}^{(1)} \equiv \Psi_{q^0} + q\Psi_{q^1} &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{5}{8} q(3y^2 - 1) \times \\ &\times \left[\left(\frac{3x^2 - 1}{4} - \frac{1}{3y^2 - 1} \right) \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2x}{(x^2 - y^2)(3y^2 - 1)} + \frac{3x}{2} \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{M-Q}^{(1)} \equiv \Gamma_{q^0} + q\Gamma_{q^1} + q^2\Gamma_{q^2} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{225}{24} q^2 \right) \ln \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \right) \\ &- \frac{15}{8} qx(1 - y^2) \left[1 - \frac{15}{32} \left(x^2 + 7y^2 - 9x^2y^2 + 1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{8}{3} \frac{x^2 + 1}{x^2 - y^2} \right) \right] \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \\ &+ \frac{225}{1024} q^2 (x^2 - 1)(1 - y^2)(x^2 + y^2 - 9x^2y^2 - 1) \ln^2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \\ &- \frac{15}{4} q(1 - y^2) \left[1 - \frac{15}{64} q(x^2 + 4y^2 - 9x^2y^2 + 4) \right] \\ &- \frac{75}{16} q^2 x^2 \frac{1 - y^2}{x^2 - y^2} - \frac{5}{4} q(x^2 + y^2) \frac{1 - y^2}{(x^2 - y^2)^2} \\ &- \frac{75}{192} q^2 (2x^6 - x^4 + 3x^4y^2 - 6x^2y^2 + 4x^2y^4 - y^4 - y^6) \frac{1 - y^2}{(x^2 - y^2)^4} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Los primeros doce momentos de Geroch de esta solución son:

$$\begin{aligned}
M_0 &= M \\
M_2 &= M^3 q \\
M_4 &= 0 \\
M_6 &= -\frac{60}{77} M^7 q^2 \\
M_8 &= -\frac{1060}{3003} M^9 q^2 - \frac{40}{143} M^9 q^3 \\
M_{10} &= -\frac{19880}{138567} M^{11} q^2 + \frac{146500}{323323} M^{11} q^3 \\
M_{12} &= -\frac{23600}{437437} M^{13} q^2 + \frac{517600}{1062347} M^{13} q^3 + \frac{4259400}{7436429} M^{13} q^4
\end{aligned} \tag{1.13}$$

evidentemente los momentos impares son cero por la simetría de reflexión.

De las expresiones anteriores, es claro que el parámetro $q \equiv M_2/M^3$ que representa el momento cuadrupolar aparece en los momentos multipolares M_{2n} sólo para el orden 2 o superiores ($n \geq 2$). Conforme a esto, las soluciones (1.11 y 1.12) para pequeños valores de q hasta el orden q puede interpretarse como el campo gravitacional fuera de la fuente cuasi-esférica. El espaciotiempo viene siendo representado por la corrección cuadrupolar a la solución monopolar (la de Schwarzschild).

Esto contrasta con las demás soluciones de la familia de Weyl mencionadas antes, donde todos los momentos superiores al cuadrupolar son del mismo orden en q que el cuadrupolar, entonces, para pequeños valores de q no pueden ser interpretadas como una perturbación cuadrupolar de la simetría esférica.

Ahora usaremos coordenadas de Erez-Rosen con un cambio adicional en la variable radial, tales cambios de coordenadas se definen de la siguiente manera respecto a las coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{r^2 - 2Mr} \sin \theta \\
z &= (r - M) \cos \theta
\end{aligned} \quad \text{junto con} \quad R \equiv r/M \tag{1.14}$$

y respecto a las coordenadas esféricas prolatas se relacionan así:

$$x = \frac{r}{M} - 1, \quad y = \cos \theta$$

Al hacer este cambio estaremos expresando las ecuaciones según el conjunto de coordenadas (R, θ, ϕ, z) , y con el cambio a la nueva coordenada radial adimensional R , el horizonte de eventos queda ubicado en $R = 2$.

Las funciones métricas de la solución M-Q⁽¹⁾ en las nuevas coordenadas se escriben así:

$$\begin{aligned} \Psi_{M-Q}^{(1)}(R, \theta) &= \Psi_{q^0} + q\Psi_{q^1} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2}{R} \right) + \frac{5}{32} q (3 \cos^2 \theta - 1) (3R^2 - 6R + 2) \ln \left(1 - \frac{2}{R} \right) + \\ &\quad - \frac{5}{8} q \ln \left(1 - \frac{2}{R} \right) - \frac{5}{4} q \frac{R-1}{(R-1)^2 - \cos^2 \theta} + \frac{15}{16} q (3 \cos^2 \theta - 1) (R-1) \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{M-Q}^{(1)}(R, \theta) &= \Gamma_{q^0} + q\Gamma_{q^1} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(R-1)^2 - 1}{(R-1)^2 - \cos^2 \theta} \right] - \frac{15}{8} q \sin^2 \theta (R-1) \ln \left(1 - \frac{2}{R} \right) + \\ &\quad - \frac{15}{4} q \sin^2 \theta - \frac{5}{4} q \sin^2 \theta \left[\frac{(R-1)^2 + \cos^2 \theta}{((R-1)^2 - \cos^2 \theta)^2} \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

Es importante observar que la solución M-Q (1.9) hasta el orden q asegura la existencia de términos de orden q^2 y mayores en $\Gamma_{M-Q}^{(1)}$ como pueden verse en (1.13). Sin embargo, dichos términos no fueron incluidos en (1.16) ya que no tienen importancia para la discusión a continuación. En efecto, en el caso $y = 1$ (a lo largo del eje de simetría), todos esos términos son cero y en el caso $y \neq 1$ en el límite cuando $R \rightarrow 2$, el término que lideriza entre los que tienen el factor multiplicativo q^2 es del mismo orden de magnitud que el que aparece multiplicando a q , entonces como estamos

considerando pequeños valores de q , todos los términos con q^2 pueden ser despreciados sin pérdida de generalidad.

En la próxima parte analizaremos cómo sería el movimiento de una partícula de prueba en un espaciotiempo descrito por la solución M-Q⁽¹⁾.

1.3. Geodésicas para la métrica M-Q

Para analizar cuál sería el movimiento de una partícula de prueba que es colocada en la métrica M-Q⁽¹⁾ necesitamos derivar las ecuaciones de movimiento; tales ecuaciones geodésicas las derivaremos a partir del Lagrangiano, y en particular veremos el comportamiento de la correspondiente al movimiento radial. El Lagrangiano lo escribimos a continuación:

$$2\mathcal{L} = g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta \quad (1.17)$$

donde el punto representa la diferenciación respecto a un parámetro afín s , que para geodésicas temporales coincide con el tiempo propio τ , de manera que el Lagrangiano de la ecuación (1.17) es general para partículas sublumínicas.

Entonces, con las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (1.18)$$

se llega a las siguientes ecuaciones de movimiento en coordenadas de Erez-Rosen:

$$\ddot{t} + \dot{t}(\dot{r}g_{tt,r} + \dot{\theta}g_{tt,\theta}) = 0 \quad (1.19)$$

$$2\ddot{r}g_{rr} + 2\dot{r}(\dot{r}g_{rr,r} + \dot{\theta}g_{rr,\theta}) - \dot{t}^2g_{tt,r} - \dot{r}^2g_{rr,r} - \dot{\theta}^2g_{\theta\theta,r} - \dot{\phi}^2g_{\phi\phi,r} = 0 \quad (1.20)$$

$$2\ddot{\theta}g_{\theta\theta} + 2\dot{\theta}(\dot{r}g_{\theta\theta,r} + \dot{\theta}g_{\theta\theta,\theta}) - \dot{t}^2g_{tt,\theta} - \dot{r}^2g_{rr,\theta} - \dot{\theta}^2g_{\theta\theta,\theta} - \dot{\phi}^2g_{\phi\phi,\theta} = 0 \quad (1.21)$$

$$\ddot{\phi}g_{\phi\phi} + \dot{\phi}(\dot{r}g_{\phi\phi,r} + \dot{\theta}g_{\phi\phi,\theta}) = 0 \quad (1.22)$$

donde la métrica exterior en las coordenadas de Erez-Rosen modificadas (ecuaciones 1.14) se escribe así:

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= e^{2\Psi} \rightarrow \left(1 - \frac{2}{R}\right) e^{2q\Psi_{q^1}} \\
g_{RR} &= -e^{2(\Gamma-\Psi)} \left(1 + \frac{\lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{1-2\lambda}\right) \rightarrow -e^{2q(\Gamma_{q^1}-\Psi_{q^1})} \left(1 - \frac{2}{R}\right)^{-1} \\
g_{\theta\theta} &= -e^{2(\Gamma-\Psi)} M^2 R^2 (1-2\lambda + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta) \rightarrow -M^2 R^2 e^{2q(\Gamma_{q^1}-\Psi_{q^1})} \\
g_{\phi\phi} &= -e^{-2\Psi} M^2 R^2 \operatorname{sen}^2 \theta (1-2\lambda) \rightarrow -M^2 R^2 e^{-2q\Psi_{q^1}} \operatorname{sen}^2 \theta
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Recordemos que $\lambda = M/r$ y por tanto $\lambda = 1/R$. Las funciones Γ_{q^1} y Ψ_{q^1} son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\Psi_{q^1} = \Psi_{q^1}(R, \theta) &= \frac{5}{32} (3 \cos^2 \theta - 1) (3R^2 - 6R + 2) \ln \left(1 - \frac{2}{R}\right) \\
&\quad - \frac{5}{8} \ln \left(1 - \frac{2}{R}\right) - \frac{5}{4} \frac{R-1}{R^2 - 2R} + \frac{15}{16} (3 \cos^2 \theta - 1) (R-1)
\end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{q^1} = \Gamma_{q^1}(R, \theta) &= -\frac{15}{8} \operatorname{sen}^2 \theta (R-1) \ln \left(1 - \frac{2}{R}\right) + \\
&\quad - \frac{15}{4} \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{5}{4} \operatorname{sen}^2 \theta \left[\frac{(R-1)^2 + \cos^2 \theta}{(R^2 - 2R + \operatorname{sen}^2 \theta)^2} \right]
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Debido a que estamos interesados sólo en geodésicas temporales porque estamos considerando partículas de prueba reales sublumínicas, los rangos de nuestras coordenadas son los siguientes:

$$\infty > t \geq 0, \quad R > 2, \quad \pi \geq \theta \geq 0, \quad 2\pi \geq \phi \geq 0$$

1.3.1. Geodésicas radiales

Ahora que tenemos las ecuaciones geodésicas, vamos a considerar que la partícula de prueba hipotéticamente se movería a lo largo de una geodésica radial para un valor arbitrario de θ . Haciendo

$$\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$$

en la ecuación geodésica radial (1.20) para eliminar las variaciones en las demás coordenadas (que no nos interesan), obtenemos la siguiente ecuación para la derivada segunda de la coordenada radial respecto al tiempo propio:

$$\ddot{r} = -\frac{\dot{r}^2}{2} \left(\frac{g_{rr,r}}{g_{rr}} + \frac{g_{tt,r}}{g_{tt}} \right) + \frac{1}{2} \frac{g_{tt,r}}{g_{tt}g_{rr}} \quad (1.26)$$

Ahora vamos a escribir una expresión final para esa ecuación, para lo cual necesitaremos sustituir en (1.26) todos los términos del tensor métrico (ecuaciones 1.23), lo cual haremos después de escribir las derivadas de estos elementos del tensor métrico, que son las siguientes:

$$g_{rr,r} = 2e^{2q(\Gamma_{q^1} - \Psi_{q^1})} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \left(Mr^{-2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} + q(\Psi_{q^1} - \Gamma_{q^1}) \right) \quad (1.27)$$

$$g_{tt,r} = e^{2q\Psi_{q^1}} \left[2q\Psi_{q^1,r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) + \frac{2M}{r^2} \right] \quad (1.28)$$

Finalmente, al hacer todas las sustituciones en (1.26) nos queda:

$$\ddot{r} = -e^{2q(\Psi_{q^1} - \Gamma_{q^1})} \left(\frac{M}{r^2} + \frac{q(r - 2M)}{r} \Psi_{q^1,r} \right) - \dot{r}^2 q \Gamma_{q^1,r} \quad (1.29)$$

En el caso esféricamente simétrico ($q = 0$ en la ecuación anterior) obtenemos el resultado ya conocido para la aceleración radial respecto al tiempo propio en el espaciotiempo de Schwarzschild:

$$\ddot{r} = -M/r^2 \quad (1.30)$$

Debe tenerse en cuenta que no es interés del trabajo una descripción completa del movimiento de las partículas de prueba (no integraremos el conjunto completo de las ecuaciones geodésicas), sino solamente calcularemos la aceleración radial instantánea que experimenta una partícula de prueba en un tiempo dado. Como consecuencia de esto, no tomaremos en cuenta los vínculos impuestos sobre \dot{r} , $\ddot{\theta}$.

Ahora, para expresar los resultados en términos de cantidades de más significación física, introduzcamos unas coordenadas localmente definidas asociadas a un observador local Minkowskiano. Entonces, hagamos

$$dX = \sqrt{-g_{rr}} dr \quad (1.31)$$

$$dT = \sqrt{g_{tt}} dt \quad (1.32)$$

de donde se obtiene lo siguiente:

$$\dot{r} = \frac{\frac{dX}{dT}}{\sqrt{g_{rr} \left[\left(\frac{dX}{dT} \right)^2 - 1 \right]}} \quad (1.33)$$

$$\frac{d^2 X}{dT^2} = \dot{r} \sqrt{-g_{rr}} \left[1 - \left(\frac{dX}{dT} \right)^2 \right]^2 - \left(\frac{dX}{dT} \right)^2 \frac{g_{rr,r} \left[1 - \left(\frac{dX}{dT} \right)^2 \right]}{2(-g_{rr})^{3/2}} \quad (1.34)$$

Para el caso simétrico ($q = 0$), la expresión (1.34) se reduce a

$$\frac{d^2 X}{dT^2} = -\frac{M}{r^2} \left[1 - \left(\frac{dX}{dT} \right)^2 \right] \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1/2} \quad (1.35)$$

o en términos de la nueva coordenada R :

$$\frac{d^2 X}{dT^2} = -\frac{1}{R^{3/2} M} \left[1 - \left(\frac{dX}{dT} \right)^2 \right] (R - 2)^{-1/2} \quad (1.36)$$

lo cual es también un resultado ya conocido [51].

Dado que dX/dT siempre es menor que la unidad, la naturaleza atractiva de la gravedad para cualquier valor de $r > 2M$ (o $R > 2$) queda garantizada en (1.35) y (1.36) respectivamente.

Ahora calcularemos la aceleración radial instantánea para la solución M-Q⁽¹⁾, es decir, calcularemos (1.34). Podemos describir el comportamiento de la partícula de prueba en dos situaciones, que son cuando se encuentra sobre una geodésica radial fuera del eje de simetría ($\theta \neq n\pi$, o $y \neq 1$), y sobre el eje de simetría ($\theta = n\pi$, o $y = \pm 1$).

Como puede verse según [23], el comportamiento de las partículas de prueba en la métrica M-Q⁽¹⁾ se vuelve extraño en el eje de simetría cerca del horizonte.

Caso 1: La partícula se encuentra fuera del eje de simetría

Primero supongamos que la partícula de prueba que se encuentra a lo largo de la geodésica radial está fuera del eje de simetría del espaciotiempo, entonces cuando $R \rightarrow 2$, el término principal de (1.34) para valores pequeños de q es el dado a continuación:

$$\frac{d^2 X}{dT^2} \rightarrow -\frac{1 - \left(\frac{dX}{dT}\right)^2}{2^{3/2} M \sqrt{R-2}} + \frac{\mathcal{O}(q)}{\sqrt{R-2}} \quad (1.37)$$

Véase que este límite, excepto para pequeñas correcciones de orden q es el mismo que el obtenido en la situación esféricamente simétrica y exacta de (1.36). Entonces para partículas moviéndose a lo largo de la geodésica radial excluyendo el eje de simetría, pequeños valores del momento cuadrupolar agregan pequeñas perturbaciones en las trayectorias, y la naturaleza atractiva de la fuerza gravitacional se preserva siempre, es decir que una descripción perturbativa de la métrica de Schwarzschild es válida en este caso.

Caso 2: La partícula se encuentra sobre del eje de simetría

Ahora, usando (1.34) calcularemos la aceleración radial cuando la partícula está sobre el eje de simetría:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X(T)}{dT^2} &= \frac{1}{8} e^{(5/4)qA(R)} \left(\frac{dX(T)}{dT} + 1 \right) \left(\frac{dX(T)}{dT} - 1 \right) \sqrt{\frac{(R-2)^{-3}}{R^5}} \times \\ &\times \left[15q \ln \left(\frac{R-2}{R} \right) (R^5 - 5R^4 + 8R^3 - 4R^2) + \right. \\ &\left. + q (30R^4 - 120R^3 + 130R^2 - 20R + 20) + 8R^2 - 16R \right] \frac{1}{M} \end{aligned} \quad (1.38)$$

donde el término $A(R)$ tiene la siguiente forma:

$$A(R) = \frac{1}{R(R-2)} \left[6R^3 - 18R^2 + 8R + 4 + \ln \left(\frac{R-2}{R} \right) (3R^4 - 12R^3 + 12R^2) \right] \quad (1.39)$$

Si la ubicación de la partícula de prueba tendiera al horizonte de eventos sobre el eje de simetría, su aceleración radial inicial tendería a la siguiente expresión:

$$\frac{d^2 X}{dT^2} \rightarrow \frac{-5q}{2^{7/2} M (R-2)^{3/2}} \left[1 - \left(\frac{dX}{dT} \right)^2 \right] e^{-\frac{5}{8(R-2)} q} \quad (1.40)$$

Si $q > 0$, esa aceleración radial será negativa y tenderá a cero cuando $R \rightarrow 2$, es decir que la partícula de prueba no experimentaría aceleración alguna en el límite cuando tiende al horizonte de eventos de nuestra fuente compacta, lo cual constituye la primera anomalía encontrada. Y si $q < 0$, la aceleración radial será positiva y tenderá a infinito cuando $R \rightarrow 2$, correspondiendo este signo positivo a un efecto gravitatorio repulsivo, y esa es la segunda anomalía.

CAPÍTULO 2

Superenergía

Según la teoría clásica de campos, la energía es una cantidad definida en términos de potenciales y sus primeras derivadas. No obstante, en Relatividad General es imposible construir una magnitud tensorial expresada solamente en términos de la métrica y sus primeras derivadas; lo impide el principio de equivalencia. En consecuencia, una descripción física (es decir, local) de la energía contenida en un campo gravitacional es teóricamente imposible de construir en términos de verdaderos invariantes (magnitudes tensoriales de algún rango).

Entonces, surgen tres alternativas:

- La búsqueda una definición no-local de energía del campo gravitacional.
- La construcción de una definición de energía basada en pseudo-tensores.
- La utilización de un concepto sucedáneo al de la energía, como el de la superenergía, que es lo que vamos a explorar en este trabajo como se indicó en la introducción.

En este trabajo se escogió la alternativa de la superenergía y se exploró en torno a ella. Como se indicó en la introducción, la motivación para esta escogencia se basa en la riqueza y profundidad del significado de tal cantidad física, que evidentemente no es una cantidad que mide la energía sino más bien se trata de otro concepto con una nueva interpretación que aún queda abierta.

La superenergía W puede ser definida a partir del tensor de Bel [31] o a partir del tensor de Bel-Robinson[52, 32]. Puesto que estamos trabajando en espaciotiempos vacíos, ambas definiciones coinciden, y se tiene lo siguiente:

$$W = E^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} + B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \quad (2.1)$$

con $E_{\alpha\beta}$ y $B_{\alpha\beta}$ como la parte eléctrica y magnética del tensor de Weyl, definidas de la siguiente forma:

$$E_{\alpha\beta} = C_{\alpha\gamma\beta\delta} u^\gamma u^\delta \quad (2.2)$$

$$B_{\alpha\beta} = {}^*C_{\alpha\gamma\beta\delta} u^\gamma u^\delta = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\gamma\epsilon\rho} C^{\epsilon\rho}{}_{\beta\delta} u^\gamma u^\delta \quad (2.3)$$

donde $C_{\alpha\gamma\beta\delta}$ es el tensor de Weyl y la cantidad $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ es el tensor de Levi-Civita:

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ están en orden par} \\ -1 & \text{si } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ están en orden impar} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (2.4)$$

y u^α la 4-velocidad de una congruencia de observadores en reposo en función de la cual escribimos el tensor de Weyl en el marco de referencia de (1.1), es decir:

$$u^\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}, 0, 0, 0 \right) \quad (2.5)$$

Obsérvese que dado que estamos trabajando con espaciotiempos estáticos vacíos, la parte magnética del tensor de Weyl ($B_{\alpha\beta}$) es idénticamente cero.

2.1. Superenergía para la métrica M-Q

Para la métrica M-Q, la expresión de la superenergía¹ (en el eje $y^2 = 1$) es:

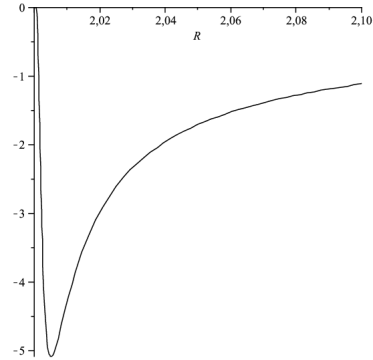
$$\begin{aligned}
W_{MQ} = \frac{1}{1536} e^{(5/4)qA(R)} \times & \left[(768R^2 - 1152R^3 + 576R^4 - 96R^5) \right. \\
& + q(-1920R + 3360R^2 - 6720R^3 + 5880R^4 \\
& \quad \left. - 1200R^5 - 540R^6 + 180R^7) \right. \\
& + q^2(400 - 800R + 5600R^2 - 10000R^3 + 22900R^4 \\
& \quad \left. - 32400R^5 + 22200R^6 - 7200R^7 + 900R^8) \right. \\
& + q \ln\left(\frac{R-2}{R}\right) (2880R^3 - 5760R^4 + 3600R^5 \\
& \quad \left. - 360R^6 - 360R^7 + 90R^8) \right. \\
& + q^2 \ln\left(\frac{R-2}{R}\right) (-2400R^2 + 7200R^3 - 23400R^4 + 49200R^5 \\
& \quad \left. - 52500R^6 + 29100R^7 - 8100R^8 + 900R^9) \right. \\
& + q^2 \ln\left(\frac{R-2}{R}\right)^2 (3600R^4 - 14400R^5 + 23400R^6 \\
& \quad \left. - 19800R^7 + 9225R^8 - 2250R^9 + 225R^{10}) \right] \frac{1}{M^4(R-2)^6 R^{10}}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

con $A(R)$ como lo siguiente:

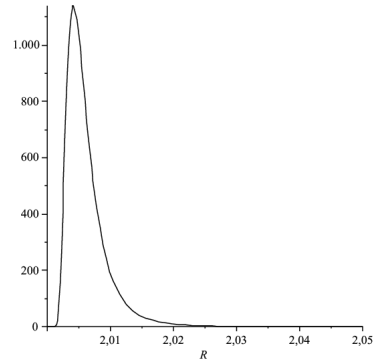
$$\begin{aligned}
A(R) = \frac{1}{R(R-2)} & \left[6R^3 - 18R^2 + 8R + 4 + \right. \\
& \left. + \ln\left(\frac{R-2}{R}\right) (3R^4 - 12R^3 + 12R^2) \right]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

¹El cálculo de la superenergía se hizo con MapleVR11 con el paquete GRTensor, es un cálculo exacto y se está mostrando el resultado completo para W .

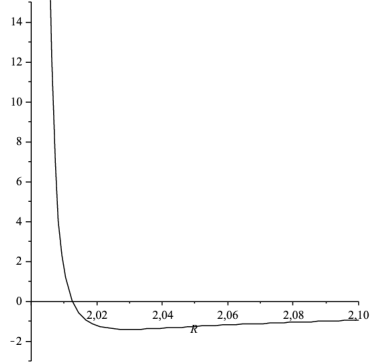
En virtud de analizar mejor el comportamiento de una partícula de prueba en esta métrica, grafiquemos² la aceleración radial y la superenergía para valores positivos y negativos del parámetro q .



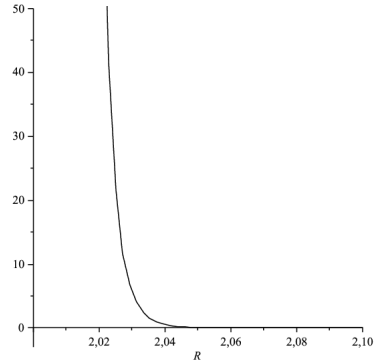
(a) Aceleración radial instantánea
con $q > 0$



(b) Superenergía con $q > 0$



(c) Aceleración radial instantánea
con $q < 0$



(d) Superenergía con $q < 0$

Figura 2.1: Aceleración radial instantánea y superenergía para $q > 0$ y $q < 0$.

Las gráficas (a) y (b) muestran el comportamiento de $\frac{d^2 X(T)}{dT^2}$ y W para $q = 0,01$ mientras que en las gráficas (c) y (d) son para $q = -0,01$.

²Las gráficas también fueron hechas usando MapleVR11 y GRTensor.

CAPÍTULO 3

Discusión

La primera conclusión que se extrae de las figuras (a) y (b) del capítulo anterior es que cerca del horizonte de eventos, el comportamiento de la partícula de prueba es atípico para $d^2X(T)/dT^2$, consecuente con el teorema de Israel.

Así, para la métrica M-Q⁽¹⁾ con $q > 0$ se observa que una partícula de prueba colocada en el eje de simetría en un vecindario del horizonte de eventos no siente aceleración gravitacional alguna debido a la fuente masiva ($d^2X(T)/dT^2 \approx 0$).

Continúa lo sorprendente, al alejarse (aún sobre el eje de simetría), la magnitud de $d^2X(T)/dT^2$ se incrementa con R (figura (a)) hasta que desde cierto valor de R , comienza a comportarse de manera “correcta”.

Este comportamiento patológico de $d^2X(T)/dT^2$ es consistente con el comportamiento de la superenergía en el mismo rango de R , como se ve en la figura (b). De hecho, W también se hace cero cerca del horizonte, incrementándose al alejarse del origen a lo largo del eje de simetría, hasta que se esté lo suficientemente lejos del horizonte y el comportamiento también comienza a ser el “esperado”.

Para $q < 0$ la situación es tanto o más inusual (véase figura (c)). En efecto, en un vecindario del horizonte de eventos, en el eje de simetría, $d^2X(T)/dT^2 > 0$, significando esto que la partícula experimentaría una fuerza gravitacional repulsiva; este efecto se restringe a valores de R muy cercanos a 2.

Al alejarse del horizonte, la aceleración propia se hace negativa, aunque sigue mostrando un comportamiento anómalo porque se ve incrementada en magnitud según se incrementa también R , es decir que hay un rango de R en el que al alejarse de la fuente, la atracción hacia ella se hace mayor. Alejándose más aún del origen (siempre a lo largo del eje de simetría) se recupera el comportamiento “normal”, es decir, $d^2X(T)/dT^2$ es negativa y decrece con R . Evidentemente, si muy cerca del horizonte de eventos, la aceleración radial era positiva y luego al alejarse se hace negativa, en un punto de R es cero (como puede verse en la misma gráfica (c)), lo cual también es bastante inusual.

Ese comportamiento de $d^2X(T)/dT^2$ con $q < 0$ es consistente con el correspondiente gráfico de la superenergía (figura (d)). De hecho, en un vecindario del horizonte, W es singular y entonces es su derivada respecto a R lo que explica el comportamiento patológico de $d^2X(T)/dT^2$ en ese rango de valores de R . Al moverse suficientemente lejos de $R = 2$ se recupera el comportamiento esperado.

Así que hemos podido ver que el concepto de la superenergía es una medida apropiada de la intensidad de la interacción gravitacional, inclusive en las situaciones altamente patológicas analizadas en este trabajo. El hecho de que la superenergía sea un verdadero escalar (obtenido desde un verdadero tensor) refuerza aún más su relevancia en el estudio de los sistemas autogravitantes, y, como dijimos previamente, queda abierta su interpretación.

Bibliografía

- [1] Werner Israel. Event horizons in static vacuum space-times. *Phys. Rev.*, 164(5):1776–1779, Dec 1967.
- [2] H. Weyl. The theory of gravitation. *Annalen Phys.*, 54:117–145, 1917.
- [3] H. Weyl. *Annalen Phys.*, 59:185, 1919.
- [4] T. Levi Civita. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Classe Sci. Fis. Mat. e Nat.*, 28:101, 1919.
- [5] J. L. Synge. *Relativity: The General theory*. North-Holland, Amsterdam, 1960.
- [6] D. Kramer and Hans Stephani. Exact Solutions of Einstein’s Field Equations. In *Jena 1980, Proceedings, General Relativity and Gravitation*, 75-92.
- [7] Bruno Boisseau and Patricio S. Letelier. Relativistic Multipoles and the Advance of the Perihelia. *Gen. Rel. Grav.*, 34:1077–1096, 2002.
- [8] Jeffrey Winicour, Allen I. Janis, and Ezra T. Newman. Static, Axially Symmetric Point Horizons. *Phys. Rev.*, 176:1507–1513, 1968.

-
- [9] Allen I. Janis, Ezra T. Newman, and Jeffrey Winicour. *Phys. Rev. Lett.*, 20:878–880, 1968.
- [10] F. I. Cooperstock and G. J. Junevicius. *Nuovo Cimento*, 16B:387, 1973.
- [11] L. Bel. *Gen. Relativ. Gravitation*, 1:337, 1971.
- [12] R. Bach and H. Weyl. *Math. Z.*, 13:134, 1920.
- [13] G. Darmois. Les equations de la gravitation einsteinienne. *Gauthier-Villars, Paris, P.36*, 1927.
- [14] D.M. Zipoy. *J. Math. Phys.*, 7:1137, 1966.
- [15] R. Gautreau and J.L. Anderson. *Phys. Lett.*, 25A:291, 1967.
- [16] F.I. Cooperstock and G.J. Junevicius. *Int. J. Theor. Phys.*, 9:59, 1968.
- [17] B.H. Vorhees. *Phys. Rev. D*, 2:2119, 1970.
- [18] F. Espósito and L. Witten. *Phys. Lett.*, 58B:357, 1975.
- [19] K. S. Virbhadra. Directional naked singularity in general relativity. 1996.
- [20] J.L. Hernández-Pastora and J. Martín. Monopole-quadrupole static axisymmetric solutions of einstein field equations. *Gen.Rel.Grav.*, 26(9):877, 1994.
- [21] J.L. Hernández-Pastora and J. Martín. New static axisymmetric solution of the einstein field equations. *Class. Quantum Grav.*, 10:2581, 1993.
- [22] L. Herrera, Filipe M. Paiva, and N. O. Santos. Geodesics in the gamma spacetime. *Int. J. Mod. Phys.*, D9:649–660, 2000.
- [23] L. Herrera. Geodesics in a quasi-spherical spacetime: A case of gravitational repulsion. *Found. Phys. Lett.*, 18:21–36, 2005.
- [24] G. Erez and N. Rosen. *Bull. Res. Council Israel*, 8F:47, 1959.

-
- [25] Ya. Zeldovich and I.D. Novikov. *Relativistic Astrophysics*. University of Chicago Press, Chicago, 1971.
- [26] A. Armenti and P.Havas. *Relativity and Gravitation*. Gordon and Breach, London, 1971.
- [27] H. Quevedo. *Fortschr. Phys*, 38:733, 90.
- [28] H. Quevedo. *Nuov. Cim.*, 110B:291, 1995.
- [29] L. Bel. *Cahiers de Physique*, 16:59, 1962.
- [30] L. Bel. *Gen. Rel. Grav*, 32:2047, 2000.
- [31] L. Bel. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 248:1297, 1959.
- [32] L. Bel. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 247:1094, 1958.
- [33] L. Herrera, J. Carot, and A. Di Prisco. Frame dragging and super-energy. *Phys. Rev.*, D76:044012, 2007.
- [34] L. Herrera, W. Barreto, J. Carot, and A. Di Prisco. Why does gravitational radiation produce vorticity? *Class. Quant. Grav.*, 24:2645–2651, 2007.
- [35] L. Herrera, A. Di Prisco, J. Carot, and N. O. Santos. Energetics of the Einstein-Rosen spacetime. *Int. J. Theor. Phys.*, 47:380, 2008.
- [36] Jose Luis Hernandez-Pastora. Approximate gravitational field of a rotating deformed mass. *Gen. Rel. Grav.*, 38:871–884, 2006.
- [37] H. Quevedo. *Phys. Rev.*, 33:324, 1986.
- [38] V. S. Manko. *Gen. Rel. Grav.*, 21:1193, 1989.
- [39] Ts. I. Gutsunayev and V. S. Manko. *Gen. Rel. Grav.*, 17:1025, 1985.
- [40] Robert P. Geroch. Multipole moments. I. Flat space. *J. Math. Phys.*, 11:1955–1961, 1970.

- [41] Robert P. Geroch. Multipole moments. II. Curved space. *J. Math. Phys.*, 11:2580–2588, 1970.
- [42] R. Geroch. *J. Math. Phys.*, 12:918, 1971.
- [43] R. O. Hansen. *J. Math. Phys.*, 15:46, 1974.
- [44] K. S. Thorne. *Rev. Mod. Phys.*, 52:299, 1980.
- [45] R. Beig and W. Simon. *Commun. Math. Phys.*, 78:75, 1980.
- [46] R. Beig and W. Simon. *Proc. Roy. London. A*, 376:333, 1981.
- [47] P. Kundu. *J. Math. Phys.*, 22:1236, 1981.
- [48] P. Kundu. *J. Math. Phys.*, 22:2006, 1981.
- [49] G. Fodor C. Hoenselaers and Z. Perjés. *J. Math. Phys.*, 30:2252, 1989.
- [50] H. E. J. Curzon. *Proc. London Math. Soc.*, 23:477, 1924.
- [51] Ch. McGruder. *Phys. Rev. D*, 25:3191, 1982.
- [52] A. Garcia-Parrado Gomez-Lobo. *Class. Quantum Grav.*, 25:01006, 2008.

♮